مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1397، دوره 18، شماره 01، ص‌ص 51-61

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مدل‌سازی و کنترل وضعیت یک ماهواره به کمک چرخ عکس‌العملی با روش خطی‌سازی پسخورد و بررسی عملکرد آن با معیارهای توان و اولراینت

محمد نوابی[1*]، محمدرضا حسینی[2]

1- دانشیار مهندسی هوافضا، دانشکده فناوریهای نوین، دانشگاه شهید بهشتی

2- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی

* تهران، صندوق پستی 1983969411، m_navabi@sbu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 20 شهریور 1396

پذیرش: 10 آذر 1396

ارائه در سایت: 08 دی 1396

کلید واژگان:

فضاپیما

اولراینت

خطی‌سازی پسخورد

دینامیک صفر

چرخ عکس‌العملی

چکیده

به طور کلی معادلات فضاپیما غیرخطی هستند، بنابراین استفاده از تئوری‌های کنترل غیرخطی کمک می‌کند تا مسأله کنترل وضعیت فضاپیما در شرایط واقعی‌تری بررسی شود. روش خطی‌سازی پسخورد یک روش کنترل غیرخطی است که دینامیک‌های غیرخطی سیستم را به فرم جدیدی تبدیل می‌کند تا بتوان در طراحی ورودی کنترلی سیستم از تئوری‌های کنترل خطی نیز استفاده کرد. تعیین توابع خروجی در خطی‌سازی ورودی-خروجی که حالت خاصی از خطی‌سازی پسخورد است، نقش مهمی بر پایداری دینامیک درونی سیستم دارد. معادلات سینماتیک در این مقاله برحسب کواترنیون‌ها بیان شده که موجب انتخاب این پارامترها به عنوان توابع خروجی می‌شود. همچنین از روش تنظیم‌کننده مربعی خطی که یک کنترل بهینه خطی است، برای طراحی کنترل‌کننده سیستم خطی شده در روش خطی‌سازی پسخورد و طراحی یک کنترل‌کننده وضعیت فضاپیما به صورت مجزا استفاده شده است. روش‌های کنترلی استفاده شده با توجه به محدودیت عملگرها با معیار اولراینت که انتگرال خطای زاویه دوران حول محور اویلر است، مورد ارزیابی عملکرد قرار می‌گیرند، سپس معیارهای توان مصرفی و تلاش کنترلی عملگرها برای مقایسه کنترل‌کننده‌ها در نظر گرفته شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که مقدار اولراینت برای روش خطی‌سازی پسخورد در تمام مانورهای تغییر وضعیت طراحی شده مقدار کمتری است. بررسی معیارهای توان و تلاش کنترلی نیز نشان می‌دهد که روش خطی‌سازی پسخورد نه تنها روش سریع‌تری است، بلکه عملگرها نیز رفتاری بهینه از خود نشان می‌دهند.

Modeling and Spacecraft Attitude Control Using Reaction Wheel with Feedback Linearization, its Performance Study Subject to Power and EULERINT

Mohammad Navabi[1*], Mohammad Reza Hosseini[1]

1- New Technologies Engineering Faculty, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.
* P.O.B. 1983969411 Tehran, Iran, m_navabi@sbu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 11 September 2017
Accepted 01 December 2017
Available Online 29 December 2017

Keywords:
Spacecraft
EULERINT
Feedback linearization
Zero Dynamic
Reaction Wheel

ABSTRACT

The rotational Equations of motion of spacecraft are generally nonlinear, so use of nonlinear control techniques are helpful in real conditions. Feedback linearization theory is a nonlinear control technique which transforms nonlinear system dynamics into a new form that linear control techniques can be applied. Choosing output functions in input-output linearization which is a specific method of feedback linearization, has a significant effect on internal dynamics stability. In this study the kinematic equations of spacecraft motion are expressed by quaternion parameters, these parameters are selected as output functions. Linear quadratic regulator as a linear optimal control law is used to design a controller for linearized system in feedback linearization control and also to design attitude control of spacecraft separately. By considering the actuator constraints on different control methods that are used here, the EULERINT which is the integral of the Euler angles error about the Euler axis, is evaluated. Then, the power and control effort of the actuators are considered for comparison between controllers. The simulation results show that the amount of EULERINT for feedback linearization method is less among the others. Also study of the power and control effort shows that Feedback linearization method is not only quicker but also more efficient and displays better performance of the actuators.

1- مقدمه

کنترل وضعیت فضاپیما به‌خصوص در حضور عملگرها مسأله‌ای مهم در طراحی سیستم‌های فضایی است. بسیاری از تحقیقات صورت گرفته در این حوزه به بررسی انتخاب انواع تئوری‌های کنترلی و مقایسه آن‌ها پرداخته‌اند. از آن‌جا که معادلات سینماتیک و دینامیک وضعیت فضاپیما معادلاتی غیرخطی هستند، برای کنترل در حالت واقعی‌تر باید از روش‌های کنترل غیرخطی استفاده شود [1]. روش‌های خطی با خطی‌سازی‌های بزرگ در حل سیستم‌های غیرخطی پیچیده، کاهش دقت و گاهی ناپایداری را به همراه خواهد داشت که برای کنترل وضعیت فضاپیما با زوایای مانور بزرگ مناسب نخواهد بود [2]. بهره‌گیری از این روش‌های کنترل غیرخطی حتی در مسائل پیچیده‌تر نظیر وجود انواع گشتاور اغتشاشی و نامعینی‌های سیستم، بسیار مفید و کارآمد است. برای مثال کنترل وضعیت فضاپیما در مانورهای زاویه بزرگ با در نظر گرفتن وجود نامعینی‌ها در برخی پارامترهای سیستم موضوعی است که در مرجع [3] مورد مطالعه قرار گرفته است، همچنین

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Navabi, M. R. Hosseini, Modeling and Spacecraft Attitude Control Using Reaction Wheel with Feedback Linearization, its Performance Study Subject to Power and EULERINT, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 01, pp. 51-61, 2018 (in Persian)

روش مد لغزشی برای حل مسأله کنترل وضعیت برای بررسی کنترل وضعیت در حضور عدم قطعیت ماتریس اینرسی در نظر گرفته شده است [4].

یکی از روش‌های طراحی کنترل غیرخطی، خطی‌سازی پسخورد نام دارد. این روش در سال‌های اخیر در زمینه بسیاری از تحقیقات مورد استفاده قرارگرفته است. ایده اصلی این روش مبتنی‌بر تبدیل دینامیک‌های سیستم غیرخطی با استفاده از پسخورد حالت است [5]. در این شرایط می‌توان از روش‌های کنترل خطی استفاده کرد. خطی‌سازی پسخورد به طور موفقت‌آمیزی در حل مسائل کنترل عملی به کار گرفته شده است. برای مثال در مرجع [6] برای تعقیب مسیر حرکت یک بازوی رباتیک و مرجع [7] برای بهبود عملکرد ترمزهای ضد قفل وسایل نقلیه با به‌کارگیری این تئوری کنترلی به نتایج رضایت‌بخشی رسیده‌اند.

این تئوری کنترلی در پژوهش‌های هوافضایی نیز به شکل گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. موضوع مورد مطالعه در مرجع [8] طراحی یک وسیله پرنده جدید با نام اومنی‌کوپتر[1] است. در این مقاله پس از استخراج معادلات غیرخطی از روش ورودی- خروجی خطی‌سازی پسخورد، ورودی مناسبی برای کنترل وضعیت سیستم به دست آمده است. نکته قابل‌توجه در این پژوهش انجام‌شده به کارگیری کواترنیون‌ها برای توصیف وضعیت سیستم است. پارامترهای کواترنیون به دلیل مزایایی که نسبت به زوایای اویلر دارند، به طور متداول در پژوهش‌های هوافضایی مورد استفاده قرار می‌گیرند. تعیین توابع خروجی سیستم مورد مطالعه یکی از مهم‌ترین قسمت‌ها در طراحی خطی‌سازی پسخورد است که در این مقاله کواترنیون‌ها به عنوان توابع خروجی در نظر گرفته شده‌اند.

مرجع [9] مسأله کنترل وضعیت فضاپیمای صلب را بدون در نظر گرفتن عملگرها مورد مطالعه قرار داده و برای به دست آوردن معادلات سینماتیک از پارامترهای کواترنیون و برای طراحی ورودی کنترلی از تئوری خطی‌سازی پسخورد استفاده می‌کند. قابل توجه است که در مقاله یادشده به بررسی پایداری دینامیک درونی و تحلیل دینامیک صفر پرداخته نشده است.

در فضاپیماها برای کنترل وضعیت از عملگرهای متنوعی می‌توان استفاده کرد. مانند مرجع [10] که برای این هدف از عملگرهای دوقطبی مغناطیسی بهره برده است، اما چرخ‌های عکس‌العملی به دلیل دقت بالایی که در اجرای مانورهای تغییر وضعیت دارند از جمله عملگرهای پرکاربرد در کنترل وضعیت فضاپیماهاست. می‌توان این عملگرها را در چیدمان‌های گوناگون آرایش داد. بررسی توان مصرفی، سرعت اجرای مانور و اثر از دست دادن یک عملگر در طول مانور با استفاده از انواع پیکره‌بندی‌های مرسوم چرخ عکس‌العملی از قبیل سه محوره متعامد، هرمی و چهاروجهی موضوعاتی است که محققان بسیاری در این حوزه به مطالعه آن‌ها پرداخته‌اند. براساس [11] یکی از بهترین انتخاب‌ها برای آرایش چرخ‌های عکس‌العملی، چیدمان هرمی با یک ماتریس توزیع همگن است.

همان‌طور که پیشتر اشاره شد می‌توان در خطی‌سازی پسخورد از روش‌های کنترل خطی نیز استفاده کرد. تئوری‌های کنترل بهینه به خصوص تنظیم‌کننده مربعی خطی به دلیل امکان اعمال معیارهایی بهینه برای سیستم مورد نظر در تحقیقات هوافضایی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند. مسائل پیچیده هوافضایی زیادی که از طریق کنترل کلاسیک قابل حل نیستند به کمک تئوری بهینه حل‌شده‌اند [12].

بررسی روش‌های کنترلی گوناگون برای حل یک مسأله و ارزیابی عملکرد آن‌ها با معیارهای متفاوت همواره مورد توجه محققان بوده است. برای مثال در مرجع [13] از سه روش کنترلی متداول برای رسیدن به پاسخ با مشخصات عملکرد مناسب سیستم استفاده شده است که این روش‌ها از نظر تلاش کنترلی مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. مقایسه کنترل مد لغزشی و کنترل بهینه زمانی برای تعیین حداقل زمان نشست در کنترل وضعیت فضاپیما از جمله مطالعات مقایسه‌ای انجام شده در حوزه کنترل فضاپیماست [14].

