



## تحلیل ترموالاستیک استوانه جدار ضخیم دارای ترک محیطی تحت شوک حرارتی طبق تئوری تأخیر فاز دوگانه

ادریس فرهی نژاد<sup>1</sup>، محمدباقر نظری<sup>2\*</sup>، مسعود مهدی زاده رخی<sup>3</sup>

1- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

3- استادیار، مهندسی رباتیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

\* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، mbnazari@shahroodut.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 08 شهریور 1395

پذیرش: 17 مهر 1395

ارائه در سایت: 21 آذر 1395

کلید واژگان:

ضریب شدت تنش

مدل گرمایی تأخیر فاز دوگانه

روش تابع وزنی

شوک گرمایی

ترک محیطی در استوانه

در این مقاله، ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی کامل در سطح داخلی یک استوانه جدار ضخیم تعیین شده است. استوانه تحت شوک گرمایی طبق مدل تأخیر فاز دوگانه در سطح خارجی به‌طور متقارن محوری قرار دارد. در معادلات ترموالاستیک حاکم، از کوپل میدان‌های دما و کرنش و اثر ترم اینرسی صرف‌نظر شده و میدان‌های دما و تنش با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی به‌دست آمده است. ضریب شدت تنش مