



تحلیل تنش‌های حرارتی در ورق فلزی حاوی گشودگی شبه‌مستطیلی

محمد جعفری^{1*}، محمدباقر نظری²، امیر طاهری نسب³

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

3- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

* شاهرود، کد پستی 3619995161، m_jafari821@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 26 مهر 1393

پذیرش: 26 آذر 1393

ارائه در سایت: 27 دی 1393

کلید واژگان:

نگاشت هموا

جریان حرارتی یکنواخت

تنش حرارتی

گشودگی شبه مستطیلی

چکیده

هدف اصلی این مقاله ارائه روشی برای محاسبه توزیع تنش اطراف گشودگی شبه‌مستطیلی در ورق فلزی نامحدود تحت جریان حرارتی یکنواخت در بی‌نهایت است. وجود گشودگی در ورق فلزی تحت جریان حرارتی یکنواخت باعث ایجاد تنش‌های حرارتی در اطراف گشودگی می‌شود. روش مورد استفاده بسط روش حل گودیر و فلورنس برای مسأله ترموالاستیک خطی تحت جریان حرارتی یکنواخت است. گودیر و فلورنس حل خود را برای صفحات همسانگرد حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل ارائه کردند. به منظور توسعه روش ارائه شده توسط آنها به گشودگی‌های مختلف، با استفاده از نگاشت هموا، ورق نامحدود حاوی گشودگی شبه مستطیلی به درون دایره‌ای به شعاع واحد نگاشته می‌شود. در این تحقیق مرز گشودگی عایق در نظر گرفته شده است. از جمله پارامترهای مهم در هندسه گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی و نسبت طول به عرض گشودگی هستند. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهند که پارامترهای فوق تأثیر بسزایی در توزیع تنش اطراف گشودگی دارند و با انتخاب صحیح پارامترهای مذکور می‌توان به مقدار تنش حرارتی کمتری نسبت به گشودگی دایره‌ای دست یافت. روش حل ارائه شده قابلیت حل ورق‌های فلزی حاوی سایر گشودگی‌ها را نیز دارد.

Thermal stress analysis of metallic plate with quasi-rectangular hole

Mohammad Jafari*, Mohammad Bagher Nazari, Amir Taheri Nasab

Department of Mechanical Engineering, University of Shahrood, Shahrood, Iran.

* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, m_jafari821@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 18 October 2014
Accepted 17 December 2014
Available Online 17 January 2015

Keywords:

Conformal Mapping
Analytical Solution
Complex Variable
quasi-rectangular hole

ABSTRACT

The main aim of this paper is to present a method to evaluate the stress distribution around quasi-rectangular hole in infinite isotropic plate subjected to uniform heat flow at infinity. The used method is a development of Goodier and Florence's method for the thermoelastic problem of uniform heat flow. Goodier and Florence used their solution for stress analysis of isotropic plates with circular and elliptical holes. In order to expand this method to solve the perforated plates with non circular holes, by means of conformal mapping, the infinite area external to the hole can be represented by the area outside the unit circle. In this paper, thermal-insulated condition along the hole boundary is assumed. Amongst the important parameters in hole geometry are rotation angle of hole, bluntness and aspect ratio of hole size. The results obtained demonstrate the effect of these parameters on stress distribution around quasi-rectangular hole and the correct selection of these parameters, lowest thermal stress rather than amount of stress corresponding to circular hole can be achieved. This method can be used for study of the stress analysis of plate with various holes.

1- مقدمه

کاربردهای مهندسی به صورت عام و در مکانیک شکست بصورت خاص، بررسی تمرکز تنش ناشی از وجود گشودگی در ورق‌ها است. تنش حرارتی و شکست ناشی از آن، از جمله مسائل تعیین کننده در شاخه‌های گوناگون علمی از میکروالکترونیک گرفته تا حوزه هوافضا بشمار می‌آید. در دهه‌های اخیر، مطالعه تأثیر تنش‌های حرارتی روی سازه‌ها مورد علاقه بسیاری از محققان بوده است. این امر به خاطر کاربرد گسترده مواد فلزی یا مواد مرکب در اجزای هوابیماهای سریع‌السیر، سازه‌های هوافضایی و مولدهای منبع انرژی هسته‌ای است. همه این سازه‌ها غالباً در تغییرات دمایی بالا عمل می‌کنند.

ورق‌ها در کاربردهای متنوع مهندسی، نقش مهمی بعنوان اجزای اصلی سازه‌های عامل در دماهای بالا از قبیل راکتورهای هسته‌ای، هوابیماهای مافوق صوت و توربین‌های گاز و بخار دارند. وقتی جریان حرارتی یکنواخت در یک جسم جامد به وسیله ناپیوستگی‌های هندسی مثل ترک یا گشودگی معشوش می‌شود؛ افزایش محلی در توزیع جریان اتفاق می‌افتد. این امر باعث افزایش تنش‌های حرارتی محلی و به دنبال آن از کارافتادگی و یا کاهش عمر مفید سازه‌های مهندسی می‌شود. به منظور تحلیل جامع استحکام سازه‌ها، مقدار و نحوه توزیع تنش حرارتی باید کاملاً مشخص باشد. یکی از مسائل مهم در

Please cite this article using:

M. Jafari, M. B. Nazari, A. Taheri Nasab, Thermal stress analysis of metallic plate with quasi-rectangular hole, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 19-26, 2015 (In Persian)

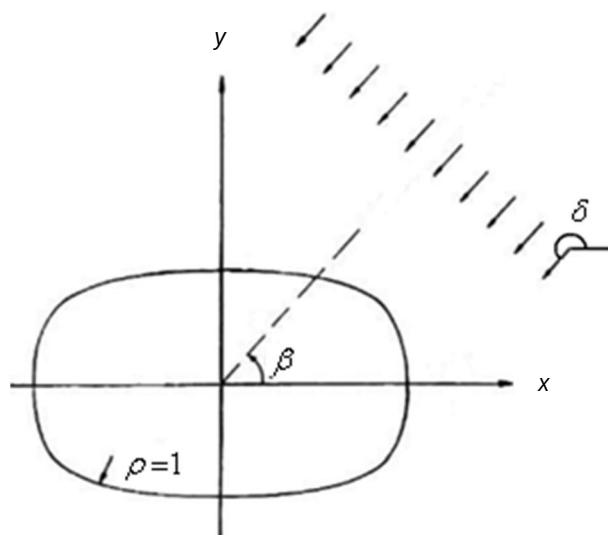
برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Jafari, M. B. Nazari, A. Taheri Nasab, Thermal stress analysis of metallic plate with quasi-rectangular hole, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 19-26, 2015 (In Persian)

