مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1397، دوره 18، شماره 01، ص‌ص 370-378

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بهینه‌سازی توپولوژی سازه با در نظر گرفتن قیود تنش خوشه‌بندی شده

حبیب صفار نجیب[1]، بهروز حسنی[2*]، نیما یعقوبی[3]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
3- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
* مشهد، صندوق پستی 9177948974، b_hassani@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 10 آبان 1396
پذیرش: 02 دی 1396
ارائه در سایت: 22 دی 1396

کلید واژگان:
بهینه‌سازی توپولوژی سازه
قید تنش
خوشه‌بندی
جریمه تنش
SIMP
MMA

چکیده

در این مقاله روشی برای بهبود اعمال قید تنش در طراحی توپولوژی سازه با جرم کمینه ارائه شده است. برای فرمول‌بندی مسئله بهینه‌سازی توپولوژی از روش اجزای محدود و برای مدل‌سازی مصالح از تابع چگالی مصنوعی استفاده شده است. برای محاسبه میزان تنش در اجزا از تنش فون‌میزز در نقاط انتگرال‌گیری گوس موسوم به نقاط فوق‌همگرا استفاده شده است. به منظور کاهش زمان و هزینه محاسبات از فن خوشه‌بندی قیود تنش مجتمع شده با روش پی‌نُرم برای کاستن از تعداد قیود مسئله بهینه‌سازی، که متناسب با تعداد المان‌های به کار رفته در مدل محاسباتی مسئله است، استفاده شده است. به این منظور تعداد زیادی از قیدهای تنش محلی با تعداد محدودی قید تنش سراسری جایگزین می‌شود. توصیف کاملی از فرمول‌بندی و تحلیل حساسیت قید تنش که با استفاده از روش الحاقی صورت پذیرفته، ارائه شده است. به علت پیچیدگی بهینه‌سازی توپولوژی با استفاده از قیدهای تنش، روش مجانب‌های متحرک برای حل مسئله بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گرفته است. برای بررسی کارایی روش چند مثال تنش صفحه‌ای ارائه و با سایر پژوهش‌ها ارزیابی شده است. نتایج به‌دست آمده حاکی از مزیت روش محاسباتی ارائه شده در تولید توپولوژی‌های قابل قبول و کاربردی است.

Structural topology optimization considering clustered stress constraints

Habib Saffar Najib, Behrooz Hassani*, Nima Yaghoobi

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
* P.O.B. 9177948974, Mashhad, Iran, b_hassani@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 01 November 2017
Accepted 23 December 2017
Available Online 12 January 2018

Keywords:
Structural Topology Optimization
Stress Constraint
Clustering
Stress Penalizatio
SIMP
MMA

ABSTRACT

This paper presents an improved approach for handling stress constraints in minimum weight topological design. The Finite Element Method (FEM) and the material model of Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) are used to formulate the topology optimization problem. To evaluate the stress values in elements, the von Mises stresses are calculated at the so called super-convergent Gauss quadrature points. To reduce the time and computational cost, a clustering approach is here adopted and the *P*-norm integrated stress constraints are used. Doing this, a large number of local constraints are replaced with a few global ones and consequently the stress constraint sensitivities are calculated by using the adjoint method. The employed formulation as well as a complete explanation of the sensitivity analysis is provided. Due to the complexity of the topology optimization problem in the presence of stress constraints, the Method of Moving Asymptotes (MMA) is here employed. To demonstrate the performance and capability of the procedure, a couple of plane stress elasticity problems are taken into consideration. The resulted layouts indicate the superiority of the approach in generating acceptable and practical topological designs.

1- مقدمه

انسان همواره تلاش نموده تا به منظور افزایش بهره‌وری و کارایی و به ضرورت نیاز طراحی اشیا را بهبود ببخشد. این تلاش موجب پیشرفت جامعه بشری است و می‌توان از آن به‌عنوان مبدا بهینه‌سازی یاد کرد. برای مثال سازه‌های دایره‌ای از جنس چوب برای جابجایی اشیای سنگین در عهد باستان استفاده شده است. این مفهوم در ادامه توسعه یافت و منجر به طراحی چرخ شد، که در مراحل بعد موجب اختراعاتی همچون چرخ‌دنده، موتور بخار، خودرو، قطار و دیگر وسایل حمل‌ونقل شده است.

امروزه به‌علت محدود بودن منابع و انرژی در دسترس انسان، استفاده مؤثرتر از آن‌ها حائز اهمیت است و از مهم‌ترین اهداف مهندسی به شمار می‌رود. در این رابطه بهینه‌سازی به‌سادگی به‌عنوان یک ابزار ارزشمند در جستجو برای «بهترین» تعریف شده است. به‌عبارت دیگر هدف اصلی طراحی مهندسی پیدا کردن بهترین حل ممکن برای یک مسئله خاص بوده، و به عبارتی می‌شود گفت بهینه‌سازی قلب مهندسی است [1].

در سال‌های اخیر پیشرفت‌های صورت گرفته در زمینه تجهیزات سخت‌افزاری رایانه‌ها و نیز توسعه‌ی روش‌های عددی، سبب افزایش چشمگیر توانایی سیستم‌های محاسباتی شده است. با افزایش توان محاسباتی، ظرفیت‌های بیشتری از بهینه‌سازی در علوم مهندسی نمود پیدا کرده است.

Please cite this article using:
برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:
H. Saffar Najib, B. Hassani, N. Yaghoobi, Structural topology optimization considering clustered stress constraints, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 01, pp. 370-378, 2018 (in Persian)

بنابراین بازنگری در همه زمینه‌ها جهت یافتن راه‌های جدید، می‌تواند نتایج قابل توجهی را به دنبال داشته باشد.

بهینه‌سازی عبارت است از تعیین بهترین نتیجه یا خروجی ممکن برای سیستم به گونه‌ای که همزمان برخی محدودیت‌ها و قیود را برآورده کند. در واقع هر مسئله‌ای که لازم باشد در آن پارامترهای معینی برای برآوردن قیود محاسبه شوند، می‌تواند به‌عنوان مسئله بهینه‌سازی رابطه‌سازی گردد. بهینه‌سازی در طراحی و نگه‌داری بسیاری از سیستم‌های مهندسی، اقتصادی و حتی اجتماعی به‌منظور کمینه‌کردن هزینه لازم و یا بیشینه‌کردن سود کاربرد دارد.

طراحی مهندسی سازه را می‌توان به سه مرحله تقسیم کرد. در مرحله اول با توجه به فضای طراحی، فرم و سیستم سازه مشخص می‌شود. مرحله دوم به تعیین شکل سازه و مشخصات هندسی مرزهای آن اختصاص دارد [2]. مرحله سوم، مرحله طراحی جزئیات سازه می‌باشد. این تقسیم‌بندی سبب پیدایش سه روش بهینه‌سازی سازه شده است که به ترتیب عبارت‌اند از بهینه‌سازی توپولوژیک، شکل و ابعادی سازه [3].

در بهینه‌سازی توپولوژی متداول بیشتر تحقیقات انجام شده تا به امروز معطوف به بهینه‌سازی سختی سازه‌ها با استفاده از مقدار مشخصی از جرم بوده است و متاسفانه عموماً تمرکز تنش‌های موضعی در گوشه‌ها و دیگر نواحی این سازه‌ها مشاهده می‌شود. با پیشرفت روزافزون سیستم‌های محاسباتی، طراحی توپولوژی سازه‌ها براساس فرکانس‌ها [4] و کنترل تنش هم مورد توجه قرار گرفته است. بهینه‌سازی سازه‌ها با در نظر گرفتن قید تنش به‌دلیل مواجهه با سه چالش اساسی پدیده تکینگی تنش، طبیعت محلی قیدها و رفتار به‌شدت غیرخطی تنش، از پیچیدگی زیادی برخوردار است [5]. پدیده تکینگی تنش زمانی به وجود می‌آید که المان‌هایی که چگالی آن‌ها، (که متغیرهای طراحی[1] مسئله بهینه‌سازی هستند)، به سمت صفر میل می‌کند، همچنان می‌توانند کرنش داشته باشند. این امر منجر به افزایش بعضاً قابل ملاحظه تنش می‌شود، درحالی‌که با خالی شدن المان اثر تنش آن باید صفر شود [6]. مسئله وابستگی محلی قیدهای تنش به این دلیل است که در محیط پیوسته قیدهای تنش باید در هر نقطه از ماده بررسی شوند. در بهینه‌سازی توپولوژی مقادیر تنش در هر المان محاسبه می‌شوند. راه‌حل مناسب برای جلوگیری از افزایش تعداد قیدهای تنش و متعاقباً کاهش هزینه محاسبات، جایگزینی قیدهای محلی با یک قید سراسری است.

