



تحلیل تنش چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن با گشودگی شبه مستطیلی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای

محمد جعفری^{1*}، بهزاد مشیری اول²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

* شاهرود، کد پستی 3619995161، m_jafari821@shahroodut.ac.ir

چکیده

در این مقاله با استفاده از بسط حل تحلیلی لخنیتسکی به مطالعه توزیع تنش اطراف گشودگی شبه‌مستطیلی پرداخته شده است. لخنیتسکی از روش تحلیلی متغیر مختلط برای تحلیل تنش صفحات غیرهمسانگرد حاوی گشودگی‌هایی به شکل دایره و بیضی استفاده کرد. به منظور بسط حل تحلیلی لخنیتسکی برای تحلیل تنش چندلایه‌های متقارن حاوی گشودگی غیردایره‌ای، به وسیله نگاشت همنوا، ناحیه خارج گشودگی شبه مستطیلی به محدوده خارج گشودگی دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل می‌شود. در این تحقیق سعی می‌شود؛ با بسط روش فوق، تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل نسبت طول به عرض گشودگی، نوع چیدمان لایه‌ها، زاویه چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی و زاویه اعمال بار مورد مطالعه قرار گیرد. برای بررسی درستی نتایج حل تحلیلی ارائه شده از روش اجزاء محدود استفاده شده است. نتایج حاصل از حل تحلیلی تطابق خوبی با نتایج حل عددی دارد. این نتایج نشان می‌دهد که روش حاضر، روشی دقیق برای محاسبه توزیع تنش در صفحات کامپوزیتی با گشودگی‌های خاص است. با توجه به نتایج ارائه شده پارامترهای ذکر شده تأثیر بسزایی در توزیع تنش اطراف گشودگی شبه‌مستطیلی دارند. با نرم‌تر شدن گوشه‌های گشودگی و انتخاب زاویه چرخش گشودگی مناسب می‌توان تمرکز تنش را کاهش داد.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 04 خرداد 1393
پذیرش: 13 تیر 1393
ارائه در سایت: 06 آبان 1393
کلیدواژه‌ها:
نگاشت همنوا
حل تحلیلی
چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن
گشودگی شبه مستطیلی

Stress analysis of symmetric composite laminates with quasi-rectangular hole subjected to in-plane loading

Mohammad Jafari^{1*}, Behzad Moshiri Aval²

1- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran.

* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, m_jafari@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 25 May 2014
Accepted 04 July 2014
Available Online 28 October 2014

Keywords:
Conformal Mapping
Analytical Solution
Symmetric Composite Laminates
Quasi-rectangular Hole

ABSTRACT

In this paper, by expanding the Lekhnitskii's solution the stress distribution around quasi-rectangular hole has been studied. Lekhnitskii used complex variables analytic method for stress analysis of anisotropic plates with circular and elliptical hole. In order to extend the Lekhnitskii's analytical method for stress analysis of perforated symmetric laminates with non-circular holes, by means of conformal mapping, the area external to the hole can be represented by the area outside the unit circle. In this paper an attempt has been made to study the effect of different parameters such as aspect ratio, stacking sequence, rotation angle of hole, bluntness and load angle on stress distribution around quasi-rectangular hole. The finite element method has been used to check the accuracy of analytical results. The analytical results are in good agreement with the numerical results. The results presented herein, indicate that the presented method can be used to accurately determine the stresses and stress concentration in composite plates with special shape cutouts. The results obtained clearly demonstrate the effect of these parameters on maximum stresses in perforated plates subjected to uni-axial tensile load. Appropriate selection of bluntness and rotation angle of hole can decrease stress concentration.

1- مقدمه

تنوع کاربرد، بسته به نیاز وجود انواع شیارها و گشودگی‌ها با ابعاد و اشکال مختلف را در صفحات می‌طلبد. از جمله این موارد، می‌توان به گشودگی درها و پنجره‌ها در بدنه هواپیماها و زیردریایی‌ها، محل اتصال فشارسنج‌ها و دماسنج‌ها در بدنه کوره‌ها، محل اتصال دو ورق به همدیگر توسط پیچ‌ها و

صفحات به دلیل کاربرد وسیع در صنایع مختلف از اهمیت بسیاری برخوردار هستند. از جمله کاربرد آن‌ها می‌توان انواع مخازن مستطیلی، کوره‌ها، بدنه ماشین‌آلات صنعتی و غیر صنعتی، صنعت ساختمان‌سازی و غیره را نام برد.

Please cite this article using:

M. Jafari, B. Moshiri Aval, Stress analysis of symmetric composite laminates with quasi-rectangular hole subjected to in-plane loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 395-404, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

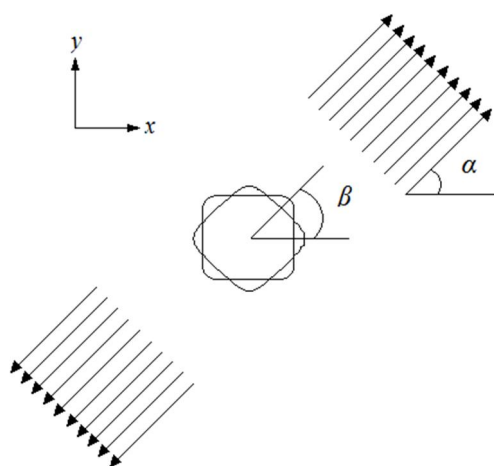
M. Jafari, B. Moshiri Aval, Stress analysis of symmetric composite laminates with quasi-rectangular hole subjected to in-plane loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 395-404, 2015 (In Persian)

آنها قادر بود مثلث‌هایی با نسبت قاعده به ارتفاع مختلف را به دایره‌ای به شعاع واحد بنگارد. در تحقیق آن‌ها تأثیر شعاع انحنای گوشه گشودگی نیز مورد مطالعه قرار گرفت. حل آن‌ها برای یک صفحه تک‌لایه با زاویه الیاف صفر درجه بود. جعفری و رضایی‌پژند [14] با تعریف تابع تنشی که معادلات سازگاری را ارضاء می‌کرد؛ حل تحلیلی صفحات غیرهمسانگرد دارای گشودگی‌های مختلف را ارائه کردند. اسمر و جتور [15] با همین روش، توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مستطیلی را در یک صفحه غیرهمسانگرد و تحت کشش به دست آوردند. آن‌ها تأثیر انحنای گشودگی و زاویه بار را به طور مجزا بر روی تمرکز تنش مورد بررسی قرار دادند. جعفری و رضایی‌پژند [16] به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مربعی در صفحات غیرهمسانگرد پرداختند. آن‌ها تأثیر پارامترهای مختلفی از قبیل زاویه بار، زاویه الیاف و زاویه چرخش گشودگی را مورد مطالعه قرار دادند. در مورد تحلیل تنش صفحات چندلایه کامپوزیتی حاوی گشودگی مطالعات زیادی انجام شده است. که بیشتر این تحقیقات برای گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل می‌باشد [17-19]. ریبیکی و اشمیزر [20] با استفاده از روش اجزاء محدود، توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای را در چندلایه‌ها به دست آوردند. صفحه مورد تحلیل آن‌ها تحت بار تک محوره قرار داشت. آن‌ها از روش تجربی برای تایید روش اجزاء محدود خود استفاده کردند. در مقاله‌ای توسط ولایچامی و همکارانش [21] به طراحی بهین صفحات چندلایه کامپوزیتی حاوی گشودگی بیضی شکل پرداخته شد. متغیرهای طراحی در تحقیق آن‌ها نسبت قطرهای بیضی و زاویه چرخش گشودگی بودند. تابع هدف دسترسی به کمترین تنش ممکن در اطراف گشودگی بود. بونورا و همکارانش [22] با ارائه عبارتی تحلیلی برای تابع تنش ابری توانستند توزیع تنش اطراف گشودگی‌هایی با هندسه ساده نظیر دایره و بیضی شکل را برای چندلایه‌های متقارن به دست آورند. آن‌ها به کمک روش اجزاء محدود دقت حل خود را بررسی کردند. تحلیل صفحات مرکب از لایه‌های نازک از ماده همسانگرد و الاستیک خطی توسط بئوم و ایرما [23] مورد بررسی قرار گرفت و میدان تنش‌ها و گشتاورهای منتجه و جابجایی با استفاده از روش تابع پتانسیل مختلط به دست آمد. هدف اصلی این تحقیق بررسی میدان نوک ترک و میزان رهاسازی انرژی در صفحات چندلایه بود. یوکادائونکر و راثو [24] با استفاده از روش متغیر مختلط، صفحات چندلایه کامپوزیتی متقارن حاوی گشودگی‌هایی با هندسه‌های مختلف را تحلیل کردند. رمثو [25] با استفاده از روش‌های تحلیلی و تجربی، رفتار پل‌های چندلایه با گشودگی مستطیلی تحت بارگذاری کشش دومحوره، فشاری و برشی را مورد بررسی قرار داد. در مقاله‌ای توسط راثو و همکارانش [26] توزیع تنش اطراف گشودگی مستطیلی و مربعی در چندلایه‌های متقارن به دست آمد. آن‌ها مطالعات خود را بر روی کامپوزیت‌های گرافیت/اپوکسی و شیشه/اپوکسی متمرکز کردند. بارگذاری عمده در این تحقیق بارگذاری دومحوره و برشی بود. شعاع انحنای گوشه گشودگی، زاویه بارگذاری و نوع چیدمان لایه‌ها از مهمترین پارامترهای مورد تحلیل آنها بود. به خاطر تابع نداشتی که توسط آن‌ها استفاده شد، امکان بررسی شعاع انحنای گوشه گشودگی به صورت تابعی پیوسته بسیار مشکل بود. زیرا آن‌ها با تغییر این پارامتر باید مجدد تابع نداشت را برای گشودگی جدید محاسبه می‌کردند. آن‌ها در این تحقیق زاویه چرخش گشودگی را بررسی نکردند. در مقاله‌ای توسط هافنباخ و همکارانش [27] با در نظر گرفتن تابع جابجایی برحسب متغیر مختلط و استفاده از نگاشت هم‌نوا مسئله تمرکز تنش صفحات کامپوزیتی محدود حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل مورد