در مقاله حاضر ابتدا طراحی کنترل‌کننده با استفاده از خطی‌سازی پسخورد انجام شده و اثر انتخاب کواترنیون‌ها بر پایداری دینامیک درونی سیستم مورد مطالعه قرار گرفته است. در طراحی قسمت خطی ورودی کنترلی روش خطی‌سازی پسخورد از روش تنظیم‌کننده مربعی خطی استفاده شده است. یک کنترل‌کننده خطی مجزا نیز با این روش کنترلی برای مسأله کنترل وضعیت فضاپیما به دست آمده است. برای بررسی عملکرد روش‌های کنترلی مورد استفاده چند مانور تغییر وضعیت در نظر گرفته شده و عملکرد کنترل‌کننده‌ها از دو جنبه مورد ارزیابی قرار گرفته است.

نخستین مورد معیار اولراینت[2] است. کمتر بودن اولراینت یک روش کنترلی در مقایسه با روش دیگر مبین بهره‌وری آن از نظر حداقل‌سازی کل مسیر زاویه‌ای طی شده توسط ماهواره است [15].

در مرجع [16] چیدمان عملگرهای سیم‌پیچ مغناطیسی و چرخ عکس‌العملی از نظر توان مصرفی، تلاش کنترلی و حداقل انرژی مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش نیز اثر وجود چیدمان هرمی چرخ‌های عکس‌العملی در پیکره‌بندی فضاپیما لحاظ شده و برای محاسبه گشتاور هر عملگر تبدیل شبه معکوس راست[3] مورد استفاده قرار گرفته است. توجه به حداقل‌سازی تلاش کنترلی علاوه‌بر مسائل هوافضایی در سایر زمینه‌های مرتبط با کنترل نظیر رباتیک نیز مهم بوده و مورد تحقیق و بررسی قرار می‌گیرد [17]. در نتیجه مورد دوم بررسی میزان توان مصرفی و تلاش کنترلی عملگرها با استفاده از دو روش کنترل خطی و غیرخطی بیان شده است.

احتساب عملگر با چیدمانی خاص در فرآیند طراحی ورودی کنترلی خطی‌ساز پسخورد و مطالعه اثر استفاده از روش تنظیم‌کننده مربعی خطی در دو حالت مجزا و به عنوان قسمتی از ورودی کنترل خطی‌ساز پسخورد بر رفتار سیستم و عملکرد عملگرها از طریق معیار اولراینت در کنار توان مصرفی و تلاش کنترلی، وجه تمایز این پژوهش در مقابل مطالعات پیشین است. در این مقاله پایداری دینامیک درونی ایجاد شده در اثر انتخاب پارامترهای کواترنیون به عنوان توابع خروجی سیستم از طریق مفهوم دینامیک صفر مورد بررسی قرار گرفته است. در پایان نیز نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای به کمک نرم‌افزار متلب[4] ارائه شده است.

2- سینماتیک فضاپیما

تغییر وضعیت زاویه‌ای یک فضاپیما می‌تواند به عنوان دوران یک جسم صلب در نظر گرفته شود و در یک دستگاه مختصات مشخص و به کمک زوایای اویلر بیان گردد. دوران زاویه اویلر به عنوان دوران‌های زاویه‌ای متوالی حول سه محور متعامد دستگاه بدنی تعریف می‌شود [15]. بیان دوران‌های وضعیت در قالب زوایای اویلر شامل توابع مثلثاتی می‌شود و امکان به وجود آمدن تکینگی در آن‌ها وجود دارد، می‌توان انتقال‌های معادل، ولی ساده‌تری را

[1] Omnicopter

[2] EULERINT

[3] Right Pseudoinverse Transformation

[4] MATLAB

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.57.4]

برحسب کواترنیون‌ها به دست آورد.

هر انتقال وضعیت در فضا با دوران‌های متوالی حول سه بردار متعامدِ یک سیستم مختصات را می‌توان با یک دوران حول یک بردار ویژه با مقدار ویژه واحد به دست آورد [15]. اگر $e = [e_1\ e_2\ e_3]^{\mathrm{T}}$ به عنوان بردار ویژه و زاویه دوران با α تعریف شود می‌توان عناصر کواترنیون‌ها یا پارامترهای متقارن اویلر را به صورت روابط (1) تعریف کرد.

$$\begin{aligned} q_1 &= e_1\sin(\alpha/2) \\ q_2 &= e_2\sin(\alpha/2) \\ q_3 &= e_3\sin(\alpha/2) \\ q_4 &= \cos(\alpha/2) \end{aligned} \tag{1}$$

پارامترهای کواترنیون شامل یک قسمت اسکالر و یک قسمت برداری و به صورت رابطه (2) می‌شوند.

$$q = q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4 \tag{2}$$

در رابطه (2) q_i اشاره به پارامترهای کواترنیون دارد که q_1, q_2, q_3 مربوط به قسمت برداری و q_4 مؤلفه اسکالر این پارامترهاست. بیان انتقال برحسب زوایای اولر سبب می‌شود تا ماتریس کسینوس هادی انتقال برحسب توابع مثلثاتی باشد که هم حل آن زمان‌بر است و هم احتمال وجود تکینگی در محاسبات دارد. به همین منظور به کمک کواترنیون‌ها انتقال معادلی بیان می‌شود که به طور گسترده در کنترل وضعیت فضاپیماها به کار می‌رود [15]. در ادامه با تعریف بردار Q' به صورت $Q' = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4]^{\mathrm{T}}$، رابطه مشتق زمانی کواترنیون‌ها می‌تواند به صورت تابعی از سرعت زاویه‌ای بدنی مانند رابطه (3) بیان شود [8].

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\Omega Q' \tag{3}$$

مؤلفه‌های $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ به کار رفته در رابطه (3) اشاره به سرعت‌های زاویه‌ای بدنی فضاپیما دارند.

3- دینامیک فضاپیما

براساس معادله معروف ممان اویلر می‌توان معادله دینامیک حرکت دورانی یک فضاپیما با بدنه صلب را به صورت رابطه (4) بیان کرد [15].

$$T = \dot{h} + \omega \times h = I\dot{\omega} + \omega \times I\omega \tag{4}$$

در رابطه قبل T مبین گشتاورهای خارجی وارد بر فضاپیما، h مومنتوم زاویه‌ای فضاپیما و $\dot{h}$ مشتق زمانی آن، I ماتریس ممان اینرسی فضاپیماست و بردار سرعت زاویه‌ای در دستگاه بدنی نیز با $\omega = [\omega_x\ \ \omega_y\ \ \omega_z]^{\mathrm{T}}$ نمایش داده می‌شود.

در صورتی که از وسایل تبادل مومنتوم به عنوان عملگر در فضاپیما استفاده شود، مومنتوم زاویه‌ای کل سیستم بین مومنتوم زاویه‌ای بدنه فضاپیما صلب $h_b = [h_x\ \ h_y\ \ h_z]^{\mathrm{T}}$ و مومنتوم زاویه‌ای عملگر تبادل مومنتوم h_w به صورت رابطه (5) تقسیم می‌شود [15].

$$h = h_b + h_w \tag{5}$$

همان‌طور که بیان شد چرخ‌های عکس‌العملی را می‌توان با چیدمان‌های گوناگون در ساختار فضاپیما به کاربرد. معادله مومنتوم زاویه‌ای عملگرها برحسب نوع چیدمان به صورت رابطه (6) قابل بیان است.

$$h_w = LI_w\omega_w \tag{6}$$

که $I_w = \mathrm{diag}(I_{w1}, I_{w2}, \ldots, I_{wn})$ ماتریس قطری اینرسی چرخ‌های عکس‌العملی، $[L]_{3\times n}$ ماتریس توزیع چرخ‌های عکس‌العملی و بردار $\omega_w = [\omega_{w1}\ \ \omega_{w2} \ldots \omega_{wn}]^{\mathrm{T}}$ سرعت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی را نشان می‌دهد. عبارت n بیان‌گر تعداد چرخ‌های به‌کار رفته در زیرسیستم کنترل است. ماتریس توزیع عملگرها برای چیدمان هرمی در ادامه بیان می‌شود.

چرخ‌های عکس‌العملی براساس انتقال مومنتوم کار می‌کنند و فضاپیما در مقابل این انتقال از خود عکس‌العملی برابر و در خلاف جهت نشان خواهد داد تا مومنتوم زاویه‌ای کل سیستم را در شرایط آرمانی برابر صفر حفظ کند؛ بنابراین نرخ مومنتوم زاویه‌ای تولید شده توسط این عملگر با علامت مخالف به بدنه فضاپیما به صورت رابطه (7) منتقل می‌شود.

$$\dot{h}_w = -T_C \tag{7}$$

بردار $T_C = [T_{cx}\ \ T_{cy}\ \ T_{cz}]^{\mathrm{T}}$ مؤلفه‌های گشتاور کنترلی را روی هر محور بدنی نشان می‌دهد. با جای‌گذاری روابط (7،5) در رابطه (4) می‌توان آن را به صورت رابطه (8) بازنویسی کرد [11].

$$\dot{\omega} = I^{-1}[-\omega \times (I\omega + h_w) + T_C] \tag{8}$$

3-1- ماتریس توزیع چیدمان عملگرها

هر چند استفاده از چیدمان‌هایی با بیش از سه عملگر موجب افزایش وزن و هزینه می‌شوند، اما به دلیل حفظ توانایی کنترل وضعیت در صورت خرابی یک چرخ و اعمال برخی قیدهای بهینگی ترجیح داده می‌شوند. ماتریس توزیع برای هر چیدمان هندسی منحصربه‌فرد است و دارای n ستون مطابق با n عملگر است. در واقع هر بردار ستونی نشان‌دهنده چگونگی پخش گشتاور هر چرخ بر محورهای دوران فضاپیماست. یکی از رایج‌ترین انواع چیدمان که به کرات در پژوهش‌های فضایی از آن استفاده می‌شود چیدمان هرمی است که از چهار چرخ و به شکل یک هرم معکوس مانند شکل 1 بهره می‌برد. همان‌طور که در شکل 1 قابل مشاهده است در ابتدا محور دوران هر چرخ به اندازه زاویه β از صفحه $x_b - y_b$ انحراف دارد، سپس این ساختار برای اثربخشی بیشتر مانند شکل 2 حول محور z_b به‌اندازه زاویه θ دوران داده می‌شود. نحوه پخش گشتاور چرخ‌ها روی محورهای بدنی مانند رابطه (9) بیان می‌گردد [11].

$$\begin{bmatrix} T_{cx} \\ T_{cy} \\ T_{cz} \end{bmatrix} = L_{3\times 4}\begin{bmatrix} T_{w1} \\ T_{w2} \\ T_{w3} \\ T_{w4} \end{bmatrix} \tag{9}$$

در رابطه (9) T_{wi} اشاره به سهم هر عملگر از گشتاورهای فرمانی دارد. با فرض مقادیر زاویه‌ای $\beta = 35.264°$ و $\theta = 45°$ برای چیدمان هرمی، ماتریس توزیع برابر مقدار رابطه (10) خواهد بود.

$$\begin{aligned} L &= \\ &\begin{bmatrix} \cos\beta\cos\theta & -\cos\beta\sin\theta & -\cos\beta\cos\theta & \cos\beta\sin\theta \\ \cos\beta\sin\theta & \cos\beta\cos\theta & -\cos\beta\sin\theta & -\cos\beta\cos\theta \\ \sin\beta & \sin\beta & \sin\beta & \sin\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