1-1- بهینه‌سازی توپولوژی و ضرورت‌ها

بهینه‌سازی توپولوژی یکی از شاخه‌های بهینه‌سازی سازه‌ای است که به تعیین بهترین چیدمان سازه می‌پردازد. به‌عبارت دیگر هدف بهینه‌سازی توپولوژی تعیین تعداد، مکان و شکل سوراخ‌های سازه و نحوه ارتباط بین اعضا است. کاربرد عددی ایده‌ی توزیع ماده براساس مواد همگن‌شده برای اولین بار توسط بندسو و کیکوچی در 1988 انجام شد. در این روش، توپولوژی بهینه از بهینه‌کردن ابعاد حفره‌هایی که در مقیاس میکروسکوپی در نظر گرفته شده‌اند حاصل می‌گردد [3].

در سازه‌های هوافضا به دلیل محدودیت‌های هزینه، در طراحی و ساخت پرتابه و پرنده وزن سازه مهم‌ترین عامل تعیین‌کننده در این زمینه است؛ چراکه وزن سازه جزو وزن مرده محسوب می‌شود و افزایش آن، حتی به میزان کم، می‌تواند هزینه سوخت زیادی را در طول عمر سازه تحمیل کند. همچنین این افزایش، باعث می‌شود که نیروهای پیشرانش بیشتری برای حرکت سازه‌ی مورد نظر نیاز باشد؛ که علاوه بر بیشتر شدن وزن موتور، باعث افزایش حجم سوخت در دسترس و درنهایت نیز موجب افزایش بیش از پیش وزن می‌شود. از این‌رو بهینه‌سازی وزن این‌گونه سازه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [7].

در صنایع خودروسازی نیز تولید طرح‌هایی که دارای استحکام کافی، مقاوم، قابل‌اعتماد، امن، اقتصادی و با وزن بهینه باشند از اهمیت زیادی برخوردار است. سعی طراحان در ارضای این الزامات بعضا متضاد در مورد اجزای خودرو و دست‌یابی به طرح‌های مطلوب از طریق بهینه‌سازی سازه به‌طور کلی و از جمله بهینه‌سازی توپولوژی آن قابل دستیابی است.

1-2- تاریخچه مختصر

بهینه‌سازی سازه‌ای با استفاده از تحلیل به روش اجزای محدود برای اولین بار توسط اشمیت در سال 1960 معرفی شد. در سال 1964 دارن و همکاران از قیدهای تنش برای بهینه‌سازی خرپاها استفاده کردند [6]. در سال 1987 سوانبرگ الگوریتم مجانب‌های متحرک را برای حل نهایی مسائل بهینه‌سازی ارائه داد [8]. همزمان هیوز روش اجزای محدود را توسعه داد [9]. در سال 1988 بندسو و کیکوچی بهینه‌سازی توپولوژی را معرفی کردند [10] که به‌عنوان مبدا تاریخی این روش شناخته می‌شود و در سال 1989 بندسو برای اولین بار جریمه مواد همسانگرد را پیشنهاد داد [11] و تا سال 1992 رزوانی و همکاران برای دستیابی به یک مدل سیاه و سفید با استفاده از جریمه متغیرهای طراحی متوسط تلاش کردند و نام جریمه مواد همسانگرد جامد[2] را برای آن پیشنهاد دادند [12]. در سال 1990 کرش مشکل تکینگی برخی مسائل به‌ویژه پدیده تکینگی در قیود تنش را مطرح کرد [13] و در سال‌های 1992 تا 2001 رزوانی و همکاران [15,14] و چنگ و همکاران [17,16] و دیگران کارهایی را در این زمینه انجام دادند تا نهایتاً در سال 1998 دیوسینکس و زیگموند روش فیلتر متغیرهای طراحی پی‌نرم[3] را ارائه دادند [5]. در سال 1997 زیگموند و همکاران از بهینه‌سازی توپولوژی برای تولید سازه‌هایی با خواص انبساط حرارتی خارجی استفاده کردند. در سال 2001 برونس و ترترلی فیلتر متغیر طراحی معرفی کردند که علاوه‌بر پدیده شطرنجی، وابستگی شبکه را نیز برطرف می‌کرد [18]. در سال 2008 براگی جریمه تنش را برای حل بهینه‌سازی توپولوژی با استفاده از اجزای محدود پیشنهاد داد [19] و در سال 2010 لی و همکاران با اشاره به رفتار بشدت غیرخطی قیدهای تنش دستورالعمل عملی حل بهینه‌سازی توپولوژی با قید تنش را ارائه دادند [5] و در سال 2013 هلمبرگ و همکاران بهینه‌سازی توپولوژی سازه مقید شده با قید خستگی را با استفاده از خوشه‌بندی تنش ارائه دادند [20].

بهینه‌سازی توپولوژی در سال‌های گذشته با روش‌های مختلف و با قیدها و توابع مختلفی مورد بررسی قرارگرفته است؛ اما بهینه‌سازی با قیود تنش به علت مشکلات ناشی از تکینگی تنش تا سال 2009 دارای پاسخ‌های قابل ملاحظه‌ای نبوده است.

در سال‌های اخیر به موازات پیشرفت‌های حاصل شده در زمینه بهینه‌سازی تنش، بهینه‌سازی دمایی سازه یا به‌عبارتی بهینه‌سازی سازه در برابر تنش‌های حرارتی (به‌عنوان محرک‌های خارجی و بارگذاری) مورد بررسی قرار گرفته‌اند [22,21].

[1] Design variable

[2] Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)

[3] *P*-norm

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.21.8]

در این مقاله بهینه‌سازی توپولوژی با در نظر گرفتن قید تنش به منظور کاهش وزن سازه انجام شده است. به این منظور مدل ریاضی سازه با استفاده از المان‌های مربعی چهار گره‌ای گسسته‌سازی می‌گردد، سپس به کمک روش اجزای محدود تحلیل تنش روی آن انجام و با استفاده از روش‌های بهبود ارزیابی تنش که در بخش بهبود ارزیابی تنش این مقاله تشریح شده است، دقت و پیوستگی محاسبه تنش افزایش می‌یابد. در ادامه چگالی المان‌ها را به‌منظور جلوگیری از پدید آمدن اعضای نازک و دندانه‌دار فیلتر می‌کنیم. مسئله بهینه‌سازی توپولوژی به‌علت پیچیدگی ناشی از قیود آن، با استفاده از روش مجانب‌های متحرک[1] حل شده است [8]. در این الگوریتم برای هر مرحله از فرآیند تکرار یک زیر مسئله با تقریب محدب از مسئله اصلی تولید و حل می‌شود. پس از ارائه روش بهینه‌سازی و تحلیل تنش و تشریح فرمول‌بندی مسائل به ارائه چند مثال استاندارد و ارزیابی نتایج حاصل با دیگر پژوهش‌های انجام شده در این زمینه پرداخته شده است.

2- مدل‌سازی ریاضی

2-1- تحلیل تنش

بهینه‌سازی توپولوژی سازه با استفاده از قیدهای تنش، مستلزم تحلیل تنش در سازه بارگذاری شده و محاسبه تنش در تمام نقاط دامنه می‌باشد. برای محاسبه تنش لازم است حل اجزای محدود مسئله انجام شود. برای این منظور کد اجزای محدود حل مسائل تنش صفحه‌ای نوشته شده است که به این وسیله تنش‌های صفحه‌ای محاسبه می‌گردد.

برای محاسبات اجزای محدود، در مسائل تنش صفحه‌ای از المان‌های مربعی چهارگره‌ای (Q4) استفاده شده و روی دو نقطه در هر جهت انتگرال‌گیری گوس صورت گرفته است.

2-2- بهینه‌سازی

در این بهینه‌سازی، متغیرهای طراحی مربوط به المان‌ها به‌عنوان ضریبی از خواص ماده در برداری به نام $\vec{x}$ قرار می‌گیرند. یعنی برای هر المان متغیر طراحی متصل به آن وجود دارد که به عنوان ضریبی در کنار چگالی می‌باشد. متغیر طراحی صفر یعنی المان خالی از ماده و متغیر طراحی یک یعنی المان پر و بهینه‌سازی تلاش می‌کند تا برای طرح نهایی این ضرایب به صفر یا یک نزدیک شوند [20].

متغیرهای طراحی نسبت داده شده به هر المان برای از بین بردن پدیده شطرنجی[2] و وابستگی شبکه[3]، باید در هر تکرار با استفاده از فیلتر چگالی که در بخش فیلتر چگالی تشریح خواهد شد فیلتر شوند و مشاهده می‌شود که $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{x})$ متغیر فیلتر شده[4] نامیده می‌شود. معادله تعادل به‌صورت رابطه (1) قابل مشاهده است.

$$\vec{K}\big(\vec{\rho}(\vec{x})\big)\vec{u} = \vec{F} \tag{1}$$

در این رابطه $\vec{K}\big(\vec{\rho}(\vec{x})\big)$ ماتریس سختی کل سازه، $\vec{u}$ بردار جابجایی سراسری گره‌ها و $\vec{F}$ بردار بارهای خارجی اعمالی می‌باشد. با حل اجزا محدود بردار جابجایی $\vec{u}$ به‌صورت رابطه (2) قابل استخراج است.

$$\vec{u} = \vec{K}^{-1}\big(\vec{\rho}(\vec{x})\big)\vec{F} \tag{2}$$

در بهینه‌سازی، توابع هدف[5]، قیدها و روش‌ها متفاوت هستند. به‌منظور درک بهتر روند کلی محاسبات و روش بهینه‌سازی استفاده شده در این مقاله در "شکل 1" نمودار جریان حل ارائه شده است.

در این مقاله جرم سازه به‌عنوان تابع هدف و تنش فون میزز جریمه شده، به‌عنوان قید در نظر گرفته می‌شود [6].

روابط تابع هدف و قیدها به‌صورت رابطه (3) تعریف شده است:

$$\begin{cases} \text{تابع هدف} \quad \min\limits_{x} \sum\limits_{e=1}^{n_e} m_e \rho_e(\vec{x}) \\ \text{قیدها} \begin{cases} \sigma_i^{\mathrm{PN}}(x) \le \bar{\sigma}. \quad i = 1.\cdots.n_c \\ \underline{x}_e \le x_e \le \overline{x}_e . \quad e = 1.\cdots.n_e \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

که n_e تعداد متغیرهای طراحی و m_e جرم المان صلب برای المان مربوط به e است و $\overline{x}_e = 1$ و $\underline{x}_e = \epsilon$، که ϵ عدد مثبت و کوچکی برای اجتناب از منفرد شدن ماتریس سختی استفاده شده است. $\sigma_i^{\mathrm{PN}}(\vec{x})$ تنش اصلاح شده براساس تنش فون میزز محاسبه شده و n_c تعداد قیدهای تنش و $\bar{\sigma}$ حد نهایی تنش مجاز می‌باشد.

2-3- فیلتر چگالی

تکنیک فیلترکردن چگالی توسط برونس و ترتلی در سال 2001 معرفی شد.

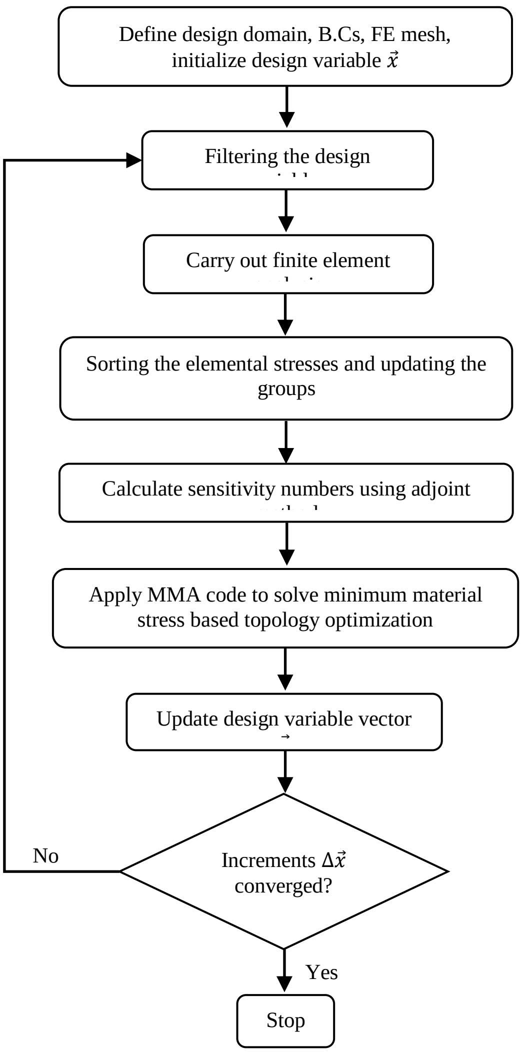

Fig. 1 Flow chart of the iterative solution procedure

شکل 1 نمودار جریانی روند تکراری حل

[1] Method of Moving Asymptotes (MMA)
[2] Checkerboard phenomenon
[3] Mesh dependency
[4] Filtered variables
[5] Objective function

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.21.8]

در این روش پارامتر طراحی $\vec{x}$ برای تعریف چگالی المان مربوط، فیلتر می‌شود [6]. فیلتر چگالی یک میانگین‌گیری وزنی از متغیر طراحی المان‌های داخل محدوده شعاع فیلتر هر المان انجام می‌دهد. وزن هر متغیر طراحی متناسب با فاصله آن المان از مرکز فیلتر است. این فیلتر به صورت رابطه (4) تعریف می‌شود:

$$\rho_i = \frac{\sum_{j\in\Omega_i} w_j x_j}{\sum_{j\in\Omega_i} w_j} \tag{4}$$

که در این رابطه Ω_i همه المان‌هایی که داخل شعاع r_0 المان i نسبت به مرکز این المان قرار بگیرند را شامل می‌شود و w_j در معادله (5) تعریف شده است.

$$w_j = \frac{r_0 - r_j}{r_0} \tag{5}$$

در این رابطه r_0 شعاع فیلتر تعریف می‌شود که در مسائل مختلف با تکرار و تجربه مقادیر متفاوتی می‌تواند در نظر گرفته شود و r_j فاصله مرکز هر المان داخل شعاع فیلتر با المان مرجع که در مرکز فیلتر قرار دارد تعریف می‌شود.

3- رهاسازی تنش[1]

هدف از فرآیند بهینه‌سازی توپولوژی، یافتن توزیع حفره - ماده در دامنه مسئله با در دست داشتن یک مقدار ماده مشخص است. در این روش برای دستیابی به جوابی که تا حد امکان عاری از اعضای خیلی نازک، بد شکل و دندانه‌دار و نواحی خاکستری رنگ (که دارای مقادیر متوسط متغیر طراحی هستند) باشد، می‌توان از روش جریمه مواد ایزوتروپیک جامد برای جریمه مقادیر متوسط متغیرهای طراحی استفاده کرد.