پرچ‌ها، وجود سوراخ‌هایی در پره‌های توربین‌ها جهت جریان یافتن سیال خنک کننده در پره‌ها اشاره کرد. استفاده از مواد مرکب در صنایع هوافضا و بسیاری از صنایع دیگر به خاطر نسبت استحکام به وزن و سفتی بالای این‌گونه مواد دارای افزایش چشم‌گیری است. با در نظر گرفتن کاربرد وسیع مواد مرکب و ماهیت پیچیده و متفاوت رفتار آن‌ها نسبت به مواد فلزی مطالعه استحکام شکست آن‌ها لازم به نظر می‌رسد. استحکام شکست بیشتر مواد شدیداً به تمرکز تنش ناشی از وجود گشودگی وابسته است. تجربه نشان داده است که تنش واقعی شکست برای صفحات حاوی گشودگی، اساساً کمتر از استحکام کشش نهایی همان ماده بدون گشودگی است. بنابراین برای طراحی دقیق صفحات حاوی گشودگی دانستن اطلاعات دقیق در مورد تغییر شکل‌ها و توزیع تنش‌ها لازم است. تمرکز تنش اهمیت ویژه‌ای در ارزیابی قابلیت اطمینان سازه‌های مهندسی دارد. دیده شده است که 80 درصد شکست‌های انجام شده در سازه‌های هوایی از محل بست‌ها و اتصالات روی داده است [1].

در مورد تحلیل تنش صفحات دارای گشودگی، تحقیقات بسیار وسیعی از روش‌های مختلف عددی، تجربی و تحلیلی انجام شده است. با توجه به گستردگی تحقیقات انجام شده در این زمینه، سعی می‌شود تا به مروری بر تحلیل تنش صفحات حاوی گشودگی با استفاده از روش حل تحلیلی بر پایه استفاده از تابع پتانسیل مختلط پرداخته شود. استفاده از روش متغیر مختلط در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته دوبعدی اولین بار توسط موشخلیشویلی [2] برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه شد. کاربردهایی از روش ارائه شده توسط او در مطالعات ساوین [3] بر روی صفحات همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف و تحت کشش دیده می‌شود. همچنین ساوین برای مواد غیرهمسانگرد فقط برای گشودگی بیضی شکل و دایره‌ای مطالعاتی را انجام داد. توسعه کامل روش موشخلیشویلی به مسائل الاستیسیته دوبعدی مواد غیرهمسانگرد توسط اشلبای و همکارانش [4]، اشترو [5] و لخنیتسکی [6] انجام شد. بعدها پژوهشگران متعددی با استفاده از روابط ارائه شده توسط آن‌ها به مطالعه صفحات غیرهمسانگرد حاوی گشودگی پرداختند. چن [7] رفتار صفحه ارتوتروپیک حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل تحت شار حرارتی یکنواخت را مورد مطالعه قرار داد. او با استفاده از روش تابع پتانسیل مختلط توانست تنش محیطی¹ اطراف گشودگی را محاسبه کند. تحلیل تنش صفحات ارتوتروپیک با گشودگی مستطیلی توسط جونگ [8] و نایک و راجیه [9] انجام شد. روابط آن‌ها بر اساس روش حل ارائه شده توسط لخنیتسکی و فرمول‌بندی اشترو و استفاده از نگاشت هم‌نوا بود. زیمرمن [10] استفاده از تابع نگاشت هم‌نوا، برای نگاشت نقاط گشودگی‌هایی با شکل‌های مختلف به دایره‌ای به شعاع واحد را مورد بررسی قرار داد. هوو [11] میدان تنش در اطراف گشودگی‌های با شکل‌های مختلف در یک صفحه الاستیک غیرهمسانگرد تحت بارگذاری مکانیکی در بی‌نهایت، را مطالعه کرد. هافنباخ و همکارانش [12] با ارائه یک حل تحلیلی، میدان تنش و جابجایی اطراف گشودگی بیضی شکل را در یک صفحه غیرهمسانگرد به دست آوردند. آن‌ها نتایج خود را برای زوایای مختلف الیاف و بار ارائه دادند و از نتایج اجزاء محدود و تجربی برای بررسی درستی حل خود استفاده کردند. توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی در یک صفحه غیرهمسانگرد با استفاده از روش پتانسیل مختلط توسط دائوست و هوو [13] ارائه شد. اهمیت کار آن‌ها تابع نداشتی بود که در نظر گرفتند. تابع نگاشت

1- hoop stress



شکل 1 نمایی از هندسه گشودگی و بارگذاری آن

جدول 1 خواص مکانیکی مواد [26]

نوع ماده	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
گرافیت/اپوکسی	181	10/3	7/17	0/28
شیشه/اپوکسی	47/4	16/2	7	0/26

در این تحقیق از چیدمان‌های مختلف از قبیل $[0/90]_s$ ، $[45/-45]_s$ و $[30/0/-30]_s$ برای ایجاد چندلایه‌های متقارن استفاده شده است.

2-1- تابع نگاشت

همان‌طور که قبلاً بیان شد؛ لخنیتسکی [6] توزیع تنش را برای گشودگی‌های دایره‌ای و بیضی شکل از روش تحلیلی مورد بررسی قرار داد. به منظور بسط روابط ارائه شده توسط لخنیتسکی برای به‌دست آوردن توزیع تنش اطراف گشودگی شبه‌مستطیلی و همچنین برای محاسبه راحت‌تر انتگرال کوشی در هنگام محاسبه تنش، بهتر است مرز گشودگی به دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل شود. لذا به وسیله نگاشت هم‌نوا، ناحیه خارج گشودگی شبه مستطیلی در مختصات فیزیکی z ، به محدوده خارج گشودگی دایره‌ای به شعاع واحد در صفحه z با تابع انتقالی به نام تابع نگاشت قابل تبدیل است. تابع نگاشت مورد استفاده در این تحقیق به صورت رابطه (1) تعریف می‌شود:

$$Z = X + sy \quad (1)$$

با توجه به اینکه معادله سازگاری چندلایه‌های متقارن برحسب تابع تنش (معادله 8) با روش مشخصه قابل حل است؛ در رابطه (1)، s ریشه‌های معادله مشخصه مربوط به چندلایه‌های متقارن می‌باشد [6].
در معادله فوق X و Y به صورت رابطه (2) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} x &= (\cos\theta + w * \cos(3\theta)) \\ y &= -(c * \sin\theta - w * \sin(3\theta)) \end{aligned} \quad (2)$$

پارامتر w برای تعیین میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی تعریف شده است. به عبارت دیگر w نشان دهنده انحنا گوشه گشودگی می‌باشد. شکل‌های 2 و 3 تأثیر پارامترهای w و c را به ترتیب بر روی انحنا گوشه گشودگی و نسبت طول به عرض آن نشان می‌دهند.
انحنا گشودگی (w) یکی از پارامترهای مهم و تأثیرگذار بر توزیع تنش اطراف گشودگی است که در این مقاله تأثیر این پارامتر بررسی می‌شود.
 c پارامتری است که تعیین کننده نسبت طول به عرض گشودگی است. برای حالتی که $c=1$ است؛ گشودگی شبه مربعی خواهد بود.