همان‌طور که از شکل ماتریس توزیع (10) مشخص است، این ماتریس به دلیل غیرمربعی بودن معکوس‌پذیر نیست، یعنی در این حالت نمی‌توان از آن برای محاسبه سهم گشتاور هر عملگر از گشتاورهای فرمانی صادره از قانون کنترلی استفاده کرد. به منظور محاسبه بردار گشتاور عملگرها می‌توان از تبدیل شبه معکوس راست براساس مرجع [15] استفاده کرد. معکوس

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.57.4]

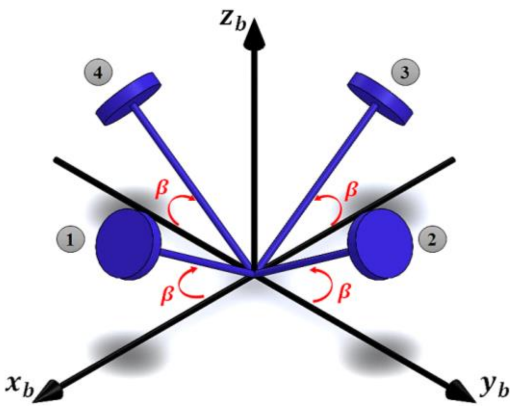

Fig. 1 The pyramid configuration of four reaction wheels

شکل 1 چیدمان هرمی چهار چرخ عکس‌العملی

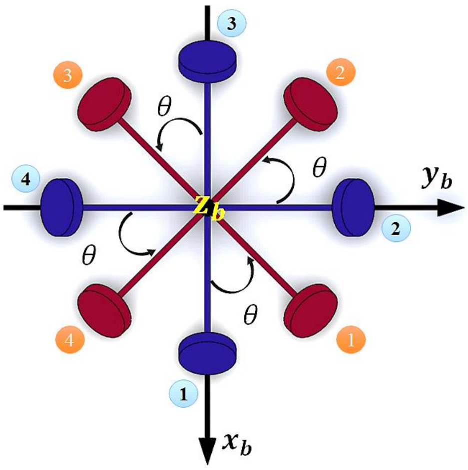

Fig. 2 Rotation of configuration around z_b

شکل 2 دوران چیدمان حول محور z_b

ماتریس توزیع از رابطه (11) به دست می‌آید.

$$[L^{-1}] = [L]^{\mathrm{T}}\{[L] \quad [L]^{\mathrm{T}}\}^{-1} \tag{11}$$

در نتیجه مقدار گشتاور هر چرخ برابر با رابطه (12) است.

$$\begin{bmatrix} T_{w1} \\ T_{w2} \\ T_{w3} \\ T_{w4} \end{bmatrix} = \frac{3}{4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{cx} \\ T_{cy} \\ T_{cz} \end{bmatrix} \tag{12}$$

4- اولراینت

برای مقایسه قوانین کنترل می‌توان از برخی متغیرهای مشترک بهره برد. زوایای اویلر طبیعی‌ترین متغیر فیزیکی هستند که جهت مقایسه کنترل وضعیت ماهواره می‌توان استفاده کرد. محاسبه زاویه خطای α در رابطه (13) حول محور دوران اویلر معیاری از کیفیت قوانین کنترل است، زیرا این مؤلفه مبین مسیر زاویه‌ای کلی است که ماهواره در مدت مانور طی می‌کند [15].

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}(\mathrm{trace}[A_E] - 1)\right) \tag{13}$$

در رابطه قبل ماتریس A_E بیانگر ماتریس خطای کسینوس هادی است. انتگرال این زاویه با نام اولراینت به عنوان یک معیار مشخص برای سنجش قوانین کنترل وضعیت مختلف است [15]. کمتر بودن مقدار اولراینت مبین بهره‌وری بیشتر روش کنترلی مورد استفاده از نظر حداقل‌سازی کل مسیر زاویه‌ای طی شده توسط فضاپیما و در نتیجه قوت کنترل‌کننده مورد استفاده است. به عبارت‌دیگر کمتر بودن اولراینت به معنای سریع‌تر بودن روش کنترلی به صورت رابطه (14) است.

$$\mathrm{EULERINT} = \int \alpha dt \tag{14}$$

5- تئوری کنترل خطی‌سازی پسخورد[1]

یکی از تئوری‌های مرسوم در کنترل غیرخطی روش خطی‌سازی پسخورد نام دارد. ایده اصلی این روش تبدیل دینامیک‌های سیستم غیرخطی (کلی یا جزئی) به خطی است و این کار به گونه‌ای صورت می‌گیرد که می‌توان از روش‌های کنترل خطی در طراحی استفاده کرد [5]. در استفاده از این روش دو راه‌کار کلی وجود دارد. مورد اول خطی‌سازی ورودی- حالت و مورد دوم خطی‌سازی ورودی- خروجی است که با نام (خروجی- حالت) نیز شناخته می‌شود.

تفاوت اصلی خطی‌سازی ورودی- خروجی با ورودی- حالت در این است که در مورد اول قانون کنترلی باید بتواند یک خروجی را تعقیب نماید و یا به مقدار معینی برساند. هدف اصلی در خطی‌سازی پسخورد ورودی- خروجی یافتن یک ورودی کنترلی به شکلی است که با اعمال آن به سیستم غیرخطی حذف دینامیک‌های غیرخطی‌ها صورت گرفته و در نهایت خروجی به مقدار مورد نظر برسد. خروجی‌های سیستم که باید توسط کنترل‌کننده تعقیب شوند به طور مستقیم به ورودی‌های کنترلی وابسته نیستند. مشتق‌گیری از مؤلفه‌های خروجی تا ظاهر شدن ورودی برای اولین مرتبه روشی است که می‌توان با استفاده از آن یک رابطه ساده میان ورودی و خروجی سیستم ایجاد کرد [5].

چنان‌چه برای ایجاد یک رابطه صریح بین خروجی y و ورودی u لازم باشد از خروجی یک سیستم r مرتبه مشتق گرفته شود، گفته می‌شود که سیستم مرتبه نسبی r دارد؛ بنابراین هرکدام از مؤلفه‌های خروجی تا زمانی که یک مؤلفه ورودی کنترلی در معادلات ظاهر شود باید به تعداد کافی مشتق‌پذیر باشند.

با به کار بردن مشتق لی[2] که در ادامه بیان می‌شود، روش خطی‌سازی پسخورد ورودی-خروجی می‌تواند سیستم غیرخطی را به یک سیستم خطی تبدیل کند، سپس می‌توان یک قانون کنترل خطی را برای سیستم خطی شده به کار برد. بلوک دیاگرام این روش کنترلی در شکل 3 نشان داده شده است.

با تعریف متغیرهای حالت به صورت $x = [q_1\, q_2\, q_3\, q_4\, \omega_x\, \omega_y\, \omega_z]^{\mathrm{T}}$ و با در نظر گرفتن روابط (8,3) می‌توان سیستم غیرخطی را به صورت روابط (16,15) نشان داد [8]. در این روابط $u = [T_{cx}\, T_{cy}\, T_{cz}]^{\mathrm{T}}$ بردار ورودی‌های سیستم و $y = [h_1(x)\;\; h_2(x)\;\; h_3(x)]^{\mathrm{T}} = [q_1\, q_2\, q_3]^{\mathrm{T}}$ به عنوان بردار خروجی انتخاب‌شده است. از آن‌جا که یکی از مهم‌ترین خواص کواترنیون‌ها رابطه $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$ است، می‌توان متغیر حالت q_4 را مستقیم از روابط (16,15) محاسبه کرد.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{15}$$

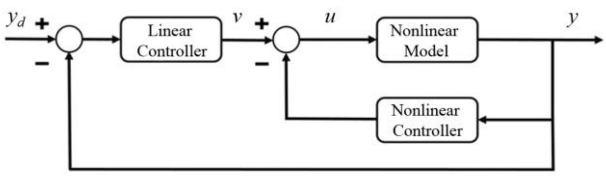

Fig. 3 Block diagram of input-output linearization method

شکل 3 بلوک دیاگرام روش خطی‌سازی ورودی- خروجی

[1] Feedback Linearization Control (FLC)
[2] Lie

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.57.4]

$$y = h(x) \tag{16}$$

اگر تعداد متغیرهای حالت n و تعداد ورودی‌های سیستم m باشد، f و h میدان‌های برداری هموار و g یک ماتریس $n\times m$ است که ستون‌های g_i آن میدان‌های برداری هموار هستند [5]. مؤلفه‌های بردار ورودی سیستم با u_i و مؤلفه‌های بردار خروجی سیستم با y_i نمایش داده می‌شوند که در این مقاله $i = 1,2,3$ است. با توجه به معادلات دینامیک و سینماتیک سیستم و رابطه (15)، مقادیر ماتریس‌های $f(x)$ و $g(x)$ به صورت روابط (18,17) قابل محاسبه هستند.

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Omega Q' \\ I^{-1}[-\omega \times (I\omega + h_w)] \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$g(x) = [g_1(x) \quad g_2(x) \quad g_3(x)] = \begin{bmatrix} 0_{4\times3} \\ I^{-1} \end{bmatrix} \tag{18}$$

در این تئوری کنترلی تعیین توابع خروجی از متغیرهای حالت سیستم دارای اثر مستقیمی بر ایجاد دینامیک درونی و پایداری آن است. با مشتق‌گیری متوالی از $h_1(x), h_2(x), h_3(x)$ تا ظاهر شدن ورودی کنترلی برای اولین بار مشخص می‌شود که هر خروجی نیاز به دو مرتبه مشتق‌گیری دارد. بردار مرتبه نسبی سیستم غیرخطی با توجه به بردار متغیر حالت در نظر گرفته شده برابر با $[r_1\ r_2\ r_3]^{\mathrm{T}} = [2\ 2\ 2]^{\mathrm{T}}$ و مرتبه نسبی کل برابر مجموع مرتبه‌های نسبی و مساوی 6 خواهد بود. این در حالی است سیستم اصلی دارای مرتبه 7 است و طبق [18] تفاوت مرتبه نسبی کل با ابعاد سیستم اصلی به معنی وجود دینامیک درونی است که باید به کمک مفهوم دینامیک صفر مورد بررسی قرارگیرد. معنی این اختلاف این است که قسمتی از دینامیک سیستم در کنترل‌کننده دیده نمی‌شود.

5-1- طراحی ورودی کنترلی

با مشتق‌گیری متوالی از توابع خروجی سیستم که با رابطه (16) نشان داده شده‌اند تا ظاهر شدن u برای اولین مرتبه می‌توان معادلات مشتقات توابع خروجی که در آن‌ها ورودی کنترلی نمایان شده است را به صورت رابطه (19) استخراج کرد [8].