3-1- جریمه ماتریس سختی

جریمه نمودن مقادیر متغیرهای طراحی با توجه به فیلتر چگالی همانطور که در معادله (4) و (1) مشخص است بر روی ماتریس سختی هر المان و در نهایت ماتریس سختی سراسری موثر است. ماتریس سختی سراسری سازه در معادله (6) قابل مشاهده است.

$$\vec{K}\big(\vec{\rho}(\vec{x})\big) = \sum_{e=1}^{n_e} \eta_k\big(\rho_e(\vec{x})\big)\,\vec{K}_e \tag{6}$$

در این رابطه تابع جریمه و ماتریس سختی هر المان به ترتیب به‌صورت روابط (7) و (8) تعریف می‌شود.

$$\eta_k\big(\rho_e(\vec{x})\big) = \big(\rho_e(\vec{x})\big)^3 \tag{7}$$

$$\vec{K}_e = \int \vec{B}^{\mathrm{T}}\vec{E}\vec{B}|J|\,d\Omega \tag{8}$$

3-2- جریمه تنش

در بهینه‌سازی به‌کمک قیدهای تنش بدلیل نقاط منفرد و تکینگی‌های موجود در حل و همچنین وجود کمینه‌های محلی تنش‌ها نیز در هر تکرار جریمه می‌شوند. در منابع مختلف از این روش به‌عنوان رهاسازی تنش استفاده شده است. محاسبه تنش در تحلیل اجزای محدود بعد از به‌دست آوردن جابجایی گره‌ها از رابطه تنش - کرنش به‌صورت رابطه (9) به‌دست می‌آید.

$$\vec{\sigma}_a(\vec{x}) = \vec{E}\vec{B}_a\vec{u}(\vec{x}) \tag{9}$$

که در رابطه (9)، $\vec{E}$ ماتریس بنیادی خواص ماده و $\vec{B}_a$ ماتریس کرنش-جابجایی متناظر با نقطه ارزیابی تنش a است و همان‌طور که در [24,23] اشاره شده با استفاده از رابطه (10) قابل محاسبه است:

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & \cdots & N_n^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & 0 & N_2^e & 0 & \cdots & N_n^e \end{bmatrix} \tag{10-الف}$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n^e}{\partial y} & \frac{\partial N_n^e}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{10-ب}$$

که N در این رابطه تابع شکل[2] المان می‌باشد. و همچنین تنش جریمه شده برای هر نقطه ارزیابی از رابطه (11) محاسبه می‌گردد.

$$\vec{\sigma}_a(\vec{x}) = \eta_S\big(\rho_e(\vec{x})\big)\vec{\sigma}_a(\vec{x}) \tag{11}$$

در رابطه (11) تابع جریمه تنش با توجه به آنچه در مقالات ارائه شده به‌صورت معادله (12) تعریف می‌شود.

$$\eta_S\big(\rho_e(\vec{x})\big) = \big(\rho_e(\vec{x})\big)^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

4- محاسبه تنش

نقاطی که در تحلیل اجزامحدود برای محاسبه تنش در نظر گرفته شده‌اند، (که در این‌جا تنها نقاط گوس می‌باشند) به عنوان نقاط ارزیابی تنش تعریف می‌شوند. در مورد نقاط ارزیابی تنش این نکته حائز اهمیت است که یک المان می‌تواند چندین نقطه ارزیابی تنش داشته باشد، اما فقط یک متغیر طراحی به آن تعلق می‌گیرد.

4-1- بهبود ارزیابی تنش

در پژوهش‌های گذشته که در آن‌ها به بهینه‌سازی توپولوژیک سازه با قید تنش‌های محلی پرداخته شده است، تنش‌ها صرفاً در مرکز هر المان محاسبه شده‌اند. همان‌طور که در مقالات [25-28] اشاره شده، روش اجزای محدود مقادیر میدان جابجایی را با دقت قابل قبولی محاسبه می‌کند، ولی در محاسبه گرادیان میدان، مانند گرادیان جابجایی (میدان تنش) از دقت مورد نظر برخوردار نبوده و بویژه در المان‌های مرتبه پایین در نواحی نزدیک مرزها و گوشه‌ها گسسته است و پرش در پاسخ مشاهده می‌شود. بر طبق مقالات [25-27] روشی برای اصلاح مقادیر تنش با استفاده از تنش‌های نقاط فوق‌همگرا، ارائه شده که به روش بازیابی وصله فوق‌همگرا[3] (SPR) معروف است و توسط زینکویچ و ژو ارائه شده است.

اساس روش SPR برمبنای استفاده از نقاطی به‌نام نقاط فوق‌همگرا در المان‌ها است. در این نقاط تنش به‌دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد و همگرایی گرادیان تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می‌رود، بالاتر است [26]. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق‌همگرا گفته می‌شود که اولین بار توسط بارلو [29] مطرح شده است. برای المان‌های مرتبه پایین نقاط گوس به‌عنوان نقاط فوق‌همگرا در نظر گرفته می‌شود. در روش SPR با برازش یک میدان به‌صورت چند جمله‌ای با ضرایب نامعین بر روی گرادیان حاصل از روش اجزای محدود روی وصله (گروه) المان‌های متصل به هر گره، میدان گرادیان بهبودیافته تعیین می‌شود. اما استفاده از این روش در بهینه‌سازی، که نیاز به تکرارهای متعدد دارد، زمان و هزینه محاسبات را افزایش می‌دهد. به همین دلیل با استفاده از مفهوم فوق‌همگرایی، از نقاط

[1] Stress Relaxation

[2] Shape function

[3] Superconvergent patch recovery (SPR)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.21.8]

گوس و روش‌های پیشنهاد شده در مرجع [30] برای افزایش دقت و پیوستگی محاسبات تنش، بویژه در نقاط دارای تمرکز تنش، در این پژوهش استفاده شده است. برای این منظور تنش‌ها در نقاط گوس محاسبه شده و تنش در هر المان با میانگین‌گیری از مقادیر تنش در 16 نقطه گوس در اطراف و داخل المان، به‌صورت رابطه (13)، به‌دست می‌آید. شایان توجه است که در المان‌های لبه این تعداد به 12 و در گوشه به 9 نقطه کاهش می‌یابد. بدیهی است که در این روش محاسبه حساسیت قید تنش، که در استفاده از روش مجانب‌های متحرک به آن نیاز می‌باشد، در مقایسه با پژوهش‌های گذشته از پیچیدگی بسیار بیشتری برخوردار است.

$$\vec{\sigma}_e(\vec{x}) = \frac{1}{n_g}\sum_{a\in g}\vec{\sigma}_a \tag{13}$$

در این رابطه e و a به‌ترتیب اندیس شماره المان و نقطه ارزیابی تنش، g مجموعه نقاط ارزیابی تنش در نظر گرفته شده برای محاسبه تنش المان و n_g تعداد این نقاط است.

بیشتر مقاله‌هایی که در حوزه بهینه‌سازی سازه ارائه شده‌اند، معیار مقایسه تنش در نقاط ارزیابی را تنش فون میزز در نظر گرفته‌اند که رابطه کلی تنش فون میزز در دو بعد به‌صورت رابطه (14) است.

$$\sigma_e^{\mathrm{vM}} = \left(\sigma_{ex}^2 + \sigma_{ey}^2 - \sigma_{ex}\sigma_{ay} + 3\tau_{exy}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

5- محاسبه تابع هدف

همان‌طور که در بخش‌های قبل بیان شد تابع هدف مورد استفاده در این مقاله جرم کل سازه است. به‌عبارت‌دیگر مجموع جرم تک‌تک المان‌های باقی‌مانده در هر مرحله بهینه‌سازی تعیین‌کننده جرم سازه می‌باشد که در رابطه (15) قابل‌مشاهده است.

$$f_0 = \sum_{e=1}^{n_e} m_e \rho_e(\vec{x}) \tag{15}$$

در رابطه (15)، f_0 تابع هدف و m_e جرم المان شماره e و $\rho_e(\vec{x})$ چگالی فیلتر شده، محاسبه شده از رابطه (4) در هر تکرار می‌باشند.

6- خوشه‌بندی تنش

در پژوهش‌های انجام شده، روش‌های مختلفی برای اعمال قیدهای تنش به المان‌ها در نظر گرفته‌اند که غالباً به‌علت کاهش هزینه‌های محاسباتی ارائه شده‌اند. از این نظر سه روش وجود دارد: در روش اول به هر المان یک قید نسبت داده می‌شود، بنابراین به تعداد المان‌ها، قید وجود دارد که محاسبه این قیود و محاسبه مشتقات آن‌ها نسبت به همه متغیرهای طراحی هزینه‌های محاسباتی را به‌شدت افزایش می‌دهد. اصطلاحا به این قید، قید محلی[1] گفته می‌شود. در روش دوم تعدادی خوشه تعیین و المان‌ها را با توجه به میزان تنش در خوشه‌ها دسته‌بندی می‌نمایند و به هر خوشه یک قید نسبت می‌دهند. این روش موجب کاهش قابل‌ملاحظه زمان و هزینه محاسبات خواهد شد. این روش خوشه‌بندی[2] تنش نام دارد و این قید، قید خوشه نامیده می‌شود. در روش سوم تنها یک قید برای کل المان‌ها در نظر گرفته می‌شود که زمان محاسبات را به حداقل ممکن کاهش می‌دهد. این قید، قید سراسری نام دارد.