مطالعه قرار گرفت. برای بررسی صحت روش حل تحلیلی در این مقاله، از روش تجربی استفاده شد. در مقاله دیگری توسط هافنباخ و همکارانش [28]، با استفاده از روش تحلیلی برپایه تئوری کلاسیک چندلایه‌ها و استفاده از تابع پتانسیل به شکل متغیر مختلط، میدان تنش و کرنش در اطراف گشودگی برای کامپوزیت‌های تقویت شده تعیین شد. آن‌ها برای نگاشت نقاط روی مرز گشودگی بیضی شکل به دایره‌ای به شعاع واحد از تابع نگاشت هم‌نوا استفاده کردند. همچنین از ترکیب روش حداقل مربعات و روش هم مکانی¹ برای مدل‌سازی مرز خارجی صفحه استفاده کردند. در مورد چندلایه‌های نامتقارن هم تحقیقاتی انجام شده است که بیشتر آن‌ها برای گشودگی‌های دایره‌ای و بیضی شکل می‌باشد [29-31]. یکی از کاربردهای عمده تمرکز تنش در اتصالات صفحات کامپوزیتی می‌باشد. در اتصالات صفحات بوسیله پیچ‌ها و بین‌ها، غالباً از طرف پیچ یا بین نیرویی به مرز گشودگی وارد می‌شود. تحلیل این چنین مسائلی هم با استفاده از به کارگیری توابع پتانسیل مختلط در تحقیقات متعددی انجام شده است [32-34]. در مقالات متعددی با دانستن توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف سعی در تقویت استحکام ماده در نواحی شامل گشودگی با استفاده از روش‌های مختلف مانند استفاده از حلقه‌ها و یا الیاف تقویتی و یا وصله شده است.

برای طراحی دقیق اتصالات و یا تقویت گشودگی‌ها با روش‌های مختلف و با توجه به پیشرفت سریع تکنولوژی و افزایش استفاده از مواد مرکب نیاز به اطلاعات دقیقی در مورد توزیع تنش اطراف گشودگی است. اگرچه تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است ولی مطالعه صفحات چندلایه کامپوزیتی حاوی گشودگی‌های مختلف با در نظر گرفتن پارامترهای مهمی از قبیل جنس و نوع چیدمان لایه‌ها، زاویه بار، زاویه چرخش گشودگی، نسبت طول به عرض و شعاع انحنا گوشه گشودگی لازم به نظر می‌رسد. در این مقاله سعی می‌شود؛ تأثیر تمامی این پارامترها برای صفحات چندلایه کامپوزیتی متقارن حاوی گشودگی شبه مستطیلی مورد بررسی قرار گیرد. بررسی زاویه چرخش گشودگی و انحنا گوشه گشودگی و معرفی پارامترهای بهینه در چیدمان‌های مورد بررسی از نقاط قوت این مقاله است. دستیابی به این نتایج با استفاده از روش تابع پتانسیل مختلط انجام شده است.

2- تعریف مسأله

صفحه مطالعه شده در این مقاله یک چندلایه کامپوزیتی متقارن است. صفحه دارای گشودگی شبه مستطیلی بوده و ابعاد آن در مقابل اندازه گشودگی چنان است که بتوان صفحه را بی‌نهایت فرض کرد. مطابق شکل 1 صفحه در بی‌نهایت تحت بارگذاری کششی با زاویه (α) نسبت به محور X قرار دارد. همچنین زاویه چرخش گشودگی که بیانگر نحوه قرارگیری آن نسبت به افق است، با β نمایش داده شده است. صفحه مفروض دارای رفتار الاستیک خطی بوده و با توجه به شرایط مرزی تنها تنش ایجاد شده در مرز گشودگی σ_θ است.

باتوجه به نامحدود بودن صفحه نسبت بزرگترین ضلع گشودگی به ابعاد صفحه در حل عددی کمتر از 0/05 در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود گشودگی در مرکز صفحه قرار گرفته و گشودگی عاری از هرگونه بار خارجی است. یعنی در مرز گشودگی $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ است.
صفحه مورد بررسی در این تحقیق از جنس ماده گرافیت/اپوکسی و شیشه/اپوکسی بوده که خواص این مواد در جدول 1 ارائه شده است.

1- collocation method

مولفه‌های تنش برحسب تابع تنش $U(x, y)$ به صورت رابطه (6) تعریف می‌شود:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

با توجه به رابطه سازگاری در حالت دوبعدی طبق رابطه (7):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

و با جایگذاری رابطه (3) و (6) در معادله سازگاری رابطه (8) به دست می‌آید:

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (8)$$

حل عمومی معادله فوق بستگی به ریشه‌های معادله مشخصه رابطه (9) دارد:

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \quad (9)$$

لخنیسکی [6] نشان داد که ریشه‌های معادله مشخصه فوق دوبه دو مزدوج هستند: $s_1 = \bar{s}_3$ و $s_2 = \bar{s}_4$.

بنابراین حل معادله (8) به صورت رابطه (10) خواهد بود:

$$U(x, y) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \overline{F_1(z_1)} + \overline{F_2(z_2)} \quad (10)$$

که در آن $z_i = x + s_i y$ ($i=1,2$) است. برای کاهش مرتبه مشتق در تابع تنش ارائه شده، توابع φ_0 و ψ_0 به صورت رابطه (11) تعریف می‌شوند:

$$\frac{dF_1}{dz_1} = \varphi_0(z_1) \quad \frac{dF_2}{dz_2} = \psi_0(z_2) \\ \frac{d\overline{F_1}}{dz_1} = \overline{\varphi_0(z_1)} \quad \frac{d\overline{F_2}}{dz_2} = \overline{\psi_0(z_2)} \quad (11)$$

بردار نیرو اعمالی در واحد سطح با استفاده از تئوری الاستیسیته برحسب تنش بصورت رابطه (12) و (13) قابل محاسبه می‌باشد.

$$X_n = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) \\ Y_n = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) \quad (12)$$

که در آن:

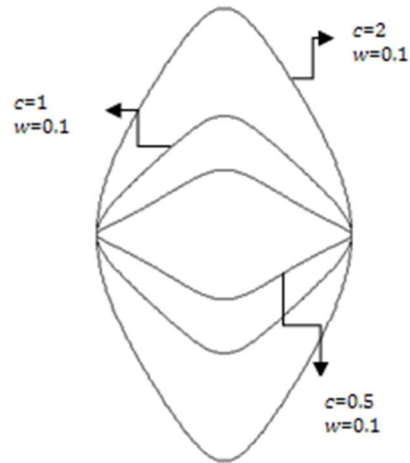
$$\cos(n, x) = dy / ds \\ \cos(n, y) = -dx / ds \quad (13)$$

از طرفی می‌توان این روابط را برحسب تابع تنش به صورت رابطه (14) نوشت:

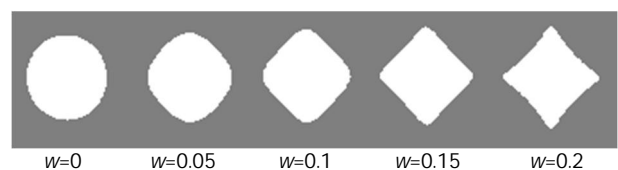
$$X_n = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ Y_n = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \quad (14)$$

در نتیجه طبق رابطه (15):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\int_0^s Y_n ds + C_1 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \int_0^s X_n ds + C_2 \quad (15)$$



شکل 2 تأثیر پارامتر C بر هندسه گشودگی



شکل 3 تأثیر پارامتر W بر هندسه گشودگی برای c=1

2-2- حل تحلیلی

حل تحلیلی حاضر برپایه تئوری الاستیسیته مواد غیرهمسانگرد ارائه شده توسط لخنیتسکی [6] استوار می‌باشد. در این تئوری ابتدا تابع تنش به صورت عبارتی تحلیلی برحسب متغیر مختلط نوشته می‌شود. سپس با ارائه معادله سازگاری برحسب تابع تنش و حل آن از روش معادله مشخصه و اعمال شرایط مرزی، می‌توان مولفه‌های تنش را به دست آورد. رابطه تنش و کرنش متوسط طبق قانون هوک به صورت رابطه (3) است:

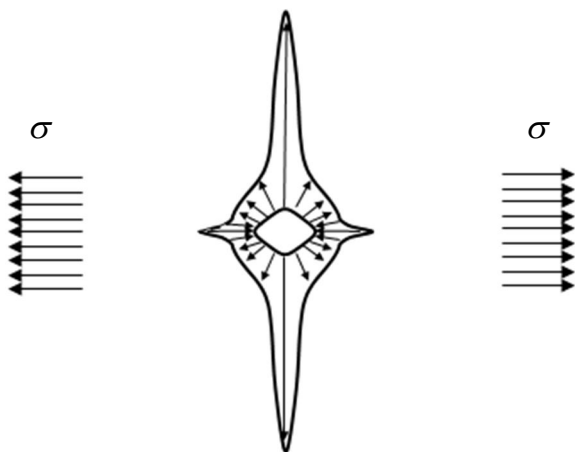
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

که در آن a_{ij} اعضای ماتریس نرمی کاهش یافته چندلایه‌های متقارن می‌باشند؛ رابطه بین ضرایب سفتی مؤثر و اعضای ماتریس سفتی کاهش یافته توسط فیشر [35] به صورت رابطه (4) بیان شد:

$$b_{ij} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})^{(k)} t_k \quad (4)$$