تحقیقات متعددی از روش متغیر مختلط، در مورد مسأله ترموالاستیک ورق‌های همسانگرد حاوی گشودگی یا نقص هندسی انجام شده است. بخشی از این تحقیقات شامل بررسی تأثیر وجود گشودگی یا میان‌بار¹ در تحلیل تنش ورق‌های نامحدود و تحت بارگذاری حرارتی است و بخش دیگر تحقیقات به بررسی حضور ترک می‌پردازد. فلورنس و گودیر [1] و موشخلیشویلی [2] پایه‌گذار تئوری‌های مربوط به حلّ مسائل ترموالاستیک دوبعدی با استفاده از روش متغیر مختلط هستند. فلورنس و گودیر [3] با استفاده از روش متغیر مختلط، تنش‌های حرارتی در یک ورق الاستیک همسانگرد حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل را محاسبه کردند. گایواس [4] از روش متغیر مختلط، روند استخراج روابط مربوط به مسأله ترموالاستیک را برای یک ورق نامحدود الاستیک و همسانگرد دارای یک گشودگی به شکلی دلخواه تشریح کرد. سپس برای حالتی خاص، روابط مربوط به تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی بیضی‌شکل را در ورقی که در مرز گشودگی با استوانه‌ای به شکل بیضی درگیر است بدست آورد. با استفاده از تئوری صفحات ضخیم، حلّ مسأله سه‌بعدی صفحات ضخیم دارای گشودگی دایره‌ای عایق و تحت جریان حرارتی یکنواخت توسط لی [5] ارائه شد. راثو و سومی [6] از روش تحلیلی ارائه شده توسط لی، مسأله سه‌بعدی تعیین تنش‌های حرارتی در اطراف گشودگی بیضی‌شکل عایق، در یک ورق ضخیم و تحت جریان حرارتی یکنواخت در دستگاه مختصات بیضی را حل کرد. تاکیتویو همکارانش [7] با بکارگیری روش متغیر مختلط و استفاده از توابع تنش مختلط توانستند توزیع تنش حرارتی را در ورقی با ابعاد محدود و دارای گشودگی دایره‌ای بدست آورند. نتایجی عددی، برای محاسبه تنش در ورق مستطیلی شکل با نسبت‌های مختلف شعاع گشودگی به ابعاد ورق ارائه شد. در این تحقیق، شرایط مرزی متفاوتی برای لبه‌های ورق و مرز گشودگی مورد بررسی قرار گرفت. نیستانی و همکارانش [8] حلّی برای یک ورق نامحدود دارای گشودگی دایره‌ای و تحت شار حرارتی یکنواخت بدست آورد. کاتیس و گرین [9] مسأله ترموالاستیک میان‌بارها یا گشودگی‌های واقع در یک زمینه الاستیک نامحدود را مورد بررسی قرار دادند. آنها مرزهای مسأله را با استفاده از نگاشت هموا²ی مشخصی به داخل دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل کردند. در مقاله‌ای توسط هاسبه و وانگ [10] به صورت کامل، روابط مربوط به حلّ مسأله ترموالاستیک دوبعدی، برای ورق حاوی گشودگی‌های مختلف تشریح شد. در این تحقیق فرض شد که ورق از ماده الاستیک خطی همگن و همسانگرد ساخته شده و از قانون هوک تبعیت می‌کند. آن‌ها از روش متغیر مختلط برای ارائه روابط خود استفاده کردند. توابع پتانسیل مختلط مربوط به توابع نگاشت مورد استفاده در مقاله، برای شرایط مرزی و دمایی مختلف استخراج شدند. سرانجام حلّ عمومی برای مسائل با شرایط مرزی نیرویی، جابجایی و ترکیبی، تحت شار حرارتی یکنواخت و یا تحت یک منبع حرارتی نقطه‌ای به دست آمد. بررسی تنش‌های حرارتی و توزیع دما در نواحی چندضلعی حاوی گشودگی بیضی‌شکل، با استفاده از دستگاه مختصات بیضی - گون توسط بهلولار و وانگر [11] مورد مطالعه قرار گرفت. حلّ ترموالاستیک صفحات نامحدود تحت جریان حرارتی یکنواخت در دوردست و دارای وصله بیضی‌شکل توسط چن و چاو [12] مورد بررسی قرار گرفت. آسری [13] از روش متغیر مختلط برای بدست آوردن توابع پتانسیل و توابع گورست برای یک ورق الاستیک نامحدود دارای گشودگی‌هایی با شکل‌های مختلف استفاده کرد. بمنظور دستیابی به حلّ صریح، این گشودگی‌ها با استفاده از تابع

1- inclusion
2- Conformal mapping

نگاشتی مناسب و هموا به خارج دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل شدند. بهلولار و وانگر [14] با در نظر گرفتن فرض تنش صفحه‌ای، تحلیل تنش حرارتی را در یک ورق همسانگرد دارای گشودگی شبه‌بیضی بررسی کردند. آن‌ها از روش متغیر مختلط و از شرایط همدمائی در مرز گشودگی استفاده کردند. همچنین در این تحقیق، تنش بیشینه در اطراف گشودگی‌های مختلف محاسبه شد. در مورد مواد ناهمسانگرد، از تعمیم تئوری‌های ارائه شده توسط اشترو و لخنیتسکی برای تحلیل صفحات حاوی گشودگی‌های مختلف و تحت جریان حرارتی یکنواخت استفاده شد. وو [15] تأثیر دما بر تغییر شکل صفحه‌ای در یک جسم الاستیک ناهمسانگرد را بررسی کرد. مسأله تنش‌های حرارتی در یک جسم ناهمسانگرد تحت جریان حرارتی یکنواخت که بوسیله یک گشودگی بیضی‌شکل یا ترک دچار آشفتگی می‌شد؛ توسط هوو [16] مورد بررسی قرار گرفت. یوشیکاوا و هاسبه [17] توابع گرین مربوط به یک مسأله ترموالاستیسیته دوبعدی را برای یک ورق نامحدود با گشودگی دلخواه و با شرایط دمایی آدیاباتیک و ایزوترمال بدست آوردند. ورق ناهمسانگرد نامحدود حاوی گشودگی بیضی‌شکل تحت جریان حرارتی یکنواخت با استفاده از فرمولبندی لخنیتسکی و نگاشت هموا در مقاله‌ای توسط چاو و جانو [18] حل شد. تحلیل تنش و میدان مغناطیسی برای یک ورق نازک نامحدود از جنس مواد فرومغناطیس نرم، پارامغناطیس و دیامغناطیس با یک گشودگی بیضی‌شکل تحت جریان الکتریکی پایدار توسط هاسبه و همکارانش [19] ارائه شد. به‌جز فرض تنش صفحه‌ای که بدلیل نازک بودن ورق در نظر گرفته شد؛ در تحقیق آن‌ها، هیچ فرض دیگری برای تحلیل صورت نگرفت. هاسبه و همکارانش [20]، با استفاده از روش متغیر مختلط و تابع نگاشت کسری مناسب، مسأله توزیع جریان الکتریکی، دما و تنش‌های حرارتی در یک ورق هادی نامحدود را تحلیل کردند. جریان الکتریکی یکنواخت در بی‌نهایت به یک ورق هادی نامحدود شامل یک گشودگی بیضی‌شکل که در مرز گشودگی دارای یک ترک لبه‌ای است؛ اعمال شد. جریان الکتریکی باعث ایجاد گرما و شار حرارتی و در نهایت تنش حرارتی در ورق شد. ضرایب شدت تنش نیز در این مقاله محاسبه شدند. در مقاله‌ای توسط شیوای [21]، مسأله تنش‌های حرارتی در یک ورق نیمه‌محدود حاوی گشودگی دایره‌ای، تحت جریان حرارتی یکنواخت مورد بررسی قرار گرفت. گشودگی موجود در ورق، توسط میان‌بار الاستیک از ماده‌ای متفاوت از جنس ورق پر شده بود. وانگ و چاو [22]، به کمک ترموالاستیسیته صفحه‌ای، حلّی تحلیلی برای ورق حاوی میان‌باری که شکلی نزدیک به دایره دارد؛ ارائه کردند. در این تحقیق از روش متغیر مختلط و تئوری اغتشاشات برای ارائه نتایج استفاده شد. هاسبه و همکارانش [23] مسأله تقابل بین یک گشودگی دارای ترک و یک ترک خطی را با استفاده از تابع گرین، تابع نگاشت و روش متغیر مختلط بررسی کرد. هاسبه و همکارانش [24]، مسأله مقدار مرزی ترموالاستیک را برای یک میان‌بار صلب در تقابل با یک ترک خطی در یک ورق نامحدود و تحت جریان حرارتی یکنواخت مطالعه کردند. در این مقاله سعی شد تا چرخش میان‌بار نیز بررسی شود. مسأله با استفاده از روش متغیر مختلط و با ارائه تابع نگاشتی کسری حلشد. از تحقیقات انجام‌شده در مورد تحلیل صفحات ناهمسانگرد حاوی میان‌بار با استفاده از روش متغیر مختلط می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. هوو [25] براساس فرمولبندی اشترو، برای ورق ناهمسانگرد با میان‌باری به شکل بیضی، و همچنین چاو و شن [26] براساس فرمولبندی لخنیتسکی و روش نگاشت هموا، برای یک ورق ناهمسانگرد با میان‌باری به شکل دایره تحقیقاتی را انجام دادند. حلّ تحلیلی برای یک میان‌بار ناهمسانگرد بیضی -



شکل 1. نمایی از هندسه گشودگی و بارگذاری

همانطور که قبلاً عنوان شد؛ فلورنس و گودیر [3,1] توزیع تنش ورق همسانگرد حاوی گشودگی‌های دایره‌ای و بیضی‌شکل را از روش تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. بمنظور بسط روابط ارائه شده توسط فلورنس و گودیر و برای بدست آوردن توزیع تنش اطراف گشودگی شبه‌مستطیلی و همچنین برای محاسبه راحت‌تر انتگرال کوشی در هنگام محاسبه تنش، بهتر است مرز گشودگی شبه‌مستطیلی، به دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل شود. لذا بوسیله نگاشت همونوا، ناحیه خارج گشودگی شبه‌مستطیلی در مختصات فیزیکی z به محدوده خارج گشودگی دایره‌ای به شعاع واحد در صفحه ζ ، با تابع انتقال رابطه (5) صورت می‌گیرد (شکل 2) [30]:

$$z = w(\zeta) = x + iy \quad (5)$$

که در رابطه (5) x و y بصورت رابطه (6) به دست می‌آیند [30]:

$$\begin{aligned} x &= \lambda(\cos\theta + w\cos(n\theta)) \\ y &= -\lambda(c\sin\theta - w\sin(n\theta)) \end{aligned} \quad (6)$$

در رابطه (6)، پارامترهای مختلفی از قبیل c ، λ و w دیده می‌شود. این پارامترها نوع شکل، بزرگی و تیزی یا نرمی آن را نشان می‌دهند. c نسبت طول به عرض گشودگی است، برای اینکه حل حاضر علاوه بر گشودگی شبه مربعی قابلیت حل گشودگی شبه مستطیلی را نیز داشته باشد، می‌توان از این پارامتر استفاده نمود. اگر پارامتر c مخالف یک باشد در این صورت گشودگی، شبه‌مستطیلی خواهد بود. تأثیر این پارامتر در شکل 3 نمایش داده شده است. λ بزرگی گشودگی را نشان می‌دهد. پارامتر w برای تعیین میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی تعریف شده است. به عبارت دیگر w نشان دهنده انحنا گوشه‌های گشودگی می‌باشد و مطابق شکل 4، با کاهش آن، گشودگی به دایره ($w=0, c=1$) یا بیضی ($w=0, c \neq 1$) تبدیل می‌شود. در حقیقت شکل 4 ترسیم معادله‌ی (6) برای w های مختلف و $c=1$ است که مرز گشودگی مورد بحث را نشان می‌دهد. برای جلوگیری از ایجاد گشودگی با لبه‌های تیز باید w در بازه‌ی $0 \leq w \leq 0.33$ قرار گیرد. انحنا گوشه‌های گشودگی (w) یکی از پارامترهای مهم و تأثیرگذار بر توزیع تنش اطراف گشودگی است که در این مقاله تأثیر این پارامتر بررسی می‌شود. شرایط مرزی شار حرارتی به صورت زیر است.

شکل در یک ورق نامحدود ناهمسانگرد تحت جریان حرارتی یکنواخت توسط چاو و شن [27] مورد بررسی قرار گرفت. روش مورد استفاده براساس فرمولبندی لختی‌سکی و استفاده از تکنیک نگاشت همونوا بود.

گائو و همکارانش [28] حلی دقیق برای تحلیل تنش ورق پیزوالکتریک دارای گشودگی بیضی‌شکل یا ترک ارائه کردند. ابتدا با تعمیم مسأله دوبعدی براساس نسخه پیشرفته فرمولبندی اشترو-اشلبای، یک گشودگی بیضی‌شکل در یک جسم ترموپیزوالکتریک و تحت جریان حرارتی یکنواخت و بارهای الکتریکی-مکانیکی در بی‌نهایت مطالعه شد. سپس با میل دادن ابعاد گشودگی به سمت ترک، حل‌هایی دقیق برای ضرایب شدت میدان در نزدیکی نوک ترک و میدان الکتریکی درون ترک ارائه شد. کاردوماتیس و لی [29] با استفاده از فرمولبندی نابجایی اشترو، پیشرفت ترک برای یک ماده ناهمسانگرد تحت بارهای ترکیبی مکانیکی و حرارتی را مورد بررسی قرار داد.

اگرچه تحقیقات زیادی در زمینه ورق‌های حاوی گشودگی و تحت جریان حرارتی یکنواخت انجام شده است؛ ولی بیشتر نتایج ارائه شده برای گشودگی‌هایی مانند دایره و بیضی است. همچنین نتایجی که تمامی پارامترهای مهم و تأثیرگذار مانند شعاع انحنا گوشه گشودگی، زاویه چرخش گشودگی و کشیدگی گشودگی بر توزیع تنش را مورد مطالعه قرار دهد؛ وجود ندارد. در این تحقیق سعی می‌شود تا به مطالعه تأثیر این پارامترها بر روی توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی پرداخته شود.

2- روش حل

مطابق شکل 1 ورقی حاوی گشودگی چهارضلعی درنظر بگیرید که تحت جریان حرارتی یکنواخت با زاویه (δ) نسبت به محور x قرار دارد. مرز گشودگی، عایق حرارتی درنظر گرفته شده است. جریان حرارتی یکنواخت در اثر وجود گشودگی شبه‌مستطیلی مرکزی مغشوش می‌شود. این امر باعث ایجاد تنش در اطراف گشودگی می‌گردد. ابعاد ورق درمقابل اندازه گشودگی چنان است که بتوان ورق را بی‌نهایت (نامحدود) فرض کرد. در این شکل، زاویه چرخش گشودگی که بیانگر نحوه قرارگیری آن نسبت به افق است، با β نمایش داده شده است. ورق مفروض دارای رفتار الاستیک خطی بوده و با توجه به شرایط مرزی، تنها تنش ایجاد شده در مرز گشودگی σ_θ است. روش مورد استفاده، روش متغیر مختلط است. تابع پتانسیل دمایی مختلط $\Omega(z)$ برای یک ماده همسانگرد دوبعدی، تابعی هولومورفیک است که به صورت رابطه (1) تعریف می‌شود [10]:

$$\Omega(z) = T(x, y) + i\theta(x, y) \quad (1)$$

که در آن $T(x, y)$ تابع دما و θ تابع همساز مزدوج با T است. تابع دمایی $T(x, y)$ برای یک جسم الاستیک، تابعی هارمونیک است که معادله هدایت حرارتی رابطه (2) را ارضا می‌کند [10].