7- محاسبه قید

در این مقاله برای مثال اول (تیر MBB) از روش سوم یعنی قید سراسری استفاده شده است و یک قید سراسری برای کل سازه در نظر گرفته شده است. برای مثال دوم (تیر ال- شکل) با استفاده از روش خوشه‌بندی، تنش‌ها در 10 خوشه دسته‌بندی شده و برای هر خوشه یک قید تنش در نظر گرفته شده است. فرم کلی این قیود با در نظر گرفتن قید سراسری به‌صورت یک خوشه در رابطه (16) قابل مشاهده است.

$$\left(\sum_{a\in\Omega_i}\left(\sigma_a^{\mathrm{vM}}(\vec{x})\right)^P\right)^{\frac{1}{P}} \le N_i^{\frac{1}{P}}\bar{\sigma} \tag{16}$$

در این رابطه $\bar{\sigma}$ حداکثر تنش مجاز مربوط به جنس ماده مورد استفاده، N_i تعداد المان‌های خوشه i، Ω_i مجموعه اعضای خوشه iام، a نقاط ارزیابی تنش متعلق به خوشه مورد نظر و P فاکتور پی‌نرم است؛ که بر طبق مرجع [5] در این مقاله مقدار آن را برابر 8 قرار داده‌ایم.

8- تحلیل حساسیت

بهینه‌سازی توپولوژی با استفاده از روش‌های گرادیان‌محور، خصوصا روش مجانب‌های متحرک، برای جستجوی مقدار بهینه از مشتقات تابع هدف و قیدها استفاده می‌کند. بنابراین نیاز به محاسبه مشتقات تابع هدف و قیدها دارد. در ادامه روابط تحلیل حساسیت با توجه به آنچه که در [6] اشاره شده با در نظر گرفتن تغییرات ناشی از میانگین‌گیری تنش در مشتقات تنش بازنویسی شده است. مشتق تابع هدف نسبت به متغیر طراحی x_b به‌صورت رابطه (17) محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_b} = \sum_{e=1}^{n_e} m_e \frac{\partial \rho_e(\vec{x})}{\partial x_b} = \sum_{e=1}^{n_e} m_e W_{eb} \tag{17}$$

که W_{eb} ضرایب وزنی فیلتر چگالی می‌باشد. توجه به این نکته در معادله (17) حائز اهمیت است که مشتق جرم در این مسئله تحت تاثیر متغیرهای طراحی و جرم المان‌های داخل فیلتر قرار دارد و با در نظر گرفتن المان‌های مربعی چهار گره‌ای جرم همه المان‌های صلب با هم برابر و معادل $m_e = m$ می‌باشد. از طرفی مشتق متغیر فیلتر شده نسبت به متغیر طراحی $\partial\rho_e(\vec{x})/\partial x_b$ به صورت رابطه (18) محاسبه می‌گردد.

$$\sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial \rho_e(\vec{x})}{\partial x_b} = \sum_{e=1}^{n_e} W_{eb} = 1 \tag{18}$$

بنابراین

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_b} = \sum_{e=1}^{n_e} m_e W_{eb} = m \sum_{e=1}^{n_e} W_{eb} = m \tag{19}$$

مشتق قیدها هم با استفاده از قاعده زنجیره‌ای رابطه (20) را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_i^{\mathrm{PN}}(\vec{x})}{\partial x_b} &= \sum_{e\in\Omega_i} \frac{\partial \sigma_i^{\mathrm{PN}}(\vec{x})}{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}} \frac{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}{\partial x_b} \\ &= \sum_{e\in\Omega_i} \frac{\partial \sigma_i^{\mathrm{PN}}(\vec{x})}{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}} \left(\frac{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}{\partial \vec{\sigma}_e}\right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial \vec{\sigma}_e(\vec{x})}{\partial x_b}\end{aligned} \tag{20}$$

که در آن مشتق تنش جریمه شده پی‌نرم نسبت به تنش فون میزز به صورت رابطه (21) به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial \sigma_i^{\mathrm{PN}}(\vec{x})}{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}} = \left(\frac{1}{N_i}\sum_{e\in\Omega_i}\left(\frac{\sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}{\bar{\sigma}}\right)^P\right)^{\left(\frac{1}{P}-1\right)} \times \frac{1}{N_i}\left(\frac{\sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}{\bar{\sigma}}\right)^{P-1} \tag{21}$$

مشتق تنش فون میزز نسبت به مؤلفه‌های تنش در حالت دو بعدی در روابط (22) و (23) و (24) آورده شده است.

[1] Local constraints
[2] Clusters

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.21.8]

$$\frac{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}{\partial \sigma_{ex}} = \frac{1}{2\sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}\left(2\sigma_{ex}(\vec{x}) - \sigma_{ey}(\vec{x})\right) \tag{22}$$

$$\frac{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}{\partial \sigma_{ey}} = \frac{1}{2\sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}\left(2\sigma_{ey}(\vec{x}) - \sigma_{ex}(\vec{x})\right) \tag{23}$$

$$\frac{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}{\partial \tau_{exy}} = \frac{3}{\sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}\tau_{exy}(\vec{x}) \tag{24}$$

مشتق تنش المان نسبت به متغیرهای طراحی با توجه به وابستگی تنش هر المان به مجموعه‌ای از نقاط ارزیابی در اطراف المان به‌صورت رابطه (25) تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_e(\vec{x})}{\partial x_b} = \frac{1}{n_g}\sum_{a\in g}\frac{\partial \vec{\sigma}_a(\vec{x})}{\partial x_b} \tag{25}$$

و مشتق مؤلفه‌های تنش نسبت به متغیرهای طراحی از رابطه (26) به‌دست آمده است.

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_a(\vec{x})}{\partial x_b} = \sum_{r=1}^{n_a}\frac{\partial \eta_S\left(\rho_e(\vec{x})\right)}{\partial \rho_r}\frac{\partial \rho_r(\vec{x})}{\partial x_b}\overleftrightarrow{E}\overleftrightarrow{B}_a\vec{u}_a(\vec{x}) + \eta_S\left(\rho_e(\vec{x})\right)\overleftrightarrow{E}\overleftrightarrow{B}_a\frac{\partial \vec{u}_a(\vec{x})}{\partial x_b} \tag{26}$$

که $\partial\eta_S\left(\rho_e(\vec{x})\right)/\partial\rho_r$ تنها برای $r = e$ مخالف صفر است و بنابراین می‌توان نماد جمع را حذف کرد و به صورت رابطه (27) خلاصه نمود.

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_a(\vec{x})}{\partial x_b} = \frac{\partial \eta_S\left(\rho_e(\vec{x})\right)}{\partial \rho_e}\frac{\partial \rho_e(\vec{x})}{\partial x_b}\overleftrightarrow{E}\overleftrightarrow{B}_a\vec{u}_a(\vec{x}) + \eta_S\left(\rho_e(\vec{x})\right)\overleftrightarrow{E}\overleftrightarrow{B}_a\frac{\partial \vec{u}_a(\vec{x})}{\partial x_b} \tag{27}$$

8-1- روش متغیر الحاقی[1]

در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها، تعداد المان‌ها و در نتیجه تعداد متغیرهای طراحی، بسیار زیاد است. اما با روشی که این مسئله فرمول‌بندی شد؛ تعداد قیدها (برابر با تعداد خوشه‌های تنش) محدود و اندک است. بنابراین برای محاسبه‌ی حساسیت قیدها استفاده از روش متغیر الحاقی و حل دستگاه معادله الحاقی و در نهایت محاسبه متغیر الحاقی λ_i مطابق آنچه که در مرجع [31] تشریح شده بسیار مناسب و از لحاظ حجم محاسبات، اقتصادی‌تر است.