که در آن h ضخامت کلی چندلایه و t_k ضخامت لایه k ام است. رابطه بین اعضای ماتریس نرمی کاهش یافته برحسب ضرایب سفتی مؤثر b_{ij} به صورت رابطه (5) است:

$$a_{11} = \frac{(b_{22}b_{66} - b_{26}^2)}{B} \quad a_{12} = \frac{(b_{16}b_{26} - b_{12}b_{66})}{B} \\ a_{16} = \frac{(b_{12}b_{26} - b_{16}b_{22})}{B} \quad a_{22} = \frac{(b_{11}b_{66} - b_{16}^2)}{B} \\ a_{26} = \frac{(b_{12}b_{16} - b_{11}b_{26})}{B} \quad a_{66} = \frac{(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)}{B} \\ B = (b_{11}b_{22}b_{66} - b_{11}b_{26}^2 + 2b_{12}b_{26}b_{16} - b_{66}b_{12}^2 - b_{22}b_{16}^2) \quad (5)$$



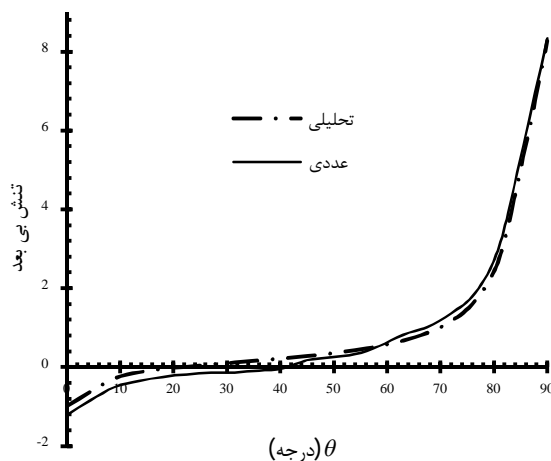
شکل 4 توزیع تنش اطراف گشودگی مربعی تحت بارگذاری تک محوره افقی

نتایج ارائه شده در شکل 5 برای $w=0/1$ و $c=1$ و برای ماده گرافیت/اپوکسی است. مطابق این شکل تطابق خوبی بین حل عددی و حل تحلیلی حاضر دیده می‌شود. منظور از تنش بی‌بعد در این شکل و در دیگر نتایج ارائه شده در این تحقیق، بیشترین تنش محیطی (σ_0) ایجاد شده در اطراف گشودگی به تنش اعمالی می‌باشد.

در شکل 6 برای چیدمان $[0 / 90]_s$ ، تغییرات تنش بی‌بعد برحسب انحنای مختلف گوشه گشودگی از دو روش اجزای محدود و حل تحلیلی حاضر مورد بررسی قرار گرفته است. زاویه چرخش گشودگی در این حالت 45 درجه می‌باشد. این مقایسه برای ماده کامپوزیتی گرافیت/اپوکسی انجام شده است. نزدیکی نتایج دو روش تأکیدی بر درستی حل تحلیلی حاضر است.

4- نتایج

در این مقاله، به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف همچون زاویه بار (α)، زاویه چرخش گشودگی (β)، انحنای گوشه گشودگی (w)، نسبت طول به عرض (c) و همچنین تأثیر نحوه چیدمان لایه‌ها، بر روی توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مستطیلی پرداخته می‌شود. برای این منظور از کامپوزیت‌های گرافیت/اپوکسی و شیشه/اپوکسی که خواص مکانیکی آن‌ها در جدول 1 ارائه شده، استفاده شده است.



شکل 5 مقایسه تنش اطراف گشودگی مربعی از دو روش حل تحلیلی و اجزاء محدود

اگر در رابطه (15) تابع U از رابطه (10) جایگذاری شود رابطه (16) را داریم:

$$\begin{aligned} 2\text{Re}[\varphi_0(z_1) + \psi_0(z_2)] &= -\int_0^s Y_N ds + C_1 = f_1^0 \\ 2\text{Re}[s_1\varphi_0(z_1) + s_2\psi_0(z_2)] &= \int_0^s X_N ds + C_2 = f_2^0 \end{aligned} \quad (16)$$

به جای z_1 و z_2 در معادلات فوق به ترتیب مقادیر $Z_1=X+S_1Y$ و $Z_2=X+S_2Y$ جایگذاری می‌شود. برای محاسبه توابع تنش از رابطه شوارتز استفاده می‌شود(رابطه(17)):

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} U(\theta) \frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi} \frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0 \quad (17)$$

در این انتگرال $U(\theta)$ قسمت حقیقی تابع $F(\xi)$ روی دایره‌ای به شعاع واحد (γ) می‌باشد و α_0 یک ثابت حقیقی است. با ضرب هر دو طرف معادله

$$(16) \text{ در } \frac{1}{2\pi i} \frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi} \frac{d\sigma}{\sigma} \text{ و گرفتن انتگرال روی دایره واحد و استفاده از قضیه شوارتز می‌توان رابطه (18) نوشت:}$$

$$\begin{aligned} s_1\Phi_0(\xi) + s_2\Psi_0(\xi) &= \frac{1}{4\pi i} \int f_2^0(\theta) \frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi} \frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0 \\ \Phi_0(\xi) + \Psi_0(\xi) &= \frac{1}{4\pi i} \int f_1^0(\theta) \frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi} \frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0 \end{aligned} \quad (18)$$

با حل معادلات بالا برحسب φ_0 و ψ_0 توابع تحلیلی (19) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\xi) &= \frac{i}{4\pi(s_1 - s_2)} \int (s_2 f_1^0 - f_2^0) \frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi} \frac{d\sigma}{\sigma} \\ \Psi_0(\xi) &= \frac{-i}{4\pi(s_1 - s_2)} \int (s_1 f_1^0 - f_2^0) \frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi} \frac{d\sigma}{\sigma} \end{aligned} \quad (19)$$

باتوجه به اینکه در مرز گشودگی $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ است و مطابق با مرجع [3] توابع شرایط مرزی f_1^0 و f_2^0 به دست می‌آیند. بعد از محاسبه تابع تنش بر حسب φ_0 و ψ_0 می‌توان مولفه‌های تنش را به صورت رابطه (20) تعیین کرد:

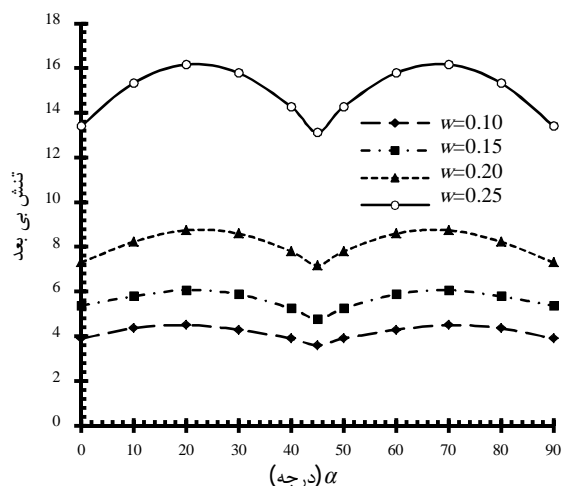
$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Re} \left[s_1^2 \varphi'(z_1) + s_2^2 \psi'(z_2) \right] \\ \sigma_y &= 2\text{Re} \left[\varphi'(z_1) + \psi'(z_2) \right] \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re} \left[s_1 \varphi'(z_1) + s_2 \psi'(z_2) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

توابع تحلیلی $\varphi_0(z_1)$ و $\psi_0(z_2)$ با توجه به شرایط مرزی اطراف گشودگی و شرایط بارگذاری در بی‌نهایت، قابل محاسبه خواهند بود.

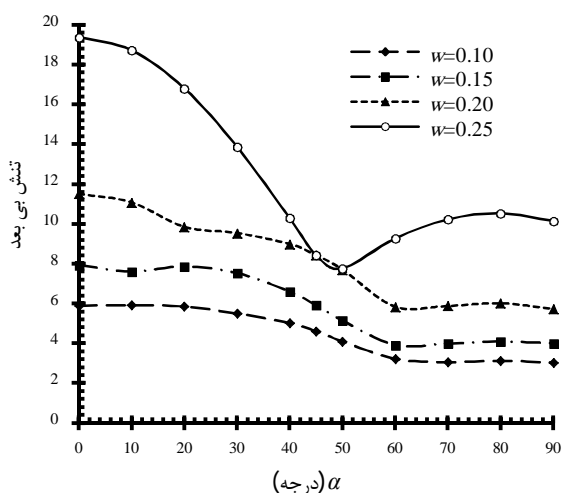
3- بررسی صحت جواب‌ها

برای راستی آزمایی نتایج حاصل از حل تحلیلی از روش اجزاء محدود (نرم افزار آباکوس) استفاده شده است. برای این منظور مدلی از مسأله حاوی گشودگی مربعی برای ماده گرافیت/اپوکسی با چیدمان لایه‌ای $[0 / 90]_s$ تحت بارگذاری کششی در نرم‌افزار آباکوس ایجاد و نتایج حاصل با نتایج بدست آمده از حل تحلیلی ارائه شده در این تحقیق مقایسه شده است.

همان‌طور که در شکل 4 دیده می‌شود زمانی که بارگذاری در جهت افق می‌باشد ($\alpha=0$)، بیشترین مقدار تنش در گوشه‌هایی از گشودگی که با جهت بارگذاری زاویه 90 درجه می‌سازند اتفاق می‌افتد. لازم به توضیح است که در این شکل $w=0/1$ و $c=1$ است.