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

چون $T(x, y)$ قسمت حقیقی $\Omega(z)$ است؛ پس می‌توان رابطه (3) را نوشت:

$$T(x, y) = \frac{1}{2}[\Omega_0(z) + \overline{\Omega_0(z)}] \quad (3)$$

مؤلفه‌های شار حرارتی q_x و q_y در جهات x و y بصورت رابطه (4) تعریف می‌شوند.

$$q_x - iq_y = -k\Omega'_0(z) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (9)$$

موشکلسیولی [2] حل (10) را برای معادله فوق پیشنهاد کرد:

$$F(x, y) = \text{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \quad (10)$$

که در آن $\varphi(z)$ و $\chi(z)$ توابع پتانسیلی تحلیلی هستند که با توجه به شرایط مرزی و دمایی و پیوستگی جابجایی، قابل محاسبه می‌باشند. در نهایت با مشخص شدن تابع تنش F ، به کمک رابطه (8)، می‌توان تنش‌های اطراف گشودگی را به دست آورد. ($\chi'(z) \equiv \psi(z)$)

مؤلفه‌های تنش و جابجایی برحسب توابع پتانسیل فوق در صفحه نگاشت به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\text{Re} \left[\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \left\{ \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\}' + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \\ u + iv &= \frac{1}{2}G \left[\kappa\phi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\phi'(\zeta) - \bar{\psi}(\zeta) \right] \\ &\quad + \alpha' \int \Omega(\zeta)\omega'(\zeta)d\zeta \end{aligned} \quad (11)$$

باتوجه به رابطه (11)، برای تعیین توابع پتانسیل، نیاز به تعیین تابع دمایی $\Omega(\zeta)$ است. با فرض عایق بودن مرز گشودگی و با استفاده از روابط (4) و (7) تابع $\Omega(\zeta)$ بصورت رابطه (12) به دست می‌آید.

$$\Omega(\zeta) = -\frac{q\lambda}{2\kappa} \left[e^{-i\delta}(b\zeta + 2w\zeta^2) + e^{i\delta} \left(\frac{b}{\zeta} + \frac{2w}{\zeta^2} \right) \right] \quad (12)$$

که در آن $b=1+c$ است. با در نظر گرفتن نقاط مرزی $\zeta = \sigma$ ، شرایط مرزی مربوط به تنش و جابجایی برحسب توابع پتانسیل بترتیب بصورت رابطه (13) بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\phi'(\sigma) - \bar{\psi}(\sigma) &= 0 \\ \kappa\phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\phi'(\sigma) - \bar{\psi}(\sigma) &= 2G\alpha' \int \Omega(\sigma)\omega'(\sigma)d\zeta \end{aligned} \quad (13)$$

در روابط فوق κ و α' برای حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای به صورت زیر تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha_0 & \kappa &= \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{حالت تنش صفحه‌ای} \\ \alpha' &= (1+\nu)\alpha_0 & \kappa &= 3-4\nu & \text{حالت کرنش صفحه‌ای} \end{aligned}$$

G مدول برشی ورق است. در نهایت با اعمال شرایط فوق توابع پتانسیل مشخص شده و با استفاده از رابطه (10)، تابع تنش F و سرانجام مؤلفه‌های تنش قابل دستیابی خواهند بود.

3- خواص مکانیکی ماده

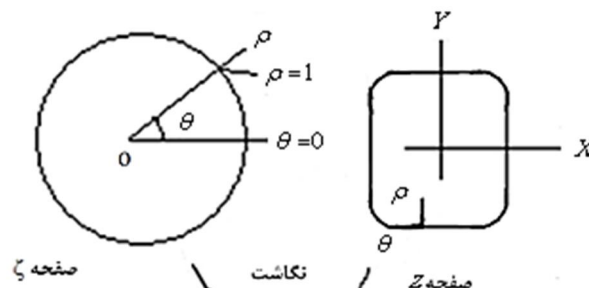
نتایج ارائه شده در این تحقیق برای ورق فولادی است. خواص مکانیکی مورد نیاز در این تحلیل برای فولاد مورد نظر، در جدول 1 ارائه شده است. با توجه به اینکه تنش‌ها برحسب خواص مکانیکی ورق، بی‌بعد شده‌اند، جنس ورق هیچ تأثیری بر نتایج مورد بررسی ندارد.

4- بررسی درستی جواب‌ها

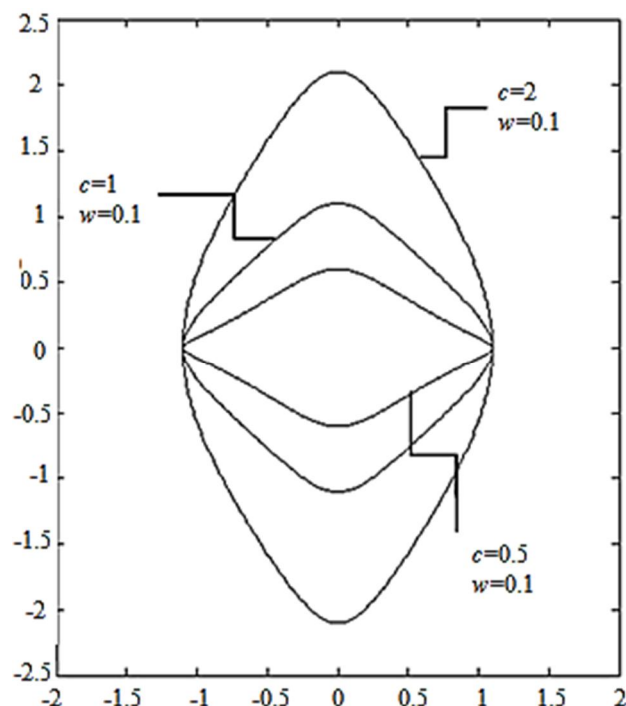
همانطور که اشاره شد؛ با انتخاب $w=0$ و $c=1$ و اعمال آن در رابطه (6)، مرز

جدول 1 خواص مکانیکی ماده مورد استفاده

نوع ماده	E (GPa)	ν	k (W/m°C)	α ($\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{C}$)
فولاد	210	0/3	50/2	11/1



شکل 2 مختصات منحنی الخط



شکل 3 تأثیر پارامتر c بر هندسه گشودگی



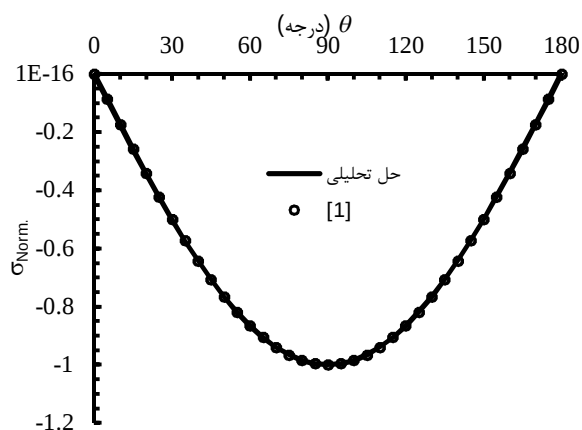
شکل 4 تأثیر پارامتر w بر هندسه گشودگی برای c=1

$$\Omega_0(z) + \bar{\Omega}_0(\bar{z}) = -2i/k \int q_n(s)ds + \text{const.} \quad (7)$$