محاسبه پارامتر $\partial\vec{u}_a(\vec{x})/\partial x_b$ در معادله (27) با استفاده از معادله (1) و مشتق‌گیری از آن توسط قاعده زنجیره‌ای رابطه (28) را نتیجه می‌دهد

$$\sum_{r=1}^{n_e}\frac{\partial \overleftrightarrow{K}\left(\vec{\rho}(\vec{x})\right)}{\partial \rho_r}\frac{\partial \rho_r(\vec{x})}{\partial x_b}\vec{u}_a(\vec{x}) + \overleftrightarrow{K}\left(\vec{\rho}(\vec{x})\right)\frac{\partial \vec{u}_a(\vec{x})}{\partial x_b} = 0 \tag{28}$$

به‌دلیل این‌که بردار نیروی خارجی $\vec{F}$ مستقل از x_b است، سمت راست این رابطه برابر با صفر شده است. از طریق معادله (28) می‌توان $\partial\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{a}}(\vec{x})/\partial x_b$ را در رابطه (29) محاسبه نمود.

$$\frac{\partial \vec{u}_a(\vec{x})}{\partial x_b} = -\overleftrightarrow{K}^{-1}\left(\vec{\rho}(\vec{x})\right)\left[\sum_{r=1}^{n_e}\frac{\partial \overleftrightarrow{K}\left(\vec{\rho}(\vec{x})\right)}{\partial \rho_r}\frac{\partial \rho_r(\vec{x})}{\partial x_b}\vec{u}_a(\vec{x})\right] \tag{29}$$

نهایتاً با جایگذاری معادله (29) داخل معادله (27) و قرار دادن حاصل آن‌ها درون معادله اصلی مشتق قیدها یعنی معادله (20) رابطه نهایی مشتق قیود تنش به‌صورت رابطه (30) حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial \sigma_i^{PN}(\vec{x})}{\partial x_b} = \sum_{e\in\Omega_i}\frac{\partial \sigma_i^{\mathrm{PN}}(\vec{x})}{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}}\left(\frac{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}{\partial \vec{\sigma}_e}\right)^{\mathrm{T}} \times\left(\frac{1}{n_g}\sum_{a\in g}\frac{\partial \eta_S\left(\rho_e(\vec{x})\right)}{\partial \rho_e}\frac{\partial \rho_e(\vec{x})}{\partial x_b}\overleftrightarrow{E}\overleftrightarrow{B}_a\vec{u}_a(\vec{x}) - \eta_S\left(\rho_e(\vec{x})\right)\overleftrightarrow{E}\overleftrightarrow{B}_a\overleftrightarrow{K}^{-1}\left(\vec{\rho}(\vec{x})\right)\times\left[\sum_{r=1}^{n_e}\frac{\partial \overleftrightarrow{K}\left(\vec{\rho}(\vec{x})\right)}{\partial \rho_r}\frac{\partial \rho_r(\vec{x})}{\partial x_b}\vec{u}_a(\vec{x})\right]\right) \tag{30}$$

که در آن متغیر الحاقی به‌صورت رابطه (31) تعریف می‌شود.

$$\vec{\lambda}_i^T = \sum_{e\in\Omega_i}\frac{\partial \sigma_i^{\mathrm{PN}}(\vec{x})}{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}}\left(\frac{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}{\partial \vec{\sigma}_e}\right)^{\mathrm{T}}\times\frac{1}{n_g}\sum_{a\in g}\overleftrightarrow{E}\overleftrightarrow{B}_a\overleftrightarrow{K}^{-1}\left(\vec{\rho}(\vec{x})\right) \tag{31}$$

و مقدار آن از معادله‌ی الحاقی (32) حاصل می‌گردد.

$$\overleftrightarrow{K}\left(\vec{\rho}(\vec{x})\right)\lambda_i = \sum_{e\in\Omega_i}\frac{\partial \sigma_i^{\mathrm{PN}}(\vec{x})}{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}}\left(\frac{1}{n_g}\sum_{a\in g}\overleftrightarrow{E}\overleftrightarrow{B}_a\right)\frac{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}{\partial \vec{\sigma}_e} \tag{32}$$

با حل معادله‌ی فوق، متغیر الحاقی $\vec{\lambda}_i$ به‌دست می‌آید. سپس مقدار آن را در معادله‌ی (30) جایگذاری می‌کنیم و در نهایت مشتق خوشه‌های تنش را به‌صورت رابطه (33) به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\partial \sigma_i^{\mathrm{PN}}(\vec{x})}{\partial x_b} = \sum_{e\in\Omega_i}\frac{\partial \sigma_i^{\mathrm{PN}}(\vec{x})}{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}}\left(\frac{\partial \sigma_e^{\mathrm{vM}}(\vec{x})}{\partial \vec{\sigma}_e}\right)^{\mathrm{T}} \times\left(\frac{1}{n_g}\sum_{a\in g}\left(\frac{\partial \eta_S\left(\rho_e(\vec{x})\right)}{\partial \rho_e}\frac{\partial \rho_e(\vec{x})}{\partial x_b}\overleftrightarrow{E}\overleftrightarrow{B}_a\vec{u}_a(\vec{x})\right) - \eta_S\left(\rho_e(\vec{x})\right)\vec{\lambda}_i^T\left[\sum_{r=1}^{n_e}\frac{\partial \overleftrightarrow{K}\left(\vec{\rho}(\vec{x})\right)}{\partial \rho_r}\frac{\partial \rho_r(\vec{x})}{\partial x_b}\vec{u}_a(\vec{x})\right]\right) \tag{33}$$

در ادامه به بررسی نتایج حاصل از این روش می‌پردازیم.

9- نتایج عددی

برای بررسی و اعتبارسنجی روش ارائه شده، به ارائه دو مثال استاندارد در این زمینه پرداخته شده است.

9-1- تیر MBB

در اولین مثال به بهینه‌سازی توپولوژی تیر دو سر ساده MBB "شکل 2" می‌پردازیم. این تیر در دو سمت بر روی تکیه‌گاه مفصلی ساده قرار دارد و در مرکز تحت نیروی متمرکز رو به پایین قرار گرفته است. تیر MBB به علت وجود دو تکیه‌گاه مفصلی و اعمال نیروهای تکیه‌گاهی و خارجی به‌صورت متمرکز دارای تمرکز تنش و گرادیان تنش قابل توجهی در این نواحی می‌باشد که حل این مساله را با پیچیدگی خاصی همراه می‌کند. برای کاهش این تمرکز تنش در نقاط تکیه‌گاهی و نیروی خارجی، همان‌طور که در عمل نیز نیرو نمی‌تواند به یک نقطه وارد شود، این نیروها روی 8 گره تقسیم شده‌اند تا از تمرکز تنش و گرادیان تنش شدید موضعی جلوگیری شود.

مشخصات هندسی نمونه به این شرح در نظر گرفته شده است: طول، عرض و ضخامت تیر به ترتیب 600 و 100 و 1 میلی‌متر. برای تحلیل اجزامحدود از 9600 المان مربعی چهار گره‌ای تنش صفحه‌ای با ابعاد 2.5 در 2.5 میلی‌متر برای گسسته‌سازی دامنه حل استفاده می‌کنیم.

خواص مکانیکی سازه به ترتیب، مدول یانگ E=71000 MPa، ضریب پواسون $\upsilon = 0.33$ و $\bar{\sigma}$ =350 MPa (که حد نهایی تنش تسلیم است)

[1] Adjoint Variable Method

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.21.8]

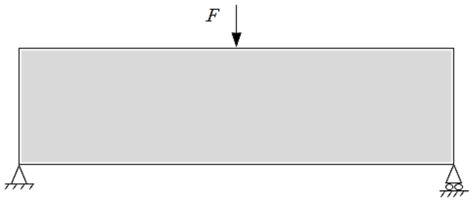

Fig. 2 Problem definition and loading of MBB beam

شکل 2 تعریف مسئله و بارگذاری تیر MBB

فرض شده است. فیلتر متغیر طراحی با شعاع فیلتر 2 برابر طول المان مورد استفاده قرار گرفته و سازه تحت نیروی متمرکز 1500 N است.

طراحی توپولوژی بهینه در "شکل 3" نشان داده شده است. جرم سازه حاصل تقریباً 30.72 درصد جرم سازه کامل است که حاکی از 69.28 درصد کاهش جرم است و پیشرفت قابل ملاحظه‌ای نسبت به نتایج ارائه شده در سایر پژوهش‌ها [6,5] که در "شکل 4" نمایش داده شده دارد. نتایج در جدول 1 مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در سازه حاصل اتصال اعضا به‌صورت مستقیم و بدون واسطه و اتصال اکثر اعضا به‌صورت مثلث شکل و در زوایای مناسب‌تر از "شکل 4" و همچنین سازه حاصل در [32] است. در کانتور تنش "شکل 5"، مشاهده می‌شود که مقدار تنش حداکثر از 600 مگاپاسکال در [6] به 500 مگاپاسکال کاهش یافته ضمن این‌که مقادیر تنش جز در چند المان اندک به‌صورت کاملاً یکنواخت و عاری از تمرکز تنش، توزیع شده است.