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ y_3^{(r_3)} \end{bmatrix} = D(x) + E(x)u \tag{19}$$

در رابطه (19) $y_i^{(r_i)}$ اشاره به مشتق مرتبه r مؤلفه‌های خروجی سیستم دارد و r_i معرف مرتبه نسبی متناسب با خروجی y_i است. ماتریس‌های $D(x)$ و $E(x)$ به صورت روابط (21,20) محاسبه می‌شوند [8].

$$D(x) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ L_f^{r_2} h_2(x) \\ L_f^{r_3} h_3(x) \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} L_{g1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g3} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g1} L_f^{r_3-1} h_3(x) & \cdots & L_{g3} L_f^{r_3-1} h_3(x) \end{bmatrix} \tag{21}$$

ماتریس $E(x)$ یک ماتریس $m\times m$ است و برای محاسبه درایه‌های این ماتریس‌ها از تعاریف مشتقات لی به صورت روابط (24-22) استفاده می‌شود [5].

$$L_f h_i(x) = \sum_{j=1}^{7} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} f(x), \tag{22}$$

$$L_f^{r_i} h_i(x) = L_f(L_f^{r_i-1} h_i(x)) = \sum_{j=1}^{7} \frac{\partial L_f^{r_i-1} h_i}{\partial x_i} f(x), \tag{23}$$

$$L_{gi} L_f^{r_i-1} h_i(x) = \sum_{j=1}^{7} \frac{\partial L_f^{r_i-1} h_i}{\partial x_i} g_i(x), i = 1,2,3. \tag{24}$$

در نتیجه با توجه به رابطه (20) برای سیستم مورد مطالعه مقدار ماتریس $D(x)$ برابر با رابطه (25) است.

$$D(x) = L_f^2 h(x) = \frac{\partial}{\partial x}\{L_f^1 h(x)\} f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\omega_z \dot{q}_2}{2} - \frac{\omega_y \dot{q}_3}{2} + \frac{\omega_x \dot{q}_4}{2} + \frac{q_4 \dot{\omega}_x}{2} - \frac{q_3 \dot{\omega}_y}{2} + \frac{q_2 \dot{\omega}_z}{2} \\ \frac{-\omega_z \dot{q}_1}{2} + \frac{\omega_x \dot{q}_3}{2} + \frac{\omega_y \dot{q}_4}{2} + \frac{q_3 \dot{\omega}_x}{2} + \frac{q_4 \dot{\omega}_y}{2} - \frac{q_1 \dot{\omega}_z}{2} \\ \frac{\omega_y \dot{q}_1}{2} - \frac{\omega_x \dot{q}_2}{2} + \frac{\omega_z \dot{q}_4}{2} - \frac{q_2 \dot{\omega}_x}{2} + \frac{q_1 \dot{\omega}_y}{2} + \frac{q_4 \dot{\omega}_z}{2} \end{bmatrix} \tag{25}$$

و با استفاده از رابطه (21) مقدار ماتریس $E(x)$ نیز به صورت رابطه (26) محاسبه می‌شود.

$$E(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{q_4}{I_{xx}} & \frac{-q_3}{I_{yy}} & \frac{q_4}{I_{zz}} \\ \frac{q_3}{I_{xx}} & \frac{q_4}{I_{yy}} & \frac{-q_1}{I_{zz}} \\ \frac{-q_2}{I_{xx}} & \frac{q_1}{I_{yy}} & \frac{q_4}{I_{zz}} \end{bmatrix} \tag{26}$$

با توجه به مرجع [5] برای دستگاه روابط (19) رابطه $y_i^{(r_i)} = v_i$ تعریف می‌شود که v_i بردار ورودی جدیدی است که تنها بر خروجی y_i اثر می‌گذارد و کامل‌کننده رابطه ورودی اصلی u برای اعمال به سیستم غیرخطی است. در نتیجه اثر ورودی u بر سیستم، حذف غیرخطی‌ها و کنترل خروجی سیستم از طریق v_i خواهد بود. پس روابط (19) به صورت رابطه (27) نشان داده می‌شوند [5].

$$v_i = D(x) + E(x)u \tag{27}$$

می‌توان رابطه (27) را برحسب ورودی کنترلی اصلی یعنی بردار u، به صورت رابطه (28) بازنویسی کرد [5].

$$u = E^{-1}(x)(v_i - D(x)) \tag{28}$$

خطی‌سازی پسخورد تنها در صورتی امکان‌پذیر است که اگر و تنها اگر ماتریس $E(x)$ ناتکین باشد، بدین معنی که $\det(E(x)) \neq 0$ باشد. به عبارت دیگر به منظور قرار دادن u در سمت چپ معادلات و با توجه به رابطه (28) باید ماتریس $E(x)$ معکوس‌پذیر باشد. پس با توجه به رابطه (26)، رابطه (29) را به صورت زیر داریم.

$$\det(E(x)) = \frac{q_4(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)}{8 I_{xx} I_{yy} I_{zz}} = \frac{q_4}{8 I_{xx} I_{yy} I_{zz}} \tag{29}$$

زمانی که $q_4 \neq 0$ باشد، ماتریس $E(x)$ ناتکین و مسأله خطی‌سازی ورودی-خروجی برای سیستم غیرخطی قابل حل است.

با استفاده از روش خطی‌سازی پسخوراند سیستم (15) به یک سیستم در مختصات مناسب که در حالت ورودی- خروجی خطی شده و نیز کنترل‌پذیر است، تبدیل می‌شود. با تعریف مختصات تغییر یافته به صورت $\xi = \Phi(x)$، به صورت رابطه (30) تعریف می‌شود [8].

$$\begin{aligned} \xi_1 &= h_1(x) = q_1 & \xi_4 &= L_f h_1(x) = \dot{q}_1 \\ \xi_2 &= h_2(x) = q_2 & \xi_5 &= L_f h_2(x) = \dot{q}_2 \\ \xi_3 &= h_3(x) = q_3 & \xi_6 &= L_f h_3(x) = \dot{q}_3 \end{aligned} \tag{30}$$

در مختصات جدید سیستم به صورت رابطه (31) ارائه می‌گردد.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + Bv \\ y &= C\xi \end{aligned} \tag{31}$$

در روابط (31,30)، $\xi = [\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4\ \xi_5\ \xi_6]^{\mathrm{T}}$ ماتریس متغیرهای حالت جدید است و A و B به ترتیب معرف ماتریس‌های وزنی متغیرهای سیستم و

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.57.4]

ورودی‌های کنترلی هستند. مقدار ماتریس‌های وزنی برابر با رابطه (32) است.

$$A=\begin{bmatrix}0_{3\times3} & I_{3\times3}\\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3}\end{bmatrix}$$
$$B=\begin{bmatrix}0_{3\times3}\\ I_{3\times3}\end{bmatrix}$$
$$C=\begin{bmatrix}I_{3\times3} & 0_{3\times3}\end{bmatrix} \qquad (32)$$

اکنون برای سیستم خطی (31) به کمک قوانین کنترل خطی می‌توان یک ورودی کنترلی v طراحی کرد. برای این سیستم خطی ورودی کنترلی خطای وضعیت زیر را در نظر می‌گیریم که در آن K_1 و K_2 ماتریس‌های ضرایب ثابت و مثبت هستند و q_i^d اشاره به مؤلفه‌های کواترنیون مطلوب یا نهایی دارد. در رابطه (33) قسمت $q_i-q_i^d$ خطای وضعیت است که مشتق آن به صورت $\dot{q}_i-\dot{q}_i^d$ به دست می‌آید.

با توجه به این‌که در این مقاله وضعیت نهایی فضاپیما یک وضعیت ثابت بوده و $q_i^d=\text{cte}$ است، پس مشتق زمانی q_i^d صفر خواهد بود، یعنی $\dot{q}_i^d=0$ است. در نتیجه قسمت نرخ خطای وضعیت تنها با $\dot{q}_i$ نشان داده می‌شود. برای تعیین ماتریس ضرایب K_1 و K_2 از تئوری کنترل بهینه و روش تنظیم‌کننده مربعی خطی به صورت رابطه (33) استفاده شده است.

$$v_i=-K_1\left(q_i-q_i^d\right)-K_2\dot{q}_i \qquad (33)$$

5- 2- بررسی پایداری سیستم خطی حلقه بسته

در این قسمت پایداری سیستم خطی رابطه (31) با ورودی کنترلی رابطه (33) مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ابتدا برای هر تابع خروجی $h_i(x)$ رابطه (34) را به صورت زیر داریم.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{bmatrix}h_i(x)\\ L_f h_i(x)\end{bmatrix}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{bmatrix}\xi_1^i\\ \xi_2^i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1^i\\ \xi_2^i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}v_i \qquad (34)$$

در رابطه (34) متغیرهای ξ_1^i و ξ_2^i به صورت (35) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned}\xi_1^1&=h_1(x)=q_1 & \xi_2^1&=L_f h_1(x)=\dot{q}_1\\ \xi_1^2&=h_2(x)=q_2 & \xi_2^2&=L_f h_2(x)=\dot{q}_2\\ \xi_1^3&=h_3(x)=q_3 & \xi_2^3&=L_f h_3(x)=\dot{q}_3\end{aligned} \qquad (35)$$

سپس خطاهای تعقیب رابطه (36) تعریف شده‌اند.

$$e_{\alpha_i}=\alpha_i-\alpha_i^d \qquad e_{\beta_i}=\beta_i-\beta_i^d \qquad (36)$$

نمادهای $\alpha_i,\alpha_i^d,\beta_i,\beta_i^d$ به صورت رابطه (37) تعریف شده و بالانویس d اشاره به مقادیر مطلوب یا فرمانی دارد.

$$\begin{aligned}\xi_1^i&=\alpha_i=q_i & \xi_2^i&=\beta_i=\dot{q}_i\\ \alpha_i^d&=q_i^d & \beta_i^d&=\dot{q}_i^d\end{aligned} \qquad (37)$$

همان‌طور که پیشتر نیز بیان شد مقادیر مطلوب ثابت هستند یعنی $q_i^d=\text{cte}$ و مشتق زمانی آن‌ها صفر است، پس رابطه (38) را به صورت زیر داریم.

$$\begin{aligned}\beta_i^d&=\dot{q}_i^d=0\\ \dot{\alpha}_i^d&=\dot{q}_i^d=0\\ e_{\beta_i}&=\beta_i\end{aligned} \qquad (38)$$

با مشتق‌گیری از روابط خطای تعقیب تعریف شده روابط (39) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\alpha_i}&=\dot{\alpha}_i-\dot{\alpha}_i^d=\dot{\alpha}_i\\ \dot{e}_{\beta_i}&=\dot{\beta}_i-\dot{\beta}_i^d=\dot{\beta}_i\end{aligned} \qquad (39)$$

با استفاده از تعاریف رابطه (37)، رابطه (34) به صورت رابطه (40) بازنویسی می‌شود.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}v_i \qquad (40)$$

ورودی کنترلی رابطه (33) نیز به فرم ماتریسی (41) نشان داده است.

$$\begin{aligned}v_i&=-K_1\left(\alpha_i-\alpha_i^d\right)-K_2\beta_i\\ v_i&=-\begin{bmatrix}K_1&K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{bmatrix}+K_1\alpha_i^d\end{aligned} \qquad (41)$$

با قرار دادن رابطه (41) در رابطه (40) رابطه (42) را داریم.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_1&K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{bmatrix}+K_1\alpha_i^d\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0&1\\-K_1&-K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\K_1\end{bmatrix}\alpha_i^d\end{aligned} \qquad (42)$$