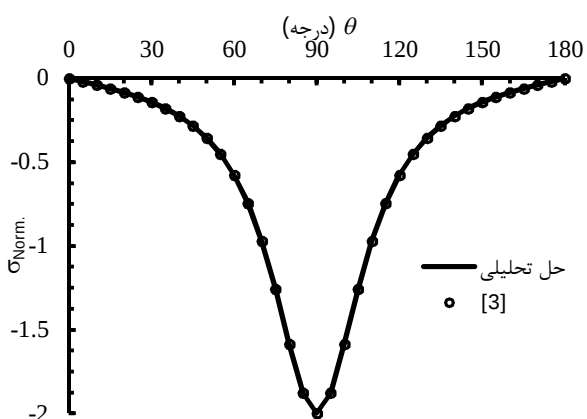
که در آن $q_n(s)$ نشان دهنده فشار حرارتی نرمال در نقطه‌کاز المان بسیار کوچک ds در امتداد مرز و k ضریب انبساط حرارتی ماده است [31]. مؤلفه‌های تنش با استفاده از تابع تنش ایری $F(x, y)$ بصورت رابطه (8) تعریف می‌شوند:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

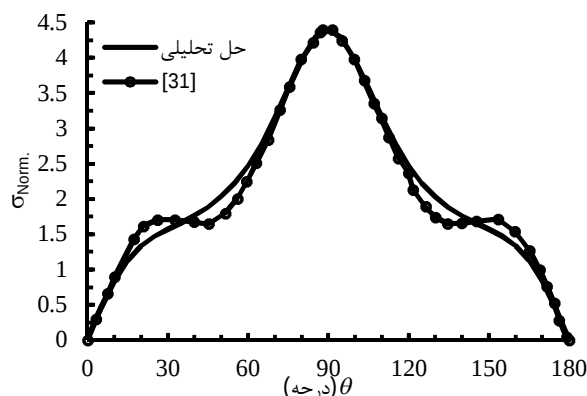
با ارائه روابط سازگاری در حالت دوبعدی برحسب مؤلفه‌های تنش، و اعمال تابع تنش F در آن، معادله سازگاری بصورت رابطه (9) بدست می‌آید.



شکل 5 مقایسه روش حل تحلیلی حاضر و نتایج حاصل از مرجع [1] برای گشودگی دایره‌ای



شکل 6 مقایسه روش حل تحلیلی حاضر و نتایج حاصل از مرجع [3] برای گشودگی بیضی



شکل 7 مقایسه روش حل تحلیلی حاضر و مرجع [32] برای گشودگی مربعی

5- نتایج

پارامترهایی که در این مقاله بررسی شده‌اند؛ زاویه‌ی چرخش گشودگی، کشیدگی گشودگی و انحنای گوشه گشودگی ورق می‌باشند. اگرچه زاویه شار یکی از پارامترهای مهم و تأثیرگذار بر توزیع تنش اطراف گشودگی است ولی با توجه به نامحدود و همسانگرد بودن ورق، تأثیر زاویه شار و زاویه چرخش کاملاً شبیه یکدیگر است. از اینرو تأثیر این پارامتر در مقاله لحاظ نشده است. پارامترهای فوق متغیرهای طراحی نامگذاری می‌شوند. در این مقاله سعی شده است تا ابتدا تأثیر هر یک از پارامترها بطور مجزا بررسی شود. بدین معنی که وقتی تأثیر یک متغیر طراحی مورد مطالعه قرار می‌گیرد؛ دیگر متغیرها،

گشودگی به دایره تبدیل می‌شود. در صورتی که c مخالف یک باشد؛ گشودگی به بیضی تبدیل خواهد شد.

برای تأیید صحت نتایج به دست آمده از روش تحلیلی، مقایسه‌ای بین حل حاضر (با انتخاب w و c مناسب) و نتایج ارائه شده در مراجع [1] و [3]، صورت گرفته است. فلورنس و گودیر تنش‌های حرارتی موضعی را در یک ورق بی‌نهایت تحت شار حرارتی یکنواخت، در اطراف گشودگی دایره‌ای بررسی کردند [1]. مقایسه‌ی حل تحلیلی حاضر و تحقیقات فلورنس و گودیر در شکل 5 نشان داده شده است. در واقع این شکل توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را در اطراف گشودگی نشان می‌دهد.

منظور از تنش بی‌بعد در این تحقیق $\sigma_{\text{Norm}} = \frac{\sigma_{\theta}}{E\alpha q\lambda/k}$ است. که در آن E مدول یانگ، α ضریب انبساط حرارتی، q شار حرارتی، k ضریب هدایت حرارتی و λ نشان دهنده اندازه گشودگی است.

نتایج حل تحلیلی حاضر و نتایج بدست آمده از مرجع [1] به طور کامل بر یکدیگر منطبق هستند. مطابق شکل 5، با اعمال شار حرارتی تحت زاویه 270 درجه در بی‌نهایت، بیشترین تنش محیطی در زاویه‌ی 90 درجه اتفاق می‌افتد. تنش‌های شعاعی و برشی، در مرز گشودگی صفر هستند. لازم به توضیح است که این نتایج با اعمال $w=0$ و $c=1$ در رابطه (6) که معادل گشودگی دایره‌ای می‌باشد، به دست آمده است.

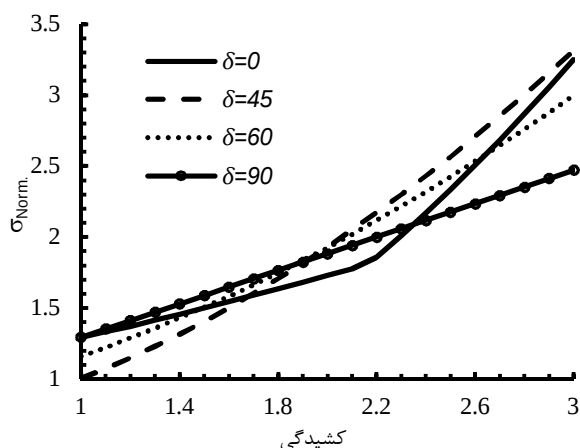
فلورنس و گودیر تنش‌های حرارتی موضعی را حول گشودگی بیضی در یک ورق بی‌نهایت تحت شار حرارتی یکنواخت، بررسی کردند [3]. مقایسه‌ی حل تحلیلی حاضر و این تحقیقات در شکل 6 ارائه شده است.

لازم به توضیح است که فلورنس و گودیر در مقاله‌ی خود پارامتر مربوط به کشیدگی گشودگی بیضی را با m نشان داده‌اند؛ حال آنکه در این مقاله، c نشان‌دهنده‌ی این پارامتر است. در شکل 6 برای حالت $c=3$ نتایج باهم مقایسه شده‌اند. همانطور که در این شکل نشان داده شده است؛ نتایج حاصل از حل تحلیلی حاضر و مرجع [3] به طور کامل بر یکدیگر منطبق هستند. مطابق شکل 6، تحت زاویه شار 270 درجه (شکل 1)، بیشترین تنش محیطی در اطراف گشودگی بیضی هم در زاویه‌ی 90 درجه اتفاق می‌افتد.