به‌منظور درک بهتر نتایج و ارزش کار بهینه‌سازی توپولوژی، در "شکل 6"، کانتور تنش برای سازه‌ای که حجم مصالح در آن 30.72 درصد سازه توپر بوده و چگالی المان‌ها یکسان می‌باشد، ترسیم شده است.

همان‌طور که از مقایسه "شکل 5 و 7" قابل مشاهده است، حداکثر تنش در سازه بهینه‌سازی شده 6 برابر نسبت به سازه کامل با چگالی 30.72 درصد

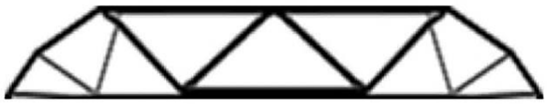

Fig. 3 Optimum layout of MBB beam with the presented method

شکل 3 طرح بهینه‌سازی شده تیر MBB با روش ارائه شده

Fig. 4 Optimized topology of MBB beam in reference [6]

شکل 4 توپولوژی بهینه تیر MBB در مرجع [6]

Fig. 5 von Mises stress plot in optimized MBB beam

شکل 5 کانتور تنش فون میزز در تیر MBB بهینه‌سازی شده

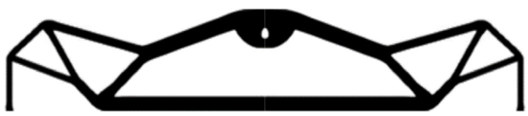

Fig. 6 Optimized topology of MBB beam in reference [32]

شکل 6 توپولوژی بهینه تیر MBB در مرجع [32]

جدول 1 مقایسه نتایج بهینه‌سازی توپولوژی تیر MBB در این پژوهش با مرجع [6]

Table 1 Comparison of MBB beam topology optimization results in this research with reference [6]

پارامتر	سازه توپر (گرم)	سازه بهینه‌شده (گرم)	درصد کاهش	درصد کاهش در [6]	درصد بهبود
جرم	152.4	46.81	69.28	63.7	5.58

Fig. 7 von Mises stress plot in a structure with evenly distributed material equal to 30.72% of the initial domain

شکل 7 کانتور تنش فون میزز در سازه‌ای با حجم مصالح برابر با 30.72٪ سازه توپر با توزیع یکنواخت

کاهش یافته است. کاهش تمرکز تنش، توزیع پیوسته و مطلوب تنش، تراز یکسان تنش‌ها در اعضای سازه از مهمترین مزیت‌های طراحی انجام شده است.

9-2- تیر ال- شکل[1]

در دومین مثال، تیر ال- شکل به‌عنوان یکی از مسائل استاندارد در این زمینه برای انجام فرآیند بهینه‌سازی در نظر گرفته شده است. این تیر در نقطه اتصال به تکیه‌گاه در بالاترین نقطه سازه دارای اتصال گیردار است و یک نیروی متمرکز رو به پایین گوشه انتهایی تیر را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

از مهمترین دلایل استفاده طراحان از تیر ال- شکل برای ارزیابی روش بهینه‌سازی و برنامه تهیه شده وجود یک نقطه تکینگی هندسی (محل شکستگی تیر با زاویه قائم) می‌باشد که در بهینه‌سازی تنش منجر به یک نقطه منفرد در تنش خواهد شد. بر طرف ساختن این تکینگی از چالش‌های اساسی در این رابطه است.

برای تحلیل اجزای محدود از 6400 المان مربعی چهار گره‌ای تنش صفحه‌ای با ابعاد 2 در 2 میلی‌متر برای گسسته‌سازی دامنه حل استفاده می‌کنیم. فیلتر متغیر طراحی با شعاع فیلتر 1.5 برابر طول المان مورد استفاده قرار گرفته و کل سازه تحت نیروی متمرکز 1500 N است.

مشخصات هندسی نمونه با در نظر گرفتن L برابر 200 میلی‌متر در "شکل 8" قابل مشاهده است. خواص مکانیکی سازه نمونه نیز مطابق با خواص مثال 1 فرض شده است.

این المان‌ها را در 10 خوشه تقسیم کرده‌ایم. همان‌طور که اشاره شده است با استفاده از خوشه‌بندی تعداد قیدهای محلی را به تعداد خوشه‌ها کاهش داده‌ایم. در این مثال المان‌های تخصیص یافته به هر خوشه، در هر مرحله بروزرسانی می‌شود. به این صورت که در هر مرحله، مسئله به روش اجزا محدود تحلیل می‌شود. سپس المان‌ها را براساس مقدار تنش آن‌ها از بیشترین مقدار تا کمترین مقدار مرتب می‌کنیم و به همین ترتیب در خوشه‌ها تقسیم می‌کنیم. طراحی توپولوژی بهینه در "شکل 8" نشان داده شده است. جرم سازه حاصل تقریباً 33.45٪ جرم سازه کامل است که حاکی از 66.54 درصد کاهش جرم است و 4.62 درصد رشد و بهبود در زمینه بهینه‌سازی وزن نسبت به پژوهش [6] حاصل شده که در "شکل 10" نمایش داده شده است. نتایج حاصل و مرجع [6] در جدول 2 ارائه شده است.

[1] L-Shape

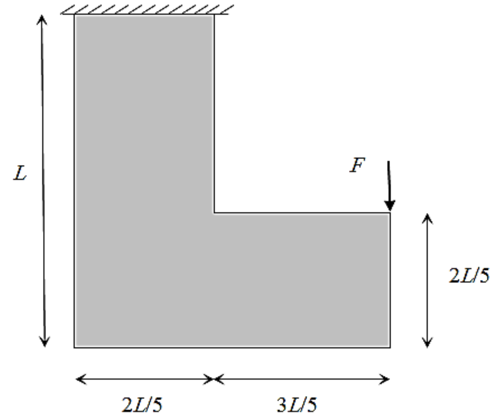

Fig. 8 Problem definition and loading of the L-shaped beam

شکل 8 تعریف مسئله و بارگذاری تیر ال- شکل

جدول 2 مقایسه نتایج بهینه‌سازی توپولوژی تیر ال- شکل در این پژوهش با مرجع [6]

Table 2 Comparison of L-shaped beam topology optimization results in this research with reference [6]

پارامتر	سازه توپر (گرم)	سازه بهینه‌شده (گرم)	درصد کاهش	درصد کاهش در [6]	درصد بهبود
جرم	65.027	21.752	66.54	61.92	4.62

Fig. 9 Optimum layout of L-shaped beam with the presented method

شکل 9 طرح بهینه‌سازی شده تیر ال- شکل با روش ارائه شده

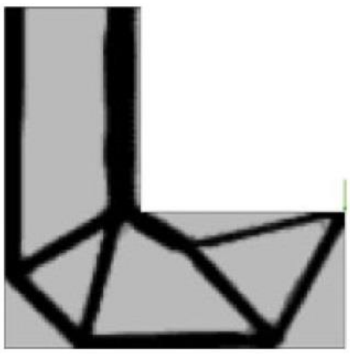

Fig. 10 Optimized topology of the L-shaped beam in reference [6]

شکل 10 توپولوژی بهینه تیر ال- شکل در مرجع [6]

در "شکل 11" کانتور تنش فون میزز در تیر ال- شکل بهینه‌سازی شده (شکل 9) نمایش داده شده است. همان‌طور که در شکل قابل ملاحظه است تنش در کل سازه به‌طور متناسب و یکنواخت توزیع شده است و از تمرکز تنش‌های سازه‌ای تا حد زیادی پیشگیری شده است.