با در نظر گرفتن روابط (38,37) معادلات حالت خطا به صورت رابطه (43) حاصل می‌شوند.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{bmatrix}e_{\alpha_i}\\ e_{\beta_i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-K_1&-K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{\alpha_i}+\alpha_i^d\\ e_{\beta_i}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\K_1\end{bmatrix}\alpha_i^d \qquad (43)$$

در نتیجه دینامیک حلقه بسته به صورت رابطه (44) ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{bmatrix}e_{\alpha_i}\\ e_{\beta_i}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}0&1\\-K_1&-K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{\alpha_i}\\ e_{\beta_i}\end{bmatrix}\\ e_{q_i}&=q_i-q_i^d\\ e_{\dot{q}_i}&=\dot{q}_i\end{aligned} \qquad (44)$$

در پژوهش‌های هوافضایی نظیر مرجع [19] بررسی پایداری به کمک تئوری لیاپانوف بسیار مرسوم است. در این مقاله نیز برای اثبات پایداری این سیستم خطی حلقه بسته، لم زیر مورد استفاده قرار گرفته است. این لم از طریق بیان توابع لیاپانوف برای سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان در مرجع [5] اثبات شده است. برای بیان این لم در ابتدا فرض می‌شود که سیستم خطی $\dot{x}=A_cx$ مفروض است. تابع لیاپانوف مربعی انتخابی رابطه (45) پیشنهاد می‌شود [5].

$$V=x^{\mathrm{T}}Px \qquad (45)$$

که در آن P ماتریس معین مثبت متقارن مفروض است. با مشتق‌گیری از تابع معین مثبت V، فرم مربعی دیگری به صوت رابطه (46) به دست می‌آید [5].

$$\dot{V}=\dot{x}^TPx+x^TP\dot{x}=-x^{\mathrm{T}}Qx \qquad (46)$$

که در آن رابطه (47) را داریم [5].

$$A_c^{\mathrm{T}}P+PA_c=-Q \qquad (47)$$

لم: شرط لازم و کافی برای این‌که یک سیستم خطی نامتغیر با زمان مانند $\dot{x}=A_cx$ کاملاً پایدار باشد این است که برای هر ماتریس معین مثبت متقارن Q، پاسخ واحد ماتریس P از معادله لیاپانوف (47)، معین مثبت متقارن باشد [5].

در این مقاله A_c، ماتریس سیستم حلقه بسته است. پس اگر با انتخاب یک Q معین مثبت فرضی و حل رابطه (47)، ماتریس P به‌دست‌آمده معین باشد، آن‌گاه V یک تابع لیاپانوف سیستم خطی است و پایداری مجانبی و کلی را تضمین می‌کند [5].

با در نظر گرفتن ضرایب K_1 و K_2 به صورت مقادیر K (0.2535, 0.0316) و با توجه به رابطه (44) می‌توان رابطه (48) را به صورت زیر نوشت.

$$A_c=\begin{bmatrix}0&1\\-K_1&-K_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-0.0316&-0.2535\end{bmatrix} \qquad (48)$$

با انتخاب Q به صورت رابطه (49) است.

$$Q=I_{2\times2} \qquad (49)$$

و حل رابطه (47)، ماتریس P به صورت رابطه (50) حاصل می‌شود.

$$P=\begin{bmatrix}68.4008&-0.5\\-0.5&2.0347\end{bmatrix} \qquad (50)$$

اکنون با محاسبه مقادیر ویژه ماتریس P برابر با 2.0309 و 68.4045 و با توجه به مثبت بودن هر دو مقدار اثبات می‌شود که این ماتریس معین مثبت متقارن است. با توجه به این‌که ضرایب K_1 و K_2 برای هر سه ورودی کنترلی v_i یکسان هستند و ماتریس A_c نیز برای هر تابع خروجی $h_i(x)$ با فرآیندی مشابه استخراج می‌شود، و مثبت معین بودن ماتریس P می‌توان بیان کرد که سیستم خطی حلقه بسته با ضرایب ورودی کنترلی انتخاب شده داری

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.57.4]

پایداری مجانبی و کلی است.

5-3- تحلیل دینامیک صفر

همان‌طور که بیان شد اختلاف مرتبه سیستم اصلی که دارای هفت متغیر حالت بوده (در زمان بیان سینماتیک برحسب کواترنیون) با مرتبه نسبی کل برابر مجموع مرتبه‌های نسبی، برابر یک است که اشاره به وجود یک دینامیک درونی دارد. باید توجه کرد که متغیر حالت q_4 به خروجی y متصل و مرتبط نیست. به‌عبارت‌دیگر کنترل خطی‌سازی پسخورد، q_4 را از خروجی غیرقابل مشاهده کرده است. باید مطمئن شد که متغیر q_4 به‌خوبی رفتار می‌کند. این همان دینامیک درونی مطرح شده است که باید رفتار آن برای طراحی قانون کنترل مورد بررسی قرار گیرد.

پایداری این دینامیک درونی با به کار بردن مفهوم دینامیک صفر به صورت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور η به عنوان متغیر دینامیک صفر در نظر گرفته می‌شود که باید دو نیازمندی مهم زیر را ارضا کند [8]:

1- باید رابطه $(\partial\eta/\partial x)\ g(x)=0$ برقرار باشد. با توجه به این‌که q_4 دینامیک درونی است پس متغیر دینامیک صفر به صورت $\eta=q_4$ انتخاب می‌شود؛ بنابراین باید از متغیر دینامیک صفر انتخابی نسبت به بردار متغیرهای حالت نمایش داده شده با $x=[q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ \omega_x\ \omega_y\ \omega_z]^{\mathrm{T}}$ مشتق گرفته شود و بردار حاصل شده در ماتریس $g(x)$ که دارای مقداری برابر با رابطه (18) است، ضرب شود (به صورت رابطه (51) است).

درنتیجه طبق (51) اولین نیازمندی مورد نظر ارضا می‌شود.

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}g(x)=[0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]\begin{bmatrix}0_{4\times3}\\ I^{-1}\end{bmatrix}=0 \tag{51}$$

2- تبدیل $z=T(x)=[\eta;\xi]$ یک نگاشت همواریختی[1] باشد. به منظور اطمینان از این‌که $z=T(x)=[\eta;\xi]$ یک همواریختی است باید ماتریس ژاکوبین z ایجاد شود و دترمینان آن به صورت روابط (52-54) تعیین گردد [8].

$$J(z)=\frac{\partial z}{\partial x}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} & 0_{4\times3}\\ \Lambda(\omega) & \Gamma(Q)\end{bmatrix} \tag{52}$$

$$\Lambda(\omega)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&\omega_z&-\omega_y&\omega_x\\-\omega_z&0&\omega_x&\omega_y\\\omega_y&-\omega_x&0&\omega_z\end{bmatrix} \tag{53}$$

$$\Gamma(Q)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}q_4&-q_3&q_2\\q_3&q_4&-q_1\\-q_2&q_1&q_4\end{bmatrix} \tag{54}$$

و درنتیجه رابطه (55) را داریم.

$$\det\big(J(x)\big)=\frac{-q_4}{8}(q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2)=\frac{-q_4}{8} \tag{55}$$

زمانی که $q_4\neq 0$ باشد، ماتریس ژاکوبین ناتکین است و دینامیک صفر هر دو نیازمندی را ارضا می‌کند، پس سیستم در این حالت پایدار خواهد بود.

6- تنظیم‌کننده مربعی خطی[2]

این کنترل‌کننده یک روش کنترل بهینه است که بهترین عملکرد ممکن را با توجه به برخی شاخص‌های عملکرد فراهم می‌کند. مسأله طراحی این کنترل‌کننده در واقع مسأله طراحی یک پسخورد حالت کنترلی مانند K است که تابع هدف خاصی مانند J را به حداقل مقدار برساند. در این روش یک ماتریس بهره پسخورد طراحی می‌شود که تابع معیاری را به منظور دست‌یابی به بعضی روابط میان تلاش کنترلی، مقدار و سرعت پاسخ یک سیستم پایدار حداقل می‌کند [20]. برای یک سیستم خطی زمان پیوسته که به شکل رابطه (31) بیان می‌شود، تابع معیار (56) را در نظر می‌گیریم [12].

$$J=\int_0^\infty (x^TQx+u^TRu)dt \tag{56}$$

Q و R ماتریس‌های وزنی، Q ماتریس متقارن مثبت معین یا مثبت نیمه‌معین و R ماتریس متقارن و مثبت معین است. برای راحتی در طراحی ماتریس‌های Q و R را در عمل می‌توان به صورت قطری در نظر گرفت. قانون کنترل پسخوردی که مقدار تابع معیار را حداقل می‌کند به صورت رابطه (57) تعریف می‌گردد [12].

$$u_{LQR}=-Kx \tag{57}$$

که مقدار K به صورت رابطه (58) محاسبه می‌شود [12].

$$K=R^{-1}B^{\mathrm{T}}P \tag{58}$$

و P با حل معادله زمان پیوسته جبری ریکاتی رابطه (59) حاصل می‌شود [12].

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+Q-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P=0 \tag{59}$$

6-1- طراحی ورودی کنترلی تنظیم‌کننده مربعی خطی

در این حالت گشتاور ورودی کنترلی سیستم، مبتنی بر کنترل‌کننده تناسبی-مشتقی با پسخورد کواترنیون در نظر گرفته شده است که ماتریس بهره‌های آن توسط الگوریتم تنظیم‌کننده مربعی خطی تعیین می‌شود. مقدار این گشتاور ورودی کنترلی از رابطه (60) به دست می‌آید [15].

$$\begin{aligned}T_{cx}&=2K_xq_{E1}q_{E4}-K_{xd}\omega_x\\T_{cy}&=2K_yq_{E2}q_{E4}-K_{yd}\omega_y\\T_{cz}&=2K_zq_{E3}q_{E4}-K_{zd}\omega_z\end{aligned} \tag{60}$$

در رابطه (60) مؤلفه‌های ماتریس $q_E=[q_{E1}\quad q_{E2}\quad q_{E3}\quad q_{E4}]^{\mathrm{T}}$ درایه‌های ماتریس خطای وضعیت برحسب کواترنیون‌ها هستند. این ماتریس به صورت رابطه (61) محاسبه می‌شود.

$$\begin{bmatrix}q_{E1}\\q_{E2}\\q_{E3}\\q_{E4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_{T4}&q_{T3}&-q_{T2}&q_{T1}\\-q_{T3}&q_{T4}&q_{T1}&q_{T2}\\q_{T2}&-q_{T1}&q_{T4}&q_{T3}\\-q_{T1}&-q_{T2}&-q_{T3}&q_{T4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-q_{S1}\\-q_{S2}\\-q_{S3}\\q_{S4}\end{bmatrix} \tag{61}$$

با توجه به رابطه (60)، $T_C=[T_{cx}\quad T_{cy}\quad T_{cz}]^{\mathrm{T}}$ بردار گشتاورهای فرمانی است و بهره‌های کنترلی تناسبی و مشتقی به ترتیب با $K_{x,y,z}$ و $K_{xd,yd,zd}$ نشان داده‌شده‌اند. سیستم غیرخطی به منظور اعمال این الگوریتم بهینه باید خطی‌سازی شود. ساختار روابط (63,62) فرم استاندارد فضای حالت یک سیستم خطی را نشان می‌دهد [11].

$$\dot{x}(t)=f(x,u,t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{62}$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t) \tag{63}$$

برای خطی‌سازی معادلات فرض زیر را براساس این ویژگی که پارامتر q_4 به سادگی از معادله $q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2+q_4{}^2=1$ قابل محاسبه است به صورت رابطه (64) در نظر می‌گیریم.

$$f(q)=q_4=\sqrt{1-(q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2)} \tag{64}$$

حال می‌توانیم ماتریس کواترنیون را به صورت رابطه (65) تعریف کنیم [21].

$$Q''=\begin{bmatrix}f(q)&-q_3&q_2\\q_3&f(q)&-q_1\\-q_2&q_1&f(q)\end{bmatrix} \tag{65}$$

با این فرض نگاشت یک‌به‌یکی میان ω و $\dot{q}$ به صورت رابطه (66) به وجود می‌آید.

$$\omega=2{Q''}^{-1}\dot{q} \tag{66}$$

[1] Diffeomorphism
[2] Linear Quadratic Regulator

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.57.4]

پس بنابراین رابطه (67) را داریم.