تحقیقات فلورنس و گودیر تنها برای شکل‌های خاص مانند دایره و بیضی بوده و تأثیر پارامترهای دیگر همچون زاویه‌ی چرخش گشودگی در آن لحاظ نشده است. در تحقیق حاضر سعی می‌شود تا تأثیر انحنای گوشه گشودگی، جهت گیری (زاویه‌ی چرخش) گشودگی بر توزیع تنش اطراف گشودگی مورد بررسی قرار گیرد. در مقایسه‌های صورت گرفته با مراجع یاد شده، زاویه‌ی چرخش گشودگی، صفر در نظر گرفته شده است.

مقایسه‌ی دیگری بین حل تحلیلی حاضر (با انتخاب w و λ مناسب) و نتایج ارائه شده در مرجع [32]، صورت گرفته است. وانگ [32] از روش اغتشاشات¹، تنش‌های حرارتی موضعی را در یک ورق بی‌نهایت تحت شار حرارتی یکنواخت با زاویه‌ی 90 درجه، در اطراف گشودگی‌هایی که شکل آنها به دایره نزدیک است؛ مورد بررسی قرار داد. نتیجه این مقایسه در شکل 7 نشان داد شده است. مطابق این شکل؛ نتایج حاصل از دو روش برای گشودگی مربعی با $w=0/05$ و $\lambda=3/4$ با دقت خوبی برهم منطبقند. علت انطباق روش حل تحلیلی حاضر با نتایج ارائه شده توسط فلورنس و گودیر در دو شکل 5 و 6، استفاده از یک روش حل مشابه (روش متغیر مختلط) است. ولی در نتایج مربوط به مرجع 32 از روش تئوری اغتشاشات استفاده شده است که همراه با تقریب بوده و دارای اندکی خطاست.

1- Perturbation



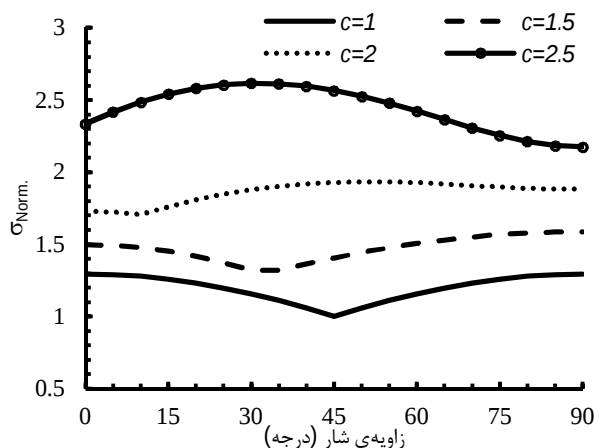
شکل 9 تأثیر کشیدگی گشودگی در زوایای شار مختلف و $w=0.05$ بر روی تنش بی-بعد بیشینه

5-2- تأثیر زاویه چرخش گشودگی (β)

در شکل 11 تأثیر زاویه چرخش گشودگی بر روی تنش بی‌بعد بیشینه نشان داده شده است. همانطور که در این شکل دیده می‌شود؛ تغییرات تنش بی‌بعد بیشینه برحسب زاویه چرخش گشودگی، تابعی با دوره تناوب 90 درجه است. از این‌رو در شکل 12، سعی شده تا در w های مختلف در بازه‌ی صفر تا 90 درجه، به بررسی تأثیر زاویه چرخش گشودگی بر توزیع تنش بی-بعد بیشینه پرداخته شود.

در ابتدا لازم است تا تنش بی‌بعد مطلوب و نامطلوب که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است؛ تعریف شوند. باتغییر زاویه‌ی چرخش گشودگی، در هر زاویه‌ی چرخش خاص، یک تنش بی‌بعد بیشینه به‌دست می‌آید. پس اگر زاویه‌ی چرخش از صفر تا 180 تغییر کند؛ به ازای هر زاویه چرخش یک تنش بی‌بعد بیشینه وجود دارد. از بین این تنش‌های بی‌بعد بیشینه، کمترین و بیشترین مقدار، به ترتیب تنش بی‌بعد مطلوب و تنش بی-بعد نامطلوب نامگذاری شده است. در طراحی باید از شرایط مربوط به تنش بی‌بعد نامطلوب اجتناب کرد و به شرایط تنش مطلوب نزدیک شد.

مطابق شکل 12، تنش بی‌بعد مطلوب در زاویه‌ی چرخش 45 درجه و تنش بی‌بعد نامطلوب در زاویه‌ی چرخش صفر یا 90 درجه اتفاق می‌افتد. نتیجه این شکل برای زاویه شار 270 آورده شده است. یعنی اگر زاویه شار



شکل 10 تأثیر زاویه شار در کشیدگی‌های مختلف و در $w=0.05$ بر روی تنش بی‌بعد بیشینه

ثابت در نظر گرفته می‌شوند. در پایان، تأثیر همزمان تمامی متغیرهای طراحی، جهت دستیابی به کمترین مقدار تنش ممکن مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

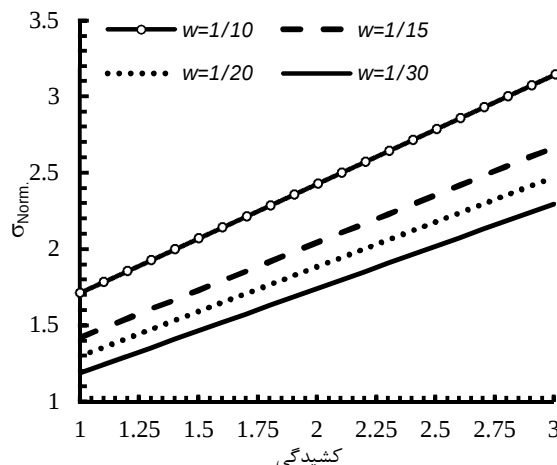
5-1- تأثیر کشیدگی گشودگی (c)

این پارامتر همانطور که در تابع نگاشت به آن اشاره شد؛ مستقیماً بر هندسه گشودگی تأثیر می‌گذارد به گونه‌ای که با تغییر در مقدار c ، نسبت طول به عرض گشودگی (کشیدگی گشودگی) قابل کنترل خواهد بود. مطابق شکل 8، مقدار تنش بی‌بعد بیشینه، با متغیر c رابطه تقریباً خطی داشته و افزایش یا کاهش این پارامتر به ترتیب موجب افزایش و یا کاهش تنش بی‌بعد بیشینه خواهد شد. منظور از تنش بی‌بعد بیشینه وقتی است که در رابطه $\sigma_{Norm} = \frac{\sigma_{\theta}}{Eaql/k}$ ، مقدار تنش محیطی (σ_{θ})، بیشترین تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی باشد. همچنین با افزایش w برای کشیدگی‌های مختلف، یکسان است. برای دستیابی به یک نگاشت هم‌نوا، مقدار c در تابع نگاشت باید در محدوده خاصی باشد لذا سعی شده است نتایج ارائه شده برای c در این محدوده قرار گیرد.

باتوجه به رابطه (1)، پارامتر c فقط در جهت y تابع نگاشت اعمال شده است لذا مطابق شکل 3، با افزایش مقدار c ، شکل گشودگی در جهت y کشیده می‌شود. مطابق شکل 9، روند افزایش تنش بی‌بعد بیشینه با افزایش مقدار c برای وقتی که زاویه اعمال شار صفر باشد یا بعبارت دیگر زاویه شار عمود بر امتداد کشیدگی گشودگی باشد؛ شدیدتر است.

برای وقتی که شار حرارتی در جهت y است ($\delta=90$)، با افزایش c تنش بی‌بعد بیشینه با شیب کمتری افزایش می‌یابد.

شکل 10 تغییر تنش بی‌بعد بیشینه را برحسب زاویه شار در کشیدگی‌های مختلف گشودگی چهارضلعی نشان می‌دهد. مطابق آنچه که در شکل 10 دیده می‌شود؛ تغییرات تنش بی‌بعد بیشینه برحسب زاویه شار در c های مختلف و برای $w=0.05$ ، رفتار نامنظمی دارد. کمترین تنش بی‌بعد و زاویه شار متناظر با آن، با تغییر c ، تغییر می‌کند. بنابراین همانطور که قبلاً نیز اشاره شد؛ کاهش مقدار تنش بی‌بعد بیشینه با تغییر مقدار c ، بستگی به زاویه شار دارد. کمترین تنش بی‌بعد در $c=1$ در زاویه شار 45 درجه ($\delta=45$) اتفاق می‌افتد. بیشترین تنش بی‌بعد در این حالت در زوایای شار صفر و 90 درجه رخ می‌دهد.

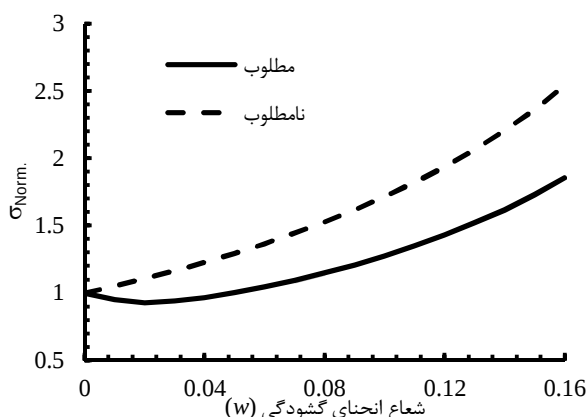


شکل 8 تأثیر کشیدگی گشودگی در w های مختلف و زاویه‌ی چرخش صفر درجه بر روی تنش بی‌بعد بیشینه

برابر یک است؛ مقدار تنش بی‌بعد مطلوب و نامطلوب نیز تغییر می‌کند، علت انتخاب مقدار یک برای متغیر c ، بهینه بودن شکل گشودگی در این حالت است. اگر مقدار این تنش‌ها، به‌صورت تابعی پیوسته برحسب w رسم شود نتیجه جالبی به‌دست می‌آید. نتایج تنش بی‌بعد مطلوب و نامطلوب در اثر تغییر w در شکل 13 آورده شده است. با توجه به شکل 13، برای گشودگی چهارضلعی، مقدار تنش بی‌بعد مطلوب با افزایش شعاع انحنای گشودگی تا $0/02$ ، کاهش می‌یابد و تا مقدار $w=0/05$ ، تنش بی‌بعد مطلوب مربوط به گشودگی چهارضلعی، کمتر از تنش بی‌بعد مطلوب ناشی از گشودگی دایره‌ای ($w=0$) است. کمترین تنش بی‌بعد مطلوب ممکن در $w=0/02$ برابر $0/93$ می‌باشد. لازم به توضیح است که در حالت $w=0$ یا گشودگی دایره‌ای مقدار تنش مطلوب 1 می‌باشد. از طرفی تنش بی‌بعد نامطلوب با افزایش w افزایش می‌یابد. در $w=0$ که معادل گشودگی دایره‌ای است؛ تنش بی‌بعد نامطلوب کمترین مقدار ممکن است. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد؛ تنش بی‌بعد مطلوب برای تمام w ها در زاویه 45 درجه اتفاق می‌افتد و تنش بی‌بعد نامطلوب در زاویه صفر یا 90 درجه و این زاویه مستقل از w است. در جدول 3، مقادیر بهینه متغیرهای طراحی و مقدار کمترین تنش بی‌بعد ممکن معرفی شده است.

6- نتیجه گیری

در این مقاله پارامترهای متعددی مورد بررسی قرار گرفت که هر کدام از این پارامترها تأثیر بسزایی بر روی مقدار تنش بی‌بعد بیشینه اطراف گشودگی شبه مستطیلی دارند. مطالعه‌ی نحوه‌ی تأثیر این پارامترها، طراح را قادر خواهد ساخت تا به طرح مطلوبی دست یابد. در روند ارائه نتایج، ابتدا به مطالعه‌ی تأثیر هریک از پارامترهای به تنهایی پرداخته شد. سپس تأثیر همزمان پارامترهای مختلف مورد بررسی قرار گرفت. این تحقیق به‌خوبی نشان داد که تغییر شعاع انحنای گوشه گشودگی، تنها پارامتر برای کاهش مقدار تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی نیست، بلکه با تغییر زاویه چرخش گشودگی هم می‌توان مقدار تنش اطراف گشودگی را کنترل کرد. با در نظر گرفتن همه پارامترهای مورد بررسی نشان داده شد که می‌توان با انتخاب صحیح این پارامترها؛ حتی به مقدار تنشی کمتر از مقدار تنش مربوط به گشودگی دایره‌ای دست یافت.



شکل 13 تاثیر معیار تیزی روی تنش مطلوب

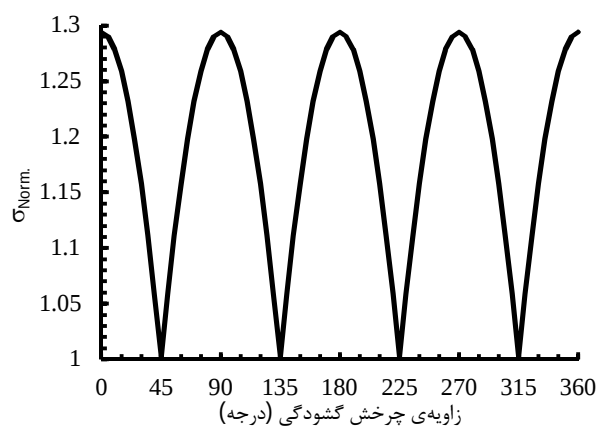
جدول 3 مقادیر بهینه متغیرهای طراحی و کمترین تنش بی‌بعد ممکن

مقدار تنش بی‌بعد	c	β (درجه)	w
0/93	1	45	0/02

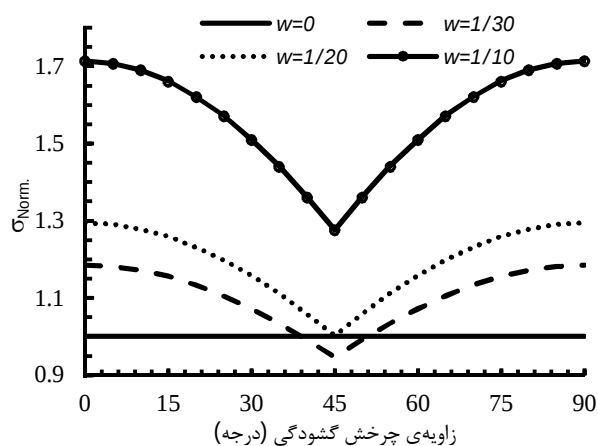
270 باشد؛ باید گشودگی تحت زاویه 45 درجه ایجاد شود تا باعث مقدار تنش کمتری شود و همچنین از ایجاد گشودگی تحت زاویه صفر یا 90 درجه اجتناب گردد. نتیجه جالبی که در این شکل دیده می‌شود، بر خلاف تصور است. همانطور که در این شکل نشان داده شده است؛ در محدوده‌ای از زاویه‌ی چرخش گشودگی، تنش بی‌بعد مطلوب مربوط به گشودگی شبه مستطیلی از تنش بی‌بعد مطلوب ناشی از گشودگی دایره‌ای ($w=0$) کمتر است. با توجه به شکل 12، این محدوده با تغییر w ، تغییر می‌کند. مثلاً این محدوده برای $w=0/03$ برابر 40 تا 50 درجه است. زوایایی که تحت آن‌ها تنش بی‌بعد مطلوب و نامطلوب رخ می‌دهند؛ با تغییر w تغییر نمی‌کند. ولی مقدار این تنش‌های بی‌بعد در w های مختلف، متفاوت است. شکل 11 و جدول 2 گویای این مطلب است.