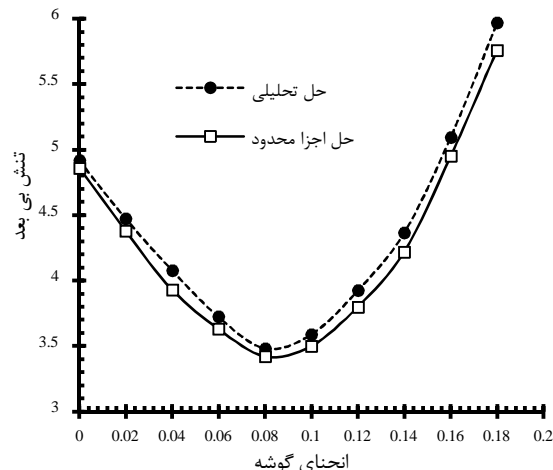
شکل 8 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $s[45 / -45]$ برحسب زاویه اعمال بار در w های مختلف



شکل 9 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $s[30 / 0 / -30]$ برحسب زاویه اعمال بار در w های مختلف

زاویه باری که این تنش تحت آن اتفاق می‌افتد برای چیدمان $s[0 / 90]$ ، صفر یا 90 درجه است و برای چیدمان $s[45 / -45]$ ، $22/5$ یا $67/5$ درجه است. رفتار تغییر تنش بی‌بعد با زاویه بار بسیار با دیگر چیدمان‌ها متفاوت است؛ ولی در این مورد نیز بیشترین تنش ممکن برای w های مختلف در زاویه صفر درجه رخ می‌دهد.

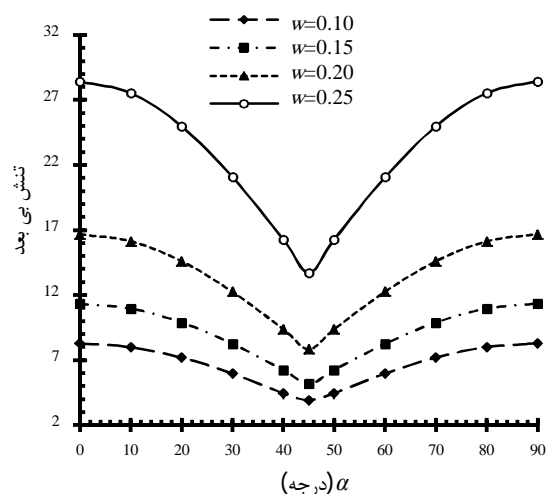
در شکل‌های 10 و 11 برای چیدمان‌های مختلف، تغییر تنش بی‌بعد برحسب w نشان داده شده است. نتایج ارائه شده در این شکل‌ها برای زوایای بار و چرخش صفر درجه است. شکل 10 تغییرات تنش را برای ماده گرافیت/اپوکسی و شکل 11 این تغییرات را برای ماده شیشه/اپوکسی نشان می‌دهد. همانطور که انتظار می‌رود با کاهش w و نرم‌تر شدن انحنا گوشه گشودگی مقدار تنش بی‌بعد برای هر دو ماده و برای همه چیدمان‌های لایه‌ای کاهش می‌یابد تا جایی که برای $w=0$ که گشودگی شبه مربعی شکل خود را از دست داده و به دایره تبدیل می‌شود؛ کمترین مقدار تنش بی‌بعد برای تمامی چیدمان‌ها پیش می‌آید. با افزایش مقدار w مقدار تنش بی‌بعد با شیب ملایمی افزایش می‌یابد.



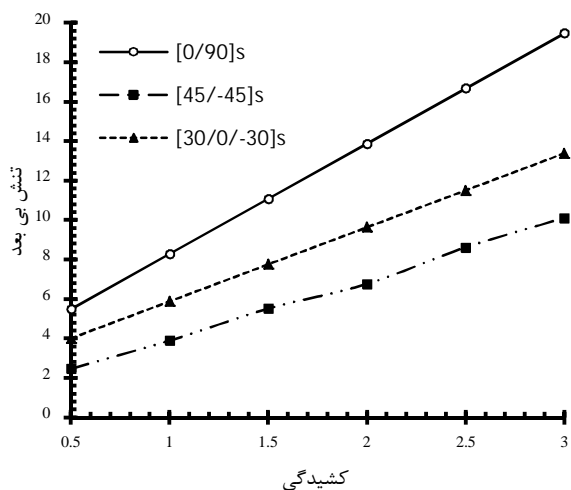
شکل 6 مقایسه تنش بی‌بعد اطراف گشودگی شبه مربعی برای ماده گرافیت/اپوکسی $s[0 / 90]$ برحسب w از دو روش حل تحلیلی و اجزا محدود

4-1- تاثیر انحنا گوشه (w) و کشیدگی (c) گشودگی

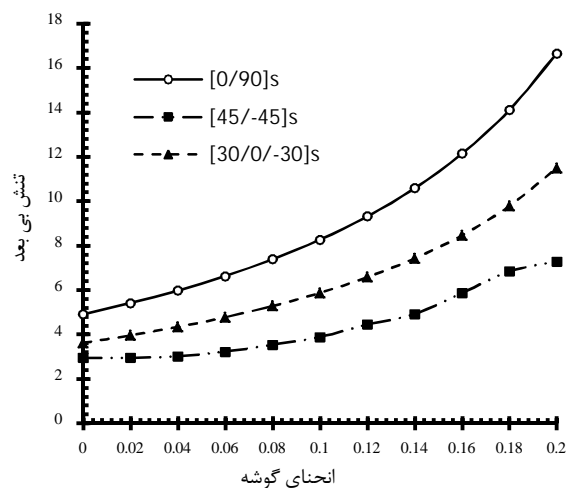
همانطور که در تابع نگاشت به آن اشاره شد؛ پارامترهای w و c مستقیماً بر هندسه گشودگی تأثیر می‌گذارند به گونه‌ای که با تغییر در مقدار w میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی قابل کنترل خواهد بود. همچنین مقدار c نشان‌دهنده نسبت طول به عرض گشودگی است. نتایج ارائه شده در این بخش برای زاویه چرخش گشودگی صفر درجه می‌باشد. همانطور که در شکل‌های 7 تا 9 برای ماده گرافیت/اپوکسی دیده می‌شود؛ تغییر تنش بی‌بعد با زاویه بار، در w های مختلف به شدت به نحوه چیدمان لایه‌ها وابسته است. مثلاً در مورد چیدمان $s[0 / 90]$ ، کمترین تنش ممکن در زاویه بار 45 درجه اتفاق می‌افتد. حال آنکه برای چیدمان $s[45 / -45]$ ، کمترین تنش ممکن در زوایای بار صفر، 45 و 90 درجه رخ می‌دهد. برای چیدمان $s[30 / 0 / -30]$ ، رفتار کاملاً متفاوت است و با تغییر w مقدار و زاویه باری که کمترین تنش ممکن اتفاق می‌افتد؛ تغییر می‌کند. زاویه باری که تحت آن بیشترین تنش ممکن در w های مختلف رخ می‌دهد نیز در چیدمان‌های مختلف، متفاوت است. برای چیدمان $s[0 / 90]$ ، این زاویه در w های مختلف یکسان است. اگرچه مقدار بیشترین تنش به شدت به w وابسته است. این رفتار برای چیدمان $s[45 / -45]$ نیز دیده می‌شود.



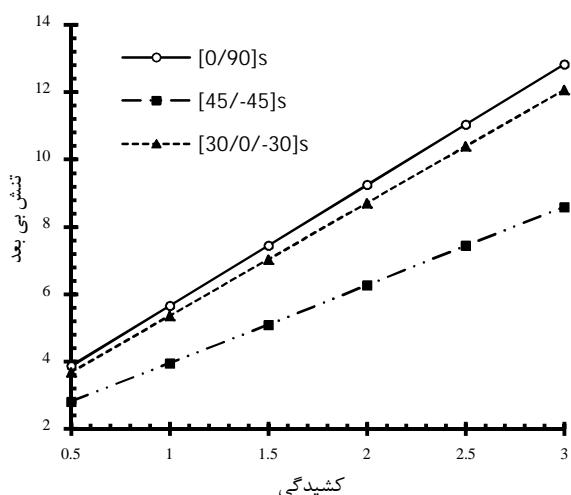
شکل 7 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $s[0 / 90]$ برحسب زاویه اعمال بار در w های مختلف