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} f(q) & -q_3 & q_2\\ q_3 & f(q) & -q_1\\ -q_2 & q_1 & f(q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = \frac{1}{2}Q''\omega = g(q_1,q_2,q_3,\omega) \quad (67)$$

در این قسمت $x = (\omega_x, \omega_y, \omega_z, q_1, q_2, q_3)$ بردار متغیرهای حالت سیستم و $u = [T_{cx}\quad T_{cy}\quad T_{cz}]^{\mathrm{T}}$ بردار ورودی‌های کنترلی است. ماتریس‌های وزنی برای خطی‌سازی سیستم به صورت رابطه (68) محاسبه می‌شوند [11].

$$A = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n}\end{bmatrix} \quad (68)$$

سیستم می‌تواند در $q = [0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$ و $\omega = [0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$ به شکل روابط (74-69) خطی‌سازی شود.

$$\frac{\partial g}{\partial \omega} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad \frac{\partial g}{\partial q} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} = I^{-1}\,\mathrm{S}(h_w) \qquad \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial q} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad (70)$$

$$A = \begin{bmatrix} I^{-1}\,\mathrm{S}(h_w) & 0_{3\times3}\\ 0.5\times I_{3\times3} & 0_{3\times3}\end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial u} = I^{-1} \qquad \frac{\partial g}{\partial u} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad (72)$$

$$B = \begin{bmatrix} I^{-1}\\ 0_{3\times3}\end{bmatrix} \quad (73)$$

$$C = I_{6\times6} \quad (74)$$

در روابط (71,70) نماد S بیانگر ماتریس عملگر ضرب خارجی است. اکنون با داشتن ماتریس‌های A و B سیستم می‌توان ماتریس ضرایب کنترلی مورد نظر را به دست آورد. روش تنظیم‌کننده مربعی خطی دارای یک پایداری مقاوم ذاتی است. بی‌نهایت بودن حاشیه بهره در این روش از جمله دلایل اثبات پایداری آن است [22].

7- شبیه‌سازی و نتایج

به منظور مقایسه و بررسی ورودی‌های کنترلی طراحی شده با دو تئوری خطی و غیرخطی برای فضاپیمایی که مشخصات آن در ادامه بیان می‌شود، شبیه‌سازی‌هایی به کمک نرم‌افزار متلب انجام شده که نتایج و داده‌های خروجی آن‌ها در قالب کردار و جدول ارائه می‌گردد.

مشخصات فضاپیما که در ادامه بیان می‌شوند از مرجع [11] استخراج شده‌اند. ماتریس ممان اینرسی فضاپیما برابر با $I = \mathrm{diag}(4,4,3)\ \mathrm{kg.m^2}$ و مقدار ممان اینرسی قسمت دوار هر عملگر $I_w = 5\times10^{-4}\ \mathrm{kg.m^2}$ است، همچنین فرض صلبیت نیز برای فضاپیما در نظر گرفته شده و مشخصات مکانیکی هر چهار عملگر مشابه یکدیگر بوده و دارای محدودیت سرعت نامی $\omega_{w\_MAX} = 5400\ \mathrm{rpm}$ است. در طراحی برای ایجاد یک حاشیه امن، بیشترین سرعت، $\omega_{w\_MAX} = 5000\ \mathrm{rpm}$ در نظر گرفته شده است. شبیه‌سازی در یک بازه زمانی 60 ثانیه‌ای انجام شده است.

در تعیین ضرایب کنترلی در هر دو روش کنترل خطی و غیرخطی تلاش شده تا رفتار سیستم دارای مشخصات زیر باشد:

زمان نشست در کردارهای تغییر وضعیت تا حد امکان یکسان باشد و حداقل فراجهش در تغییر وضعیت سیستم مشاهده شود. این در حالی است که باید توجه شود که سرعت بیشینه چرخ‌های عکس‌العملی در محدوده مجاز باقی بماند و در نهایت باید در طول بازه شبیه‌سازی در نظر گرفته شده سیستم به وضعیت پایداری نهایی برسد.

همان‌طور که پیشتر هم بیان شده علاوه‌بر طراحی تنظیم‌کننده مربعی خطی به صورت مستقل در طراحی قسمت خطی تئوری خطی‌سازی پسخورد نیز از همین تکنیک استفاده شده است. ماتریس‌های وزنی Q و R و ماتریس بهره‌های کنترلی رابطه (60) در روش تنظیم‌کننده خطی عبارت از روابط (78-75) است.

$$Q_{LQR} = \begin{bmatrix}13131\times I_{3\times3} & 0_{3\times3}\\ 0_{3\times3} & 170\times I_{3\times3}\end{bmatrix} \quad (75)$$

$$R_{LQR} = \begin{bmatrix}2500&0&0\\0&2500&0\\0&0&2500\end{bmatrix} \quad (76)$$

$$K_x = K_y = K_z = 0.2608 \quad (77)$$

$$K_{xd} = K_{yd} = 2.5091, K_{zd} = 2.4566 \quad (78)$$

مقادیر این مؤلفه‌ها برای کنترل‌کننده بهینه مربوط به قسمت خطی روش خطی‌سازی پسخورد و بهره‌های مورد استفاده در رابطه (33) به شرح روابط (82-79) است.

$$Q = 0.1\times I_{6\times6} \quad (79)$$

$$R = 100\times I_{3\times3} \quad (80)$$

$$K_1 = 0.0316 \quad (81)$$

$$K_2 = 0.2535 \quad (82)$$

در تعیین ماتریس‌های وزنی Q و R با استفاده از قانون برایسون مقادیر اولیه‌ای برای ماتریس‌ها در نظر گرفته شده است و سپس با فرآیند سعی خطا و تغییر مقادیر اولیه سعی شده تا رفتار سیستم مطابق با نیازمندی‌های در نظر گرفته شده باشد [23].

جهت اطمینان از صحت داده‌های به‌دست‌آمده شش مانور تغییر وضعیت در نظر گرفته شده که شامل مانورهای زاویه بزرگ و کوچک هستند و مشخصات آن‌ها در جدول 1 نمایش داده شده است. وضعیت اولیه در همه مانورها موقعیت $[\phi_0\quad \theta_0\quad \psi_0] = [0\quad 0\quad 0]$ است. تنها کردارهای مربوط به مانور اول رسم شده و نتایج سایر مانورها در جدول 2 ثبت شده‌اند. رفتار عملگرها در مانورهای متنوع و با استفاده از تئوری‌های کنترل خطی و غیرخطی توسط سه معیار زیر مورد ارزیابی قرار گرفته است [16].

1- توان مصرفی $P = V\,i$

2- حداقل انرژی $\int_{t_0}^{t_f} T_{actuator}{}^2$

3- حداقل سوخت $\int_{t_0}^{t_f} |T_{actuator}|$

محاسبه میزان توان نیازمند داشتن اطلاعاتی از موتور عملگر است. برای عملگری با مشخصات در نظر گرفته شده از مرجع [11] به صورت رابطه (83) داریم.

$$K_T = 12.36\ \mathrm{mNm/A} \qquad K_V = 1.294\ \mathrm{mV/rpm} \quad (83)$$

در رابطه (83)، K_T ثابت موتور DC و K_V، ثابت ولتاژ موتور و به صورت رابطه (84) است.

$$T_w = K_T\, i \qquad V = K_V\,\omega_w \quad (84)$$

جدول 1 مانورهای تغییر وضعیت

Table 1 Attitude maneuvers

شماره مانور	وضعیت نهایی (درجه)
1	$[\phi_f\quad \theta_f\quad \psi_f] = [20\quad -30\quad -40]$
2	$[\phi_f\quad \theta_f\quad \psi_f] = [-40\quad 30\quad 60]$
3	$[\phi_f\quad \theta_f\quad \psi_f] = [-30\quad -50\quad -45]$
4	$[\phi_f\quad \theta_f\quad \psi_f] = [5\quad 5\quad 5]$
5	$[\phi_f\quad \theta_f\quad \psi_f] = [-5\quad 3\quad 2]$
6	$[\phi_f\quad \theta_f\quad \psi_f] = [-3\quad 2\quad -40]$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.57.4]

جدول 2 نتایج روش‌های کنترل خطی‌سازی پسخورد و خطی بهینه

Table 2 The results from FLC and LQR control methods

مانور	تئوری کنترلی	$\sum\lvert P\rvert$ (Watt)	$\sum\lvert T_w\rvert$ (Nm)	$\sum T_w^{\,2}$	EULERINT (deg s)
1	FLC	357.3	5.37	0.19	458.63
	LQR	741.5	14.8	1.07	496.44
2	FLC	959.34	8.22	0.46	804.67
	LQR	1699.5	21.2	1.83	940.54
3	FLC	857.04	9.22	0.48	768.29
	LQR	1874.1	18.95	1.7	883.8
4	FLC	6.8	0.7973	0.0036	71.33
	LQR	18.92	1.81	0.017	78.85
5	FLC	8.08	0.8	0.0034	57.42
	LQR	18.56	1.74	0.016	59.84
6	FLC	165.6	4.36	0.09	372.47
	LQR	523.1	11.85	0.6153	392.26

در طراحی کنترل غیرخطی خطی‌سازی پسخورد این مطلب مشخص شد که نخست برای این‌که معادله ورودی کنترلی (28) برای کنترل سیستم غیرخطی، همواره قابل‌محاسبه باشد، باید ماتریس $E(x)$ دارای دترمینانی غیرصفر باشد.

پس براساس رابطه (29) مؤلفه q_4 نباید صفر باشد. دوم برای دست‌یابی به یک سیستم خطی مناسب باید نگاشت z یک هموارریختی باشد که با بررسی این مورد نیز نتیجه‌ای مشابه مورد پیشین به‌دست می‌آید. یعنی مؤلفه q_4 نباید صفر باشد.