5-3- تأثیر همزمان متغیرهای طراحی

همانطور که در شکل 12 دیده می‌شود؛ با تغییر w ، در حالتی که مقدار c



شکل 11 تأثیر زاویه چرخش بر مقدار تنش بی‌بعد برای گشودگی شبه مستطیلی و $w=0/05$



شکل 12 تاثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر تنش بی‌بعد بیشینه در w های مختلف و $c=1$

جدول 2 مقادیر تنش بی‌بعد مطلوب و نامطلوب در w های مختلف

w	تنش بی‌بعد مطلوب	تنش بی‌بعد نامطلوب
0/1	1/28	1/71
0/05	1	1/29
0/03	0/95	1/19

7- مراجع

- [18] C. K. Chao, B. Gao, Mixed boundary-value problems of two-dimensional anisotropic thermoelasticity with elliptic boundaries, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 5975-5994, 2001.
- [19] N. Hasebe, C. H. Bucher, R. Heuer, Heat conduction and thermal stress induced by an electric current in an infinite thin plate containing an elliptical hole with an edge crack, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, pp. 138-147, 2010.
- [20] N. Hasebe, C.H. Bucher, R. Heuer, Heat conduction and thermal stress induced by an electric current in an infinite thin plate containing an elliptical hole with an edge crack, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, pp. 138-147, 2010.
- [21] S. Shioya, On the Thermal Stresses of a Semi-Infinite Plate with a Circular Inclusion under Uniform Heat Flow, 1969.
- [22] C.H. Wang, C.K. Chao, On Perturbation Solutions for Nearly Circular Inclusion Problems in Plane Thermoelasticity, Vol. 69, 2002.
- [23] P. C. Vinh, N. Hasebe, X.F. Wang and T. Saito, Interaction between a cracked hole and a line crack under uniform heat flux, *International Journal of Fracture*, Vol. 131, pp. 367-384, 2005.
- [24] N. Hasebe, X. F. Wang, T. Saito, W. Sheng, Interaction between a rigid inclusion and a line crack under uniform heat flux, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 2426-2441, 2007.
- [25] C. Hwu, Thermal Stresses in an Anisotropic Plate Disturbed by an Insulated Elliptic Hole or Crack, *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 57, pp. 916-922, 1990.
- [26] C. K. Chao, and M. H. Shen, On Bonded Circular Inclusions in Plane Thermoelasticity, *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 64, pp. 1000-1004, 1997.
- [27] C. K. Chao, and M. H. Shen, Thermal Stresses in a Generally Anisotropic Body With an Elliptic Inclusion Subject to Uniform Heat Flow, *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 65, pp. 51-58, 1998.
- [28] C.F. Gao, Y.T. Zhao, M.-Z. Wang, An exact and explicit treatment of an elliptic hole problem in thermopiezoelectric media, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 2665-2685, 2002.
- [29] R. Li, G.A. Kardomateas, Thermo-elastic crack branching in general anisotropic media, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 1091-1109, 2005.
- [30] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress Concentration in Metallic Plates with Special Shaped Cutout, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, pp. 96-102, 2010.
- [31] N. Hasebe, K. Tamai, T. Nakamura, Analysis of a Kinked Crack Under Uniform Heat Flow, *ASCE, J. Eng. Mech.*, Vol. 112, pp. 31-42, 1986.
- [32] C.H. Wang, and C.K. Chao, On perturbation solutions for nearly circular inclusion problems in plane thermoelasticity, *J. Appl. Mech.*, Vol. 69, pp. 36-44, 2002.
- [1] A.L. Florence, J.N. Goodier, Thermal stress at spherical cavities and circular holes in uniform heat flow, *J. Appl. Mech.*, Vol. 26, pp. 293-294, 1959.
- [2] N. I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, 4th edition, Noordhoff, the Netherlands, 1963.
- [3] A.L. Florence, J.N. Goodier, Thermal stresses due to disturbance of uniform heat flow by an insulated ovaloid hole, *J. Appl. Mech.*, Vol. 27, pp. 635-639, 1960.
- [4] I. V. Gaivas, Temperature Stresses Due To Disturbance Of Uniform Heat Flow In The Vicinity Of Macro-Inclusions, *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 2, No. 2, pp. 81-90, 1966.
- [5] C.W. Lee, Thermal stresses due to uniform heat flow in thick plates with a circular hole, *Proc. 2nd SMIRT Conf.* Vol. 5, Part L, Berlin, Germany, Sept. 1973.
- [6] M. N. Bapu Rao, Thermal Stresses Around An Elliptic Hole In An Infinite Thick Plate Subjected To A Uniform Heat Flow, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 35, pp. 299-307, 1975.
- [7] Y. Takeuti and N. Sumi, Thermal Stresses In Rectangular Plate With A Circular Hole Based On An Improve Complex Variable Approach, *Mech. Res. Comm.* Vol. 3, pp. 133-138, 1976.
- [8] H. Nisitani, A. Saimoto, H. Noguchi, and D.H. Chert, Method of Analysis of Two-Dimensional Stationary Thermo-elastic Problem by a Body Force Method (1st Report, The Basic Theory), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 57, No. 542, pp. 2561-2567, 1991.
- [9] M. A. Kattis, X. Greece, Thermoelastic plane problems with curvilinear boundaries, *Acta Mechanica*, Vol. 87, pp. 93-103, 1991.
- [10] N. Hasebe, X. Wang, Complex Variable Method for Thermal Stress Problem, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 28, No. 6, pp. 595 - 648, 2005.
- [11] S. K. Bhullar and J. L. Wegner, Thermal stresses in a plate with hyperelliptical hole, *Journal of Engineering and Technology Research* Vol. 1, No. 8, pp. 152-170, November, 2009.
- [12] F. M. Chen, C. K. Chao, Stress analysis of an infinite plate with a coated elliptic hole under a remote uniform heat flow, *J. Therm. Stresses*, Vol. 31, pp. 599-613, 2008.
- [13] S.A. Aseeri, Goursat Functions for a Problem of an Isotropic Plate With a Curvilinear Hole, *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, Vol. 1, No. 3, 2008.
- [14] S. K. Bhullar and J. L. Wegner, Thermal stresses in a plate with hyperelliptical hole, *Journal of Engineering and Technology Research*, Vol. 1, No. 8, pp. 152-170, November, 2009.
- [15] C. Hwu, Plane Anisotropic Thermoelasticity, *J. Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 724-726, 1984.
- [16] C. Hwu, Thermal Stresses in an Anisotropic Plate Disturbed by an Insulated Elliptic Hole or Crack, *J. Appl. Mech.*, Vol. 57, pp. 916-922, 1990.
- [17] K. Yoshikawa, N. Hasebe, Green's function of the displacement boundary value problem for a heat source in an infinite plane with an arbitrary shaped rigid inclusion, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 69, pp. 227- 239, 1999.