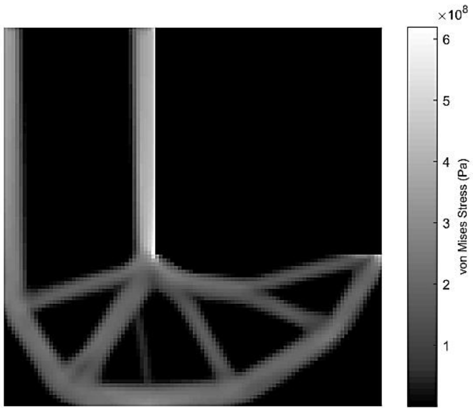

Fig. 11 von Mises stress plot in optimized L-shaped beam

شکل 11 کانتور تنش فون میزز در تیر ال- شکل بهینه‌سازی شده

10- نتیجه‌گیری

در این مقاله حل مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی سازه بر پایه تنش به کمک روش مجانب‌های متحرک انجام شده است. از یک فیلتر چگالی برای حذف وابستگی به شبکه‌بندی اجزامحدود و پدیده شطرنجی شدن توپولوژی بهینه استفاده شده است. روش جریمه مواد همسانگرد جامد برای حذف متغیرهای طراحی متوسط و المان‌های خاکستری موجود در توپولوژی بهینه و رسیدن به پاسخ سیاه و سفید به‌کار رفته است. کاهش دقت محاسبه تنش در بهینه‌سازی تنش می‌تواند منجر به توپولوژی نادرست، اعضای نازک و المان‌های نامطلوب خاکستری شود به همین دلیل برای بهبود ارزیابی و پیوستگی تنش بین المان‌ها از 16 نقطه گوس در داخل و اطراف هر المان برای محاسبه تنش استفاده شده است. همچنین توجه ویژه‌ای به مشکل تکینگی تنش و تمرکز بالای تنش شده است. نتایج مثال‌های عددی کاهش وزن 69.28 و 66.54 درصد به ترتیب در تیر MBB و ال- شکل را نشان می‌دهند که حاکی از پیشرفت 4.62 و 5.58 درصدی نسبت به پژوهش مرجع مقایسه شده است. همچنین، روش ارائه شده علاوه بر کاهش مقدار تنش سراسری به حد مجاز تعیین شده و از بین بردن تمرکز تنش (مگر در چند المان اندک)، موجب کاهش 18 درصدی تنش بیشینه (در تیر MBB) گردیده و تنش در کل سازه به‌صورت یکنواخت توزیع شده است. شایان توجه است سازه‌های حاصل دارای تعداد اعضای کمتر، اتصال اعضا در زوایای مناسب، به‌صورت مستقیم، بدون واسطه و مثلث شکل هستند و این فرآیند بهینه‌سازی، سازه‌های کاربردی برای ساخت ایجاد کرده است. بنابراین برای تحقیقات آینده، کاربرد این روش را می‌توان به مسائل سه‌بعدی و استفاده در معرض تنش‌های حرارتی گسترش داد.

11- فهرست علایم

$\vec{B}_a$	ماتریس کرنش تغییرمکان (m)
$\vec{E}$	ماتریس بنیادی
$\vec{F}$	بردار نیرو (N)
f_0	تابع هدف (kg)
$\vec{K}$	ماتریس سختی (Nm^{-1})
$\vec{K}_e$	ماتریس سختی المان e (Nm^{-1})
m_e	جرم المان e (kg)
$\vec{N}$	ماتریس توابع شکل المان
r_0	شعاع فیلتر متغیر طراحی (m)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.1.21.8]

r_j شعاع المان j تا مرکز فیلتر (m)

$\vec{u}$ بردار تغییر مکان (m)

W_{eb} ضرایب وزنی فیلتر

w_j ضریب وزن متغیر طراحی j

$\vec{x}$ بردار متغیر طراحی

علایم یونانی

η_k تابع جریمه سختی سازه

η_s تابع جریمه تنش

$\vec{\rho}$ بردار متغیر فیلتر شده

$\bar{\sigma}$ حد تحمل نهایی تنش (Nm^{-2})

$\bar{\sigma}^{PN}$ تنش P-Norm (Nm^{-2})

σ^{vm} تنش فون میزز (Nm^{-2})

12- تقدیر و تشکر

بدین وسیله از مرکز محاسبات سنگین دانشگاه فردوسی مشهد، که محاسبات این تحقیق در آن‌جا انجام شد و همچنین از پروفسور سوانبرگ (Svanberg) به جهت در اختیار گذاشتن کد روش مجانب‌های متحرک (MMA)، تقدیر و تشکر می‌شود.

13- مراجع

[1] B. Hassani, E. Hinton, *Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice and Software*, pp. 104-136, London: Springer, 1999.

[2] F. Abbasi Parizad, B. Hassani, H. Ghasemnejad Moghari, Optimization of free form shells under stress constraint and using B-Spline functions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 190-200, 2015. (in Persian فارسی)

[3] S. M. Tavakkoli, *Isogeometrical Analysis and topology Optimization of Continuum Strucutres Using NURBS Basis Functions*, PhD Thesis Thesis, Department of Civil Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, 2010. (in Persian فارسی)

[4] N. Yaghoobi, B. Hassani, Topological optimization of vibrating continuum structures for optimal natural eigenfrequency, *International Journal of Optimization in Civil Engineering*, Vol. 7, No. 1, pp. 1-12, 2017.

[5] C. Le, J. Norato, T. Bruns, C. Ha, D. Tortorelli, Stress-based topology optimization for continua, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 41, No. 4, pp. 605-620, 2010.

[6] E. Holmberg, B. Torstenfelt, A. Klarbring, Stress constrained topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 48, No. 1, pp. 33-47, 2013.

[7] J. Roshanian, A. A. Bataleblu, M. H. Farghadani, B. Ebrahimi, Multi-objective multidisciplinary design optimization of a general aviation aircraft, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 199-210, 2017. (in Persian فارسی)

[8] K. Svanberg, The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, No. 2, pp. 359-373, 1987.

[9] T. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, pp. 109-120, Englewood cliffs: Prentice-hall, 1987.

[10] M. P. Bendsøe, N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 2, pp. 197-224, 1988.

[11] M. P. Bendsøe, Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 1, No. 4, pp. 193-202, 1989.

[12] G. I. Rozvany, M. Zhou, T. Birker, Generalized shape optimization without homogenization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 4, No. 3, pp. 250-252, 1992.

[13] U. Kirsch, On singular topologies in optimum structural design, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 2, No. 3, pp. 133-142, 1990.

[14] G. Rozvany, T. Birker, On singular topologies in exact layout optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 8, No. 4, pp. 228-235, 1994.

[15] G. Rozvany, On design-dependent constraints and singular topologies, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 21, No. 2, pp. 164-172, 2001.

[16] G. Cheng, Z. Jiang, Study on topology optimization with stress constraints, *Engineering Optimization*, Vol. 20, No. 2, pp. 129-148, 1992.

[17] G. Cheng, X. Guo, ε-relaxed approach in structural topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 13, No. 4, pp. 258-266, 1997.

[18] T. E. Bruns, D. A. Tortorelli, Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, No. 26, pp. 3443-3459, 2001.

[19] M. Bruggi, On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 36, No. 2, pp. 125-141, 2008.

[20] E. Holmberg, B. Torstenfelt, A. Klarbring, Fatigue constrained topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 50, No. 2, pp. 207-219, 2014.

[21] J. D. Deaton, R. V. Grandhi, Stress-based design of thermal structures via topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 53, No. 2, pp. 253-270, 2016.

[22] H. A. Jahangiry, A. Jahangiri, Topology optimization of heat conduction problem via level-set method and the finite elements analysis, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 703-710, 2016. (in Persian فارسی)

[23] A. J. Ferreira, *MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures*, pp.143-147, Netherlands: Springer, 2008.

[24] M. Hassanzadeh, Computation of shape design sensitivities for linear FEM using modified semi-analytical method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 73-80, 2015. (in Persian فارسی)

[25] O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu, A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineerng analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, No. 2, pp. 337-357, 1987.

[26] O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu, The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, No. 7, pp. 1331-1364, 1992.

[27] O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu, The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, No. 7, pp. 1365-1382, 1992.

[28] K. S. Woo, J. S. Ahn, Adaptive refinement based on stress recovery technique considering ordinary kriging interpolation in L-shaped domain, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2017, No. 1, pp. 10, 2017.

[29] J. Barlow, Optimal stress locations in finite element models, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 2, pp. 243-251, 1976.

[30] E. Hinton, J. S. Campbell, Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, No. 3, pp. 461-480, 1974.

[31] U. Kirsch, *Structural Optimization: Fundamentals and Applications*, pp. 128-135, Berlin: Springer, 1993.

[32] C. Y. Kiyono, S. L. Vatanabe, E. C. N. Silva, J. N. Reddy, A new multi-p-norm formulation approach for stress-based topology optimization design, *Composite Structures*, Vol. 156, pp. 10-19, 2016.