همان‌طور که در قسمت تعیین بهره‌های کنترلی بیان شد تلاش شده تا تغییر وضعیت در بازه شبیه‌سازی به مقادیر مطلوب رسیده و زمان‌های نشست در هر دو روش تا حد امکان یکسان باشند. این مطلب به وضوح در کردارهای شکل‌های 4 و 5 مربوط به مانور یک قابل تشخیص است. هر دو تئوری کنترلی توانسته‌اند تقریباً با زمان نشست حدوداً 40 ثانیه‌ای سیستم را به سمت زوایای فرمانی هدایت کنند. در شکل‌های 6 و 7 کردار تغییرات پارامترهای کواترنیون برای هر دو روش نشان داده شده است.

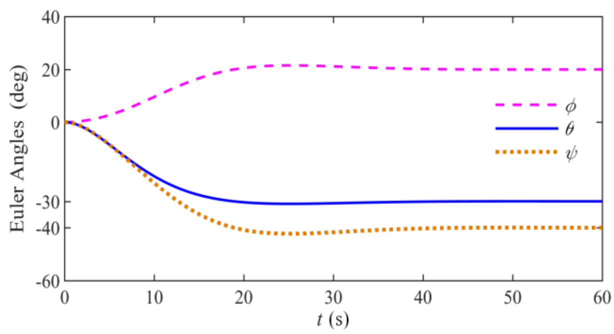

Fig. 4 The Euler angles in maneuver 1 and FLC method

شکل 4 تغییرات زوایای اویلر در مانور یک با روش خطی‌سازی پسخورد

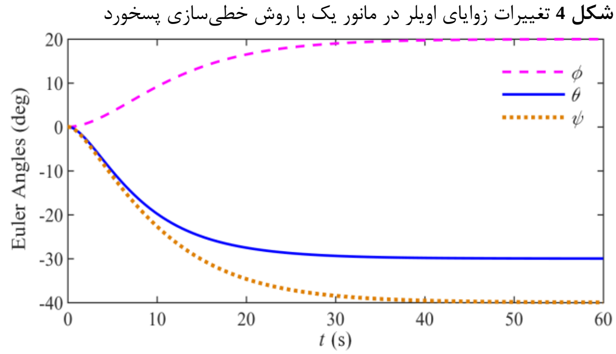

Fig. 5 The Euler angles in maneuver 1 and LQR method

شکل 5 تغییرات زوایای اویلر در مانور یک با روش کنترل بهینه

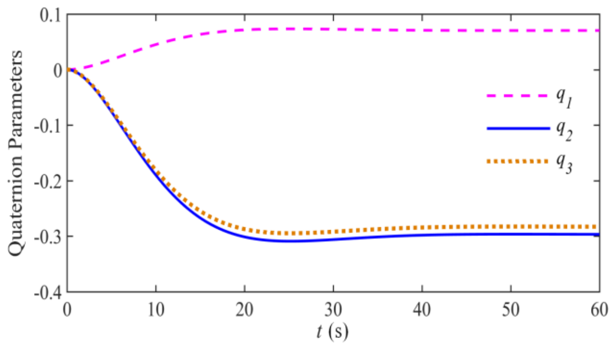

Fig. 6 Quaternion parameters in maneuver 1 and FLC method

شکل 6 پارامترهای کواترنیون در مانور یک با روش خطی‌سازی پسخورد

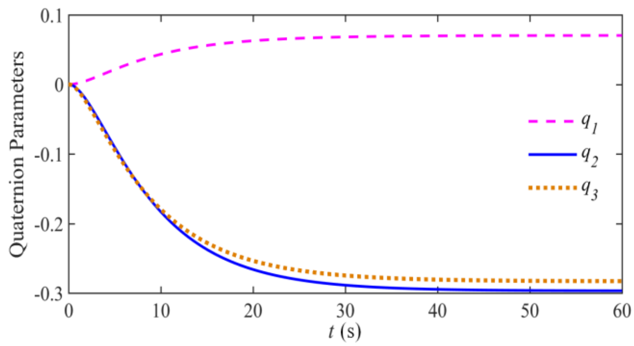

Fig. 7 Quaternion parameters in maneuver 1 and LQR method

شکل 7 پارامترهای کواترنیون در مانور یک با روش کنترل بهینه

آهنگ تغییرات سرعت زاویه‌ای چرخ‌ها باعث تولید گشتاور فرمانی در فضاپیما می‌شود. برای اجرای مانور تغییر وضعیت، چهار چرخ عکس‌العملی از حالت سکون شروع به دوران کرده‌اند و براساس شکل‌های 8و 9 در پایان مانور سرعت دیسک‌ها به مقدار صفر رسیده است. چرخ‌های عکس‌العملی براساس منطق وسایل تبادل مومنتوم کار می‌کنند. گشتاور تولیدی توسط این عملگرها گشتاور داخلی به حساب می‌آید. همین امر موجب می‌شود تا با صرف‌نظر از گشتاورهای خارجی و صفر بودن سرعت زاویه‌ای اولیه چرخ‌ها طبق قانون بقای مومنتوم زاویه‌ای، سرعت عملگرها در خاتمه نیز مجدداً به صفر برسد. مورد دیگری که در تعیین ضرایب به آن توجه شده بود اجرای مانور بدون عبور از سرعت ماکزیمم عملگرهاست. با توجه به کردارهای تغییرات سرعت زاویه‌ای عملگرها برای هر دو روش کنترلی، بیشینه سرعت زاویه‌ای تقریباً برابر و در حدود 3000 دور بر دقیقه است.

بررسی شکل‌های 10 و 11 نیز نشان می‌دهد که فضاپیما با استفاده از هر دو تئوری از حالت سکون اولیه با کسب سرعت زاویه‌ای بدنی شروع به دوران کرده و در پایان مانور به حالت پایداری و سکون مجدد رسیده است.

شکل‌های 12 و 13 نیز به کردارهای مقادیر گشتاور فرمانی مورد نیاز برای اجرای این مانور تغییر وضعیت اختصاص دارند. در نتیجه می‌توان بیان کرد که روش‌های کنترلی در اجرای وظیفه خود براساس محدودیت‌های طراحی عملکرد مناسبی داشته‌اند.

آن‌چه در این‌جا قابل توجه است مقدار کمتر اولراینت با استفاده از روش خطی‌سازی پسخورد در مقابل استفاده از تنظیم‌کننده مربعی خطی است. با توجه به شکل 14 و مقادیر جدول 2، مقدار اولراینت در مانور یک برای کنترل غیرخطی برابر 458.63 و برای کنترل خطی برابر 496.44 است. براساس مطالب ارائه شده در قسمت مربوط به اولراینت در متن، کنترل غیرخطی در مقایسه با کنترل خطی کنترل‌کننده سریع‌تری بوده و مانور فرمانی حول سه محور بدنی را با سرعت بیشتری به انجام می‌رساند. در جدول 2 مقادیر

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.57.4]

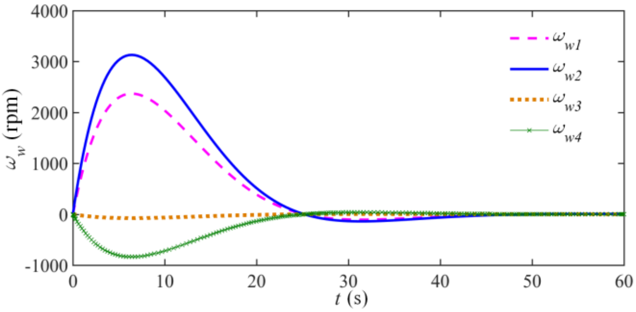

Fig. 8 Angular velocity of actuators in maneuver 1 and FLC method

شکل 8 تغییرات سرعت عملگرها در مانور یک با روش خطی‌سازی پسخورد

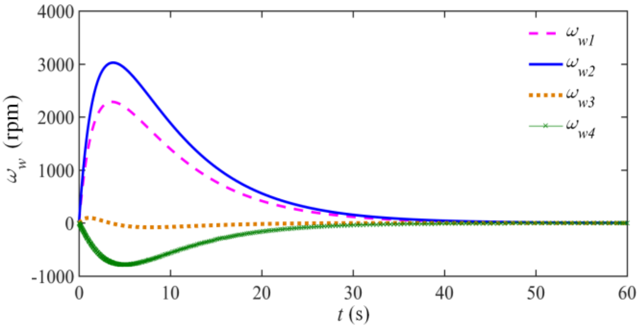

Fig. 9 Angular velocity of actuators in maneuver 1 and LQR method

شکل 9 تغییرات سرعت عملگرها در مانور یک با روش کنترل بهینه

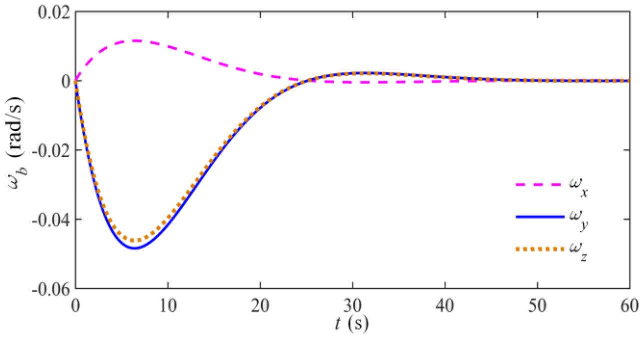

Fig. 10 Angular velocity of spacecraft in maneuver 1 and FLC method

شکل 10 سرعت‌های زاویه‌ای بدنی در مانور یک با روش خطی‌سازی پسخورد

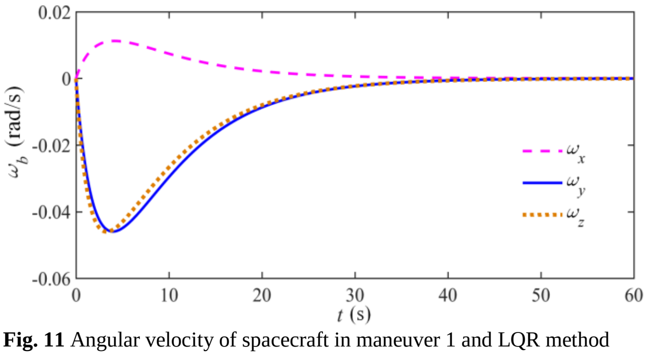

Fig. 11 Angular velocity of spacecraft in maneuver 1 and LQR method

شکل 11 سرعت‌های زاویه‌ای بدنی در مانور یک با روش کنترل بهینه

اولراینت برای هر دو روش کنترلی و در شش مانور مجزا ثبت شده که در همه آن‌ها مقدار این پارامتر در تئوری خطی‌سازی پسخورد کمتر است.

پس از بررسی سرعت روش‌های کنترلی در قسمت پیشین، اکنون به بررسی میزان توان مصرف شده، انرژی و تلاش مجموع عملگرها می‌پردازیم. دوباره نتایج جدول 2 نشان می‌دهد که توان مصرفی و میزان تلاش کنترلی عملگرها با استفاده از کنترل غیرخطی طراحی شده برای تمام مانورها مقدار

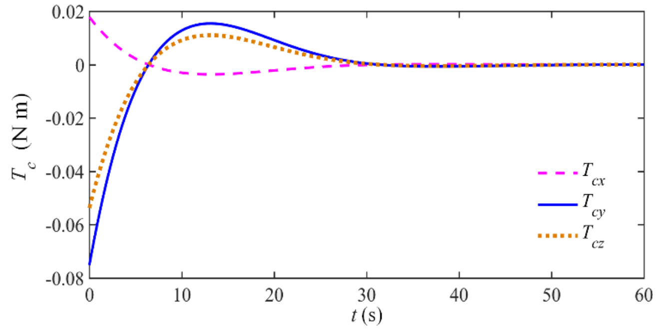

Fig. 12 The command torques in maneuver 1 and FLC method

شکل 12 گشتاورهای فرمانی در مانور یک با روش خطی‌سازی پسخورد

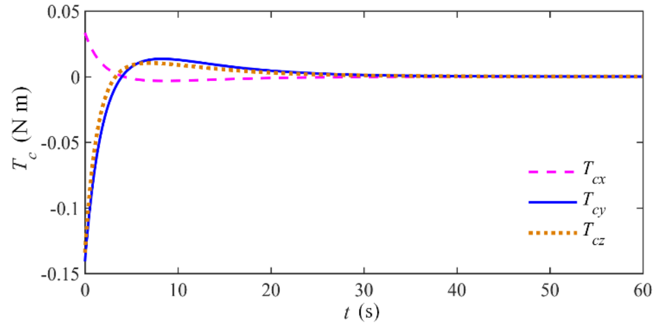

Fig. 13 The command torques in maneuver 1 and LQR method

شکل 13 گشتاورهای فرمانی در مانور یک با روش کنترل بهینه

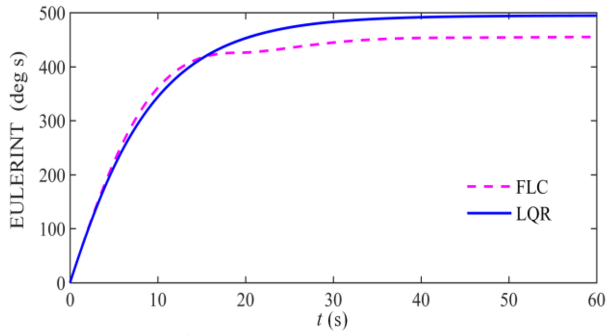

Fig. 14 EULERINT for FLC and LQR method

شکل 14 تغییرات اولراینت روش خطی‌سازی پسخورد و روش تنظیم‌کننده مربعی خطی در مانور یک

کمتری است. برای مثال در مانور یک توان مصرفی مجموع برای کنترل‌کننده بهینه برابر با 741.5 وات بوده و این مقدار برای روش خطی‌سازی پسخورد برابر با 357.3 وات محاسبه شده است. پس روش خطی‌سازی پسخورد که در قسمت خطی آن از کنترل بهینه استفاده شده نه‌تنها روش سریع‌تری است، بلکه این در حالی است که میزان مصرف توان و انرژی و تلاش عملگرها نیز در آن کمتر از روش کنترل بهینه به‌تنهایی است.

در نهایت همان‌طور که بیان شد برای اطمینان از نتایج به‌دست‌آمده مانورهای متعددی طراحی و شبیه‌سازی شده که شامل مانورهای زاویه بزرگ و کوچک است و در همه مانورها که نتایج آن‌ها در جدول 2 ثبت شده است، نتایج بر عملکرد سریع‌تر و بهینه‌تر کنترل خطی‌سازی پسخورد دلالت دارد. مقایسه اثر استفاده از تئوری‌های خطی متفاوت در طراحی کنترل‌کننده خطی‌ساز پسخورد با توجه به معیارهای بیان شده و استفاده از این روش کنترل غیرخطی همراه با روش‌های کنترل مقاوم موضوعاتی است که می‌توان در ادامه مسأله تعریف شده در این پژوهش به آن‌ها پرداخت.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.57.4]

8- نتیجه‌گیری

با بررسی نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها مشخص شد که کنترل غیرخطیِ خطی‌سازی پسخورد و کنترل تنظیم‌کننده مربعی خطی طراحی شده برای مسأله کنترل وضعیت فضاپیما با احتساب دینامیک عملگر چرخ عکس‌العملی کارآمد هستند. از آن‌جا که یکی از اهداف مهم این مقاله مقایسه روش خطی‌ساز پسخورد با تئوری خطیِ مورد استفاده در طراحی این کنترل غیرخطی است، تنظیم‌کننده مربعی خطی به عنوان یک روش کنترل خطی انتخاب شده است. از سویی طراحی کنترل‌کننده‌ها به‌گونه‌ای انجام شده تا نیازمندی‌های یکسانی نظیر زمان نشست، حداقل فراجهش و توجه به محدودیت عملگرها را برآورده نماید. در نتیجه برای مقایسه دو روش طراحی شده از چند معیار استفاده شده است. اولراینت نخستین معیار برای ارزیابی عملکرد ورودی‌های کنترلی است. کمتر بودن مقدار محاسبه شده این پارامتر در روش غیرخطی حاکی از سرعت بیشتر این روش کنترلی در اجرای مانورهای فرمانی است. در نهایت نیز به منظور بررسی تفاوت سرعت اجرای مانور تغییر وضعیت با دو روش کنترلی بر عملگرها، معیارهای انرژی، تلاش و توان مصرفی مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این مورد نیز استفاده از روش خطی‌سازی پسخورد علاوه‌بر کاهش سرعت مانور موجب رفتار بهینه عملگرها از نظر معیارهای تلاش کنترلی و توان مصرفی نیز می‌شود.

9- فهرست علایم

A	ماتریس کسینوس هادی
e	مؤلفه‌های محور دوران اولر
h	مومنتوم زاویه‌ای (kgm^2s^{-1})
I	ممان اینرسی (kgm^2)
L	ماتریس توزیع چیدمان
P	توان مصرفی موتور الکتریکی عملگر
q	پارامتر کواترنیون
r	مرتبه یا درجه نسبی
T	گشتاور (Nm)
V	تابع لیاپانوف

علایم یونانی

α	زاویه دوران اویلر (rad)
β	زاویه انحراف محور هر عملگر از صفحه $x_b - y_b$
η	متغیر دینامیک صفر
θ	زاویه دوران حول محور y_b
ξ	متغیر جدید سیستم خطی‌سازی شده
ϕ	زاویه دوران حول محور x_b
ψ	زاویه دوران حول محور z_b
Ω	ماتریس سرعت‌های زاویه‌ای بدنی
ω	سرعت زاویه‌ای (rad/s)

زیرنویس‌ها

b	مربوط به دستگاه بدنی
c	پارامترهای کنترلی
E	مربوط به خطا
f	نهایی
w	مربوط به چرخ عکس‌العملی

10- مراجع

[1] M. Navabi, S. Soleymanpour, Standard and robust backstepping control of a spacecraft with inertial uncertainty (revision), *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 112-124, 2015. (in Persian فارسی)

[2] M. Navabi, M. Tavana, H. Mirzaei, Attitude control of spacecraft by state dependent riccati equation and power series expansion of riccati methods, *Space Science and Technology*, Vol. 7, No. 4, pp. 39-49, 2015. (in Persian فارسی)

[3] A. Iyer , S. N. Singh, Minimal realizations from MFDs and attitude control of spinning satellite using gyrotorquers, *Proceedings of The 26th Institute of Electrical and Electronics Engineers Conference on Decision and Control*, Los Angeles, United States of America, pp. 1269-1274, December 9-11, 1987.

[4] Y. P. Chen, S. C. Lo, Sliding-Mode controller design for spacecraft attitude tracking maneuvers, *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 29, No. 4, pp. 1328-1333, 1993.

[5] J. J. E. Slotine, W. Li, *Applied Nonlinear Control*, pp. 207-271, New Jersey: Prentice-Hall, 1991.

[6] Y. N. Fei, Q. H. Wu, Tracking control of robot manipulators via output feedback linearization, *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, Vol. 1, No. 3, pp. 329-335, 2006.

[7] S. John, J. O. Pedro, Hybrid feedback linearization slip control for anti-lock braking system, *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 10, No. 1, pp. 81-99, 2013.

[8] Y. Long, S. Lyttle, N. Pagano, D. J. Cappelleri, Design and quaternion-based attitude control of the omnicopter MAV using feedback linearization, *Proceedings of The American Society of Mechanical Engineers International Design Engineering Technical Conference*, Chicago, United States of America, August 12-15, 2012.

[9] H. Bang, J. S. Lee, Y. J. Eun, Nonlinear attitude control for a rigid spacecraft by feedback linearization, *Mechanical Science and Technology*, Vol. 18, No. 2, pp. 203-210, 2004.

[10] M. Navabi, N. Nasiri, Modeling and simulating the earth magnetic field utilizing the 10th generation of IGRF and comparison the linear and nonlinear transformation in order to use in satellite attitude control, *Space Science and Technology*, Vol. 3, No. 4, pp. 45-52, 2011. (in Persian فارسی)

[11] I. Kök, *Comparison and Analysis of Attitude Control Systems of a Satellite Using Reaction* Wheel A*ctuators*, Master Thesis, Department of Computer Science Electrical and Space Engineering, Luleå University of Technology, Sweden, 2012.

[12] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory an Introduction*, pp. 209-219, New York: Dover Publications, 2004.

[13] M. Navabi, H. R. Mirzaei, Dynamic modeling and nonlinear adaptive control of mesicopter flight, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 1-12, 2015. (in Persian فارسی)

[14] J. Kim, J. Crassidis, A comparative study of sliding mode control and time-optimal control, *Proceedings of The American Institute of Aeronautics and Astronautics/American Astronautical Society*, *Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, Boston, United States of America, August 10-12, 1998.

[15] M. J. Sidi, *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, pp. 95-169, New York: Cambridge university press, 1997.

[16] M. Navabi, N. Nasiri, Attitude control of microsatellite in terms of energy consumption for reaction wheel and magnetorquer actuators, *Proceedings of The 10th Conference of Iranian Aerospace Society*, Tehran, Iran, March 1-3, 2010. (in Persian فارسی)

[17] M. Rahmani, A. Ghanbari, Computed torque control of a caterpillar robot manipulator using neural network, *Advanced Engineering Forum*, Vol. 15, pp. 106-118, 2016.

[18] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Third Edittion, pp. 505-530, New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

[19] M. Navabi, S. Soleymanpour, Command filtered modular adaptive backstepping attitude control of spacecraft in presence of disturbance torque, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 285-296, 2015. (in Persian فارسی)

[20] B. S. Anjali, A. Vivek, J. L. Nandagopal, Simulation and analysis of integral LQR controller for inner control loop design of a fixed wing micro aerial vehicle (MAV), *Procedia Technology*, Vol. 25, pp. 76-83, 2016.

[21] Y. Yang, Analytic LQR design for spacecraft control system based on quaternion model, *Aerospace Engineering*, Vol. 25, No. 3, pp. 448-453, 2011.

[22] B. D. Anderson, J. B. Moore, *Linear Optimal Control*, pp. 70-77, New Jersey: Prentice-Hall, 1971.

[23] Z. Shulong, A. Honglei, Z. Daibing, A new feedback linearization lqr control for attitude of quadrotor, *Proceedings of The 13th Institute of Electrical and Electronics Engineers International Conference on Control Automation Robotics & Vision*, Marina Bay Sands, Singapore, pp. 1593-1597, December 10-12, 2014.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.57.4]