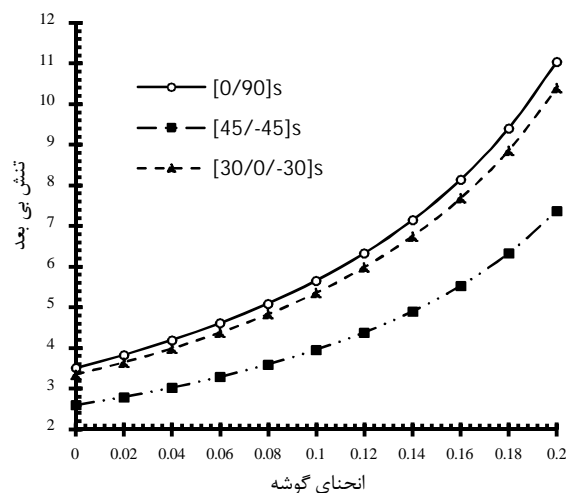
شکل 12 بررسی تغییرات تنش بی بعد بر حسب C برای سه چیدمان ماده گرافیت/اپوکسی برای $w=0/1$



شکل 10 بررسی تغییرات تنش بی بعد بر حسب w برای سه چیدمان گرافیت/اپوکسی برای $c=1$



شکل 13 بررسی تغییرات تنش بی بعد بر حسب C برای سه چیدمان ماده شیشه/اپوکسی برای $w=0/1$



شکل 11 بررسی تغییرات تنش بی بعد بر حسب w برای سه چیدمان شیشه/اپوکسی برای $c=1$

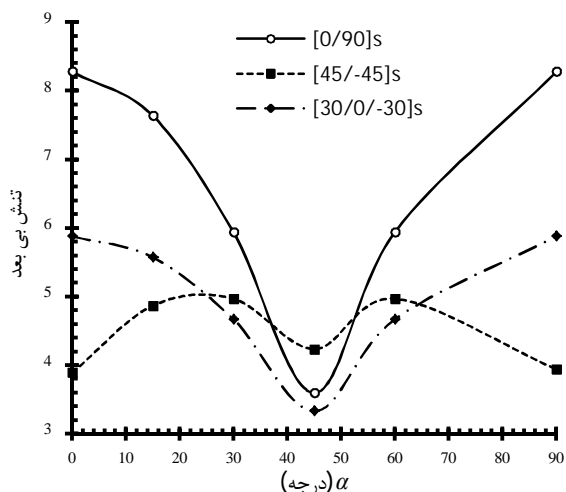
همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد؛ کاهش مقدار تنش بی بعد با کاهش مقدار C ، در چیدمان‌های مختلف، بستگی به زاویه بار هم دارد. در زوایای بار خاصی با کاهش C ، مقدار تنش بی بعد کاهش می‌یابد و برای بعضی دیگر از زوایای بار مانند زاویه بار 90 درجه، این رفتار کاملاً متفاوت است. تغییرات بیشترین تنش بی بعد، رفتار منظم‌تری دارد. برای همه چیدمان‌ها این تنش با کاهش C ، کاهش می‌یابد. در مورد چیدمان‌های $[0/90]_s$ و $[30/0/-30]_s$ ، بیشترین تنش بی بعد برای تمامی C ها، در زاویه بار صفر درجه رخ می‌دهد و برای چیدمان $[45/-45]_s$ برای C های مختلف، در زاویه بار 22.5° اتفاق می‌افتد.

4-2- تأثیر زاویه چرخش گشودگی (β)

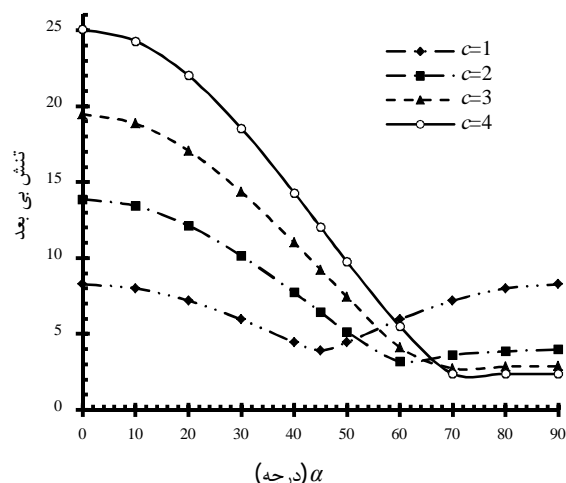
در این قسمت سعی می‌شود برای زاویه بار صفر درجه و w و C مشخصی به بررسی تأثیر زاویه چرخش گشودگی پرداخته شود. شکل‌های 17 و 18 به ترتیب برای کامپوزیت‌های گرافیت/اپوکسی و شیشه/اپوکسی، تغییرات تنش بی بعد بر حسب زاویه چرخش گشودگی برای $w=0/1$ و $c=1$ را نشان می‌دهد. با توجه به نتایج حاصل از این شکل‌ها به وضوح دیده می‌شود که برای گرافیت/اپوکسی در زاویه چرخش 45 درجه مقدار تنش بی بعد برای

همین بررسی را می‌توان برای تغییرات C نیز مورد مطالعه قرار داد. مطابق شکل‌های 12 و 13 تغییر مقدار تنش بی بعد با تغییرات C رابطه تقریباً خطی داشته و افزایش یا کاهش این پارامتر به ترتیب موجب افزایش و یا کاهش تنش بی بعد خواهد شد. برای دستیابی به یک نگاهت هم‌نوا مقدار C در تابع نگاهت باید در محدوده خاصی باشد لذا سعی شده است نتایج ارائه شده برای C در این محدوده قرارگیرد. با توجه به رابطه (2) پارامتر C فقط در جهت y تابع نگاهت اعمال شده است لذا مطابق شکل 2 با افزایش مقدار C شکل گشودگی در جهت y کشیده می‌شود. روند افزایش تنش بی بعد با افزایش مقدار C برای وقتی است که زاویه اعمال بار صفر باشد یا به عبارت دیگر زاویه بار عمود بر امتداد کشیدگی گشودگی باشد. برای وقتی که بارگذاری در جهت y است ($\alpha=90$) با افزایش C تنش بی بعد کاهش می‌یابد.

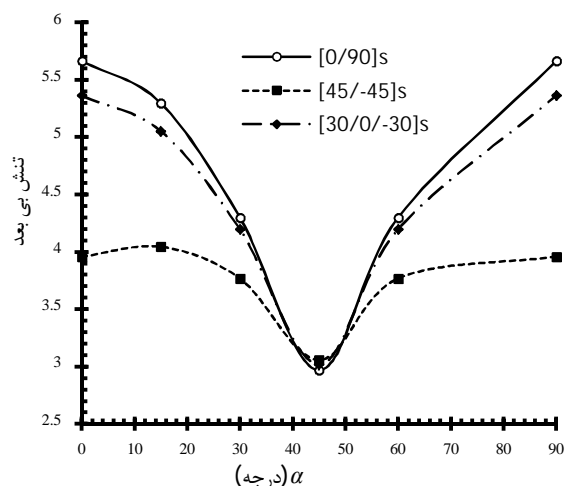
مطابق آنچه در شکل‌های 14 تا 16 دیده می‌شود؛ تغییرات تنش بی بعد بر حسب زاویه بار در C های مختلف و برای $w=0/1$ ، رفتار نامنظم‌تری دارد. نتایج این شکل‌ها برای ماده گرافیت/اپوکسی می‌باشد. برای تمامی چیدمان‌ها و در C های مختلف، در زاویه بار خاصی تنش بی بعد کمترین مقدار است. کمترین تنش بی بعد برای چیدمان‌های مختلف، با تغییر C ، تغییر می‌کند.



شکل 17 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد بر حسب چرخش گشودگی برای سه چیدمان ماده گرافیت/اپوکسی برای $w=0/1$ و $C=1$



شکل 14 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $[0/90]_s$ بر حسب زاویه اعمال بار در C های مختلف

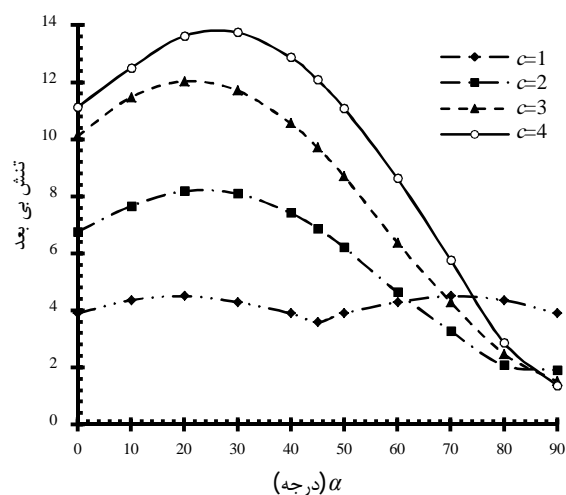


شکل 18 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد بر حسب چرخش گشودگی برای سه چیدمان ماده شیشه/اپوکسی برای $w=0/1$ و $C=1$

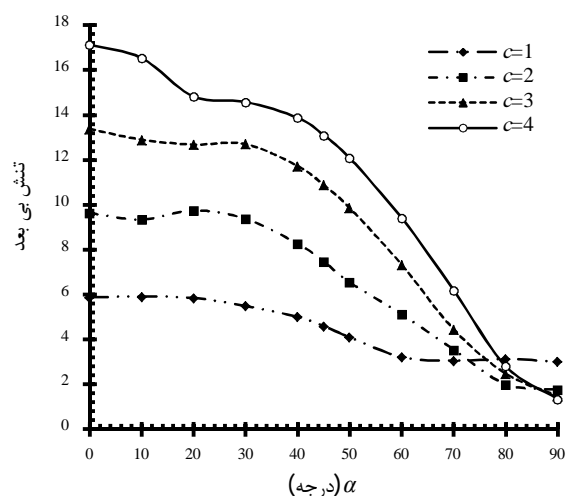
چیدمان‌های $[0/90]_s$ و $[30/0/-30]_s$ ، کمترین مقدار ممکن است. زاویه چرخش مربوط به کمترین تنش بی‌بعد برای چیدمان $[45/-45]_s$ ، صفر یا 90 درجه است. در مورد شیشه/اپوکسی مطابق شکل 18 برای هر سه چیدمان، زاویه چرخشی که تحت آن کمترین تنش بی‌بعد حاصل می‌شود؛ 45 درجه است.

3-4- تأثیر زاویه چرخش گشودگی (β) و زاویه بار (α)

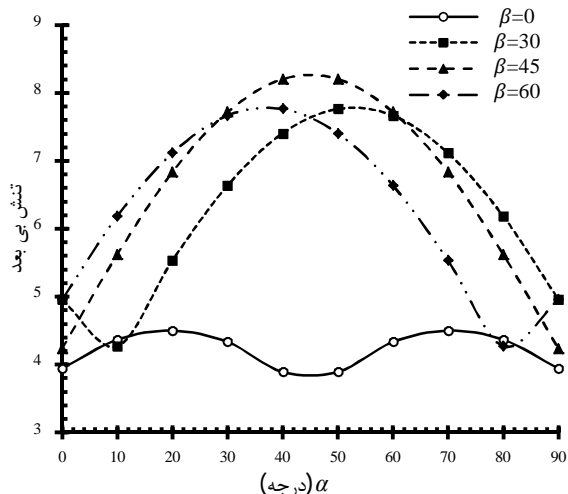
باتوجه به نتایج حاصل از بخش قبل، زاویه چرخش گشودگی یکی از پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش اطراف گشودگی می‌باشد. لذا در این قسمت سعی می‌شود تا به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف مانند زاویه بار و w در کنار زاویه چرخش گشودگی پرداخته شود. در شکل‌های 19 تا 21 به بررسی تغییرات تنش بی‌بعد بر حسب زاویه بار در زوایای چرخش مختلف پرداخته شده است. مقایسه منحنی‌های مختلف برای چیدمان‌های مورد بحث در هریک از شکل‌های مذکور گویای تأثیر به سزای این پارامتر بر مقدار تنش بی‌بعد است. از این شکل‌ها به وضوح نتیجه گرفته می‌شود که برای تمامی چیدمان‌ها، مقدار و موقعیت تنش بی‌بعد بیشینه با تغییر زاویه چرخش، تغییر



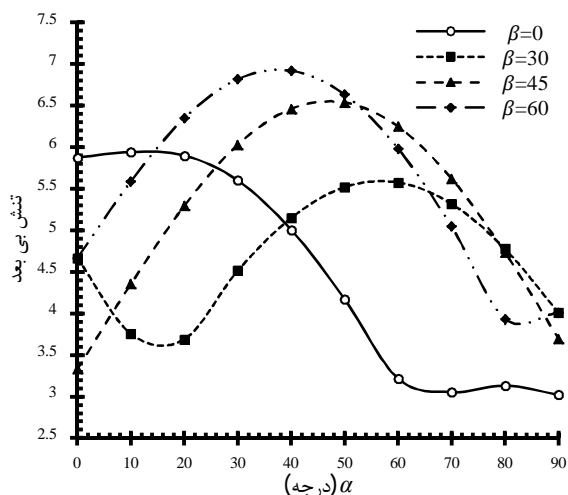
شکل 15 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $[45/-45]_s$ بر حسب زاویه اعمال بار در C های مختلف



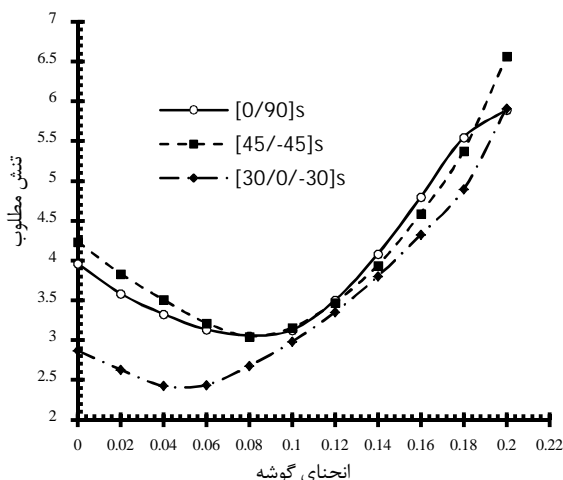
شکل 16 بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای چیدمان $[30/0/-30]_s$ بر حسب زاویه اعمال بار در C های مختلف



شکل 20 بررسی تغییرات تنش بی بعد برای چیدمان لایه‌ای $[45 / -45]_s$ بر حسب زاویه اعمال بار در زوایای چرخش مختلف



شکل 21 بررسی تغییرات تنش بی بعد برای چیدمان لایه‌ای $[30 / 0 / -30]_s$ بر حسب زاویه اعمال بار در زوایای چرخش مختلف



شکل 22 بررسی تغییرات تنش بی بعد بر حسب انحنای گوشه گشودگی برای سه چیدمان گرافیت/پوکسی برای $c=1$

می‌کند. برای مثال با توجه به شکل 19، برای چیدمان لایه‌ای $[0 / 90]_s$ مقدار کمترین تنش بی بعد مربوط به زاویه چرخش 45 درجه $3/59$ بوده که در زاویه بار صفر درجه اتفاق می‌افتد حال آنکه برای زاویه چرخش 60 درجه این مقدار $3/21$ است که در زاویه بار 60 درجه رخ می‌دهد.

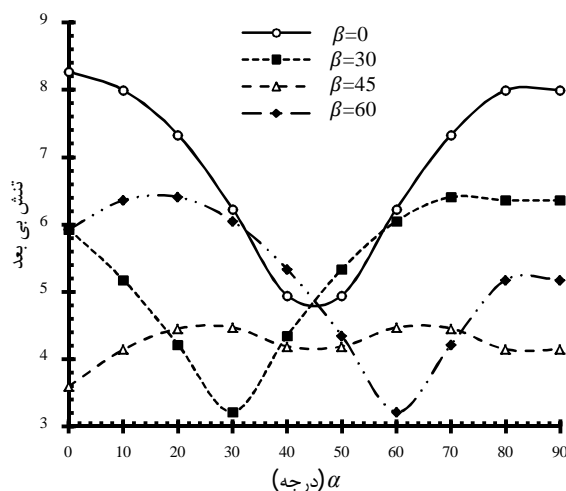
برای دیگر چیدمان‌ها نیز با توجه به شکل‌های 20 و 21 این رفتار دیده می‌شود. نتایجی که در این قسمت آورده شده است مربوط به ماده گرافیت/پوکسی است.

در بیشتر مسائل طراحی، طراح به دنبال کمترین تنش ممکن ایجاد شده در سازه در اثر بارهای اعمالی است. همانطور که در شکل‌های 19 تا 21 دیده می‌شود؛ برای یک زاویه چرخش خاص، مقدار تنش بی بعد در زوایای بار مشخصی کمترین مقدار را دارد. این مقدار تنش بی بعد، تنش بی بعد مطلوب و یا به اختصار تنش مطلوب نام گذاری می‌شود. در مسائل طراحی هدف نزدیک شدن به شرایط مربوط به تنش مطلوب است. بنابراین در ادامه سعی می‌شود تغییرات تنش مطلوب بر حسب w های مختلف مورد بررسی قرار گیرد. شکل 22 تغییرات تنش مطلوب را برای هر سه نوع چیدمان مختلف گرافیت/پوکسی بر حسب تغییرات w نشان می‌دهد. همان‌طور که در این شکل مشخص است، بر خلاف نتایج حاصل از شکل‌های 10 و 11، حالت بهینه پارامتر انحنای گوشه گشودگی در $w=0$ اتفاق نمی‌افتد بلکه برای چیدمان‌های $[0 / 90]_s$ و $[45 / -45]_s$ در $w=0/08$ و برای چیدمان لایه‌ای $[30 / 0 / -30]_s$ در $w=0/04$ رخ می‌دهد. زوایای بار و چرخش متناظر با این حالت بهینه برای هر سه نوع چیدمان در جدول 2 آورده شده است. لازم به توضیح است که این نتایج برای حالت $c=1$ است.

مقدار تنش مطلوب برای گشودگی دایره‌ای ($w=0$) و سه چیدمان $[0 / 90]_s$ و $[45 / -45]_s$ و $[30 / 0 / -30]_s$ به ترتیب برابر $3/96$ و $4/23$ و $2/86$ می‌باشد. با مقایسه این مقادیر با مقادیر موجود در جدول 2 به وضوح دیده می‌شود که گشودگی دایره‌ای بهترین شکل گشودگی نیست.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله با توسعه روش حل لختی‌سکی، از روش تحلیلی متغیر مختلط توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی در چندلایه‌های متقارن تحت کشش، مورد بررسی قرار گرفت. مقایسه نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج



شکل 19 بررسی تغییرات تنش بی بعد برای چیدمان $[0 / 90]_s$ بر حسب زاویه اعمال بار در زوایای چرخش مختلف

جدول 2 مقادیر بهینه پارامترهای مورد بررسی برای چیدمان‌های

مختلف ماده گرافیت/اپوکسی

تنش مطلوب	انحنای گوشه (w)	زاویه چرخش		چیدمان لایه‌ای
		گشودگی (درجه)	زاویه بار (درجه)	
3/05	0/08	60	60	[0 / 90] _s
3/04	0/08	80	70	[45 / -45] _s
2/42	0/04	80	80	[30 / 0 / -30] _s

بدست‌آمده از روش‌های عددی نشان‌دهنده صحت و دقت روش حل تحلیلی حاضر است. در این مطالعه به‌خوبی نشان داده شد که پارامترهای متعددی از قبیل زاویه چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه گشودگی، چیدمان لایه‌ها، زاویه بار و نسبت طول به عرض گشودگی بر توزیع تنش اطراف گشودگی تأثیرگذار هستند. به‌منظور دسترسی به طرحی اقتصادی و ایمن، بررسی دقیق این پارامترها و انتخاب مقادیر بهینه آن‌ها لازم است. بدین منظور تأثیر هر پارامتر برای چیدمان‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که با انتخاب پارامترهای بهینه برای صفحه گرافیت/اپوکسی حاوی گشودگی شبه مربعی و چیدمان‌های [0 / 90]_s و [45 / -45]_s و [30 / 0 / -30]_s مقدار تنش بی‌بعد نسبت به گشودگی دایره‌ای به‌ترتیب تا 23، 28 و 15/4 درصد کاهش می‌یابد. از دیگر نتایج مهم در این تحقیق این است که: نرم‌تر شدن گوشه‌های گشودگی تنها راه کاهش تنش بی‌بعد نیست بلکه انتخاب زاویه چرخش گشودگی مناسب هم در این کاهش تنش، مؤثر است. بررسی تأثیر زاویه چرخش گشودگی، انحنای گوشه گشودگی و مطالعه تأثیر متقابل تمامی پارامترهای تأثیرگذار به‌منظور دستیابی به نتایج بهینه از جنبه‌های نوآوری این مقاله محسوب می‌شود.

6- مراجع

- [1] C. Y. Gao, J. Z. Xiao, Y. L. Ke, FE analysis of stress concentrations in composite plates with multiple holes for zigzag multi-fastened joints, *Materials Science Forum*, Vol. 770, pp.17-20, 2014.
- [2] N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Second edition, Netherlands, Noordhoff, 1962.
- [3] G. N. Savin, *Stress Concentration Around Holes*, New York: Pergamon Press, 1961.
- [4] J. D. Eshelby, W. T. Read, W. Shockley, Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory, *Acta Metallurgica*, Vol. 1, No. 3, pp. 251-259, 1953.
- [5] A. N. Stroh, Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. *Philosophical Magazine*, Vol. 3, No. 30, pp. 625-646, 1958.
- [6] S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic Plates*, Second edition, New York: Gordon and Breach Science, 1968.
- [7] W. T. Chen, Plane thermal stress at an insulated hole under uniform heat flow in an orthotropic medium, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 34, No. 1, pp. 133-136, 1967.
- [8] T. D. Jong, Stresses around rectangular holes in orthotropic plates, *Journal of Composite Materials*, Vol. 15, No. 3, pp. 311-328, 1981.
- [9] K. Rajaiyah, N. K. Naik, Optimum quasi-rectangular holes in infinite orthotropic plates under in-plane loadings, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 4a, pp. 891-892, 1983.
- [10] R. W. Zimmerman, Compressibility of two-dimensional cavities of various shapes, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, No. 3, pp. 500-504, 1986.
- [11] C. Hwu, Anisotropic plates with various openings under uniform loading or pure bending, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, No. 3, pp. 700-706, 1990.
- [12] W. Hufenbach, M. Schaffer, A. S. Herrmann., Calculation of the stress and displacement field of anisotropic plates with elliptical hole, *Ingenieur Arch*, Vol. 60, pp.507-517, 1990.
- [13] J. Daooust, S. V. Hoa, An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes, *Composite Structures*, Vol. 19, No. 2, pp. 107-130, 1991.
- [14] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress analysis of perforated composite plates, *Composite Structures*, Vol. 71, No. 4, pp. 463-468, 2005.
- [15] G. H. Asmar, T.G. Jabbour, Stress analysis of anisotropic plates containing rectangular holes, *International journal of mechanics and solids*, Vol. 2, No. 1, pp. 59-84, 2007.
- [16] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress analysis of composite plates with quasi-square cut out subjected to uniaxial tension, *Journal of Reinforced plastics and composites*, Vol. 29, No. 13, pp. 2015-2026, 2010.
- [17] J. M. Whitney, R. J. Nuismer, Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations, *Journal of Composite Materials*, Vol. 8, No. 3, pp. 253-265, 1974.
- [18] S.P. Garbo, J.M. Ogonowski, Strength predictions of composite laminates with unloaded fastener holes, *AIAA Journal*, Vol. 18, No. 5, pp. 585-589, 1980.
- [19] F. Chang, R. A. Scott, G. S. Springer, Failure of composite laminates containing pin loaded holes- method of solution, *Journal of Composite Materials*, Vol. 18, No. 3, pp. 255-278, 1984.
- [20] E. F. Rybicki, D. Schmueser, Effect of stacking sequence and lay-up angle on free edge stresses around a hole in a laminated plate under tension, *Journal of Composite Materials*, Vol. 12, No. 3, pp.300-313, 1978.
- [21] S. Vellaichamy, B. G. Prakash, S. Brun, Optimum design of cutouts in laminated composite structures, *Computers and Structures*, Vol. 31, No. 3, pp. 241-246, 1990.
- [22] N. Bonora, M. Costanzi, M. Marchetti, On closed form solution for the elastic stress field around holes in orthotropic composite plates under in-plane stress conditions, *Composite Structures*, Vol. 25, pp. 139-156, 1993.
- [23] H. G. Beom, Y. Y. Earmme, Complex variable method for problems of a laminate composed of multiple isotropic layers, *International Journal of Fracture*, Vol. 92, No. 4, pp. 305-324, 1998.
- [24] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, A general solution for stresses around holes in symmetric laminates under inplane loading, *Composite Structures*, Vol. 49, No. 3, pp. 339-354, 2000.
- [25] G. Romeo, Analytical behavior of laminates with rectangular opening under biaxial tension, compression and shear loads, *Journal of Composite Materials*, Vol. 35, No. 8, pp. 639-64, 2001.
- [26] D. K. N. Rao, M. R. Babu, K.R. N. Reddy, D. Sunil, Stress around square and rectangular cutouts in symmetric laminates, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 12, pp. 2845-2859, 2010.
- [27] W. Hufenbach, B. Grüber, R. Gottwald, M. Lepper, B. Zhou, Analytical and experimental analysis of stress concentration in notched multilayered composite with finite outer boundaries, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 46, No. 5, pp. 531-538, 2010.
- [28] W. Hufenbach, B. Grüber, R. Gottwald, M. Lepper, B. Zhou, An analytical method for the determination of stress and strain concentrations in textile-reinforced GF/PP composites with elliptical cutout and a finite outer boundary and its numerical verification, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 83, No. 1, pp. 125-135, 2013.
- [29] W. Becker, Complex method for the elliptical hole in an unsymmetric laminate, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 63, No. 3, pp. 159-169, 1993.
- [30] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, A general solution for stress resultants and moments around holes in unsymmetric laminates, *Composite Structures*, Vol. 49, No. 1, pp. 27-39, 2000.
- [31] P. Chen, Z. Shen, Stress resultants and moments around holes in unsymmetrical composite laminates subjected to remote uniform loading, *Mechanics Research Communications*, Vol. 30, No. 1, pp. 79-86, 2003.
- [32] H. K. Rangavittal, A. C. B. Naidu, B. Dattagurub, T. S. Ramamurthy, Analytical solutions for load transfer through smooth elastic pin in an infinite orthotropic plate, *Composite Structures*, Vol. 30, No. 3, pp. 329-339, 1995.
- [33] E. Madenci, L. Ileri, Analysis of pin-loaded holes in composite laminates under combined bearing- bypass and shear, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 32, No. 14, pp. 2053-2062, 1995.
- [34] B. Okutan, Behavior of Pin-loaded Laminated Composites, *Experimental Mechanics*, Vol. 46, No. 5, pp. 589-600, 2006.
- [35] L. Fischer, How to predict structural behavior of RP laminates, *Modern Plastics*, Vol.37, No. 6, pp.122-209, 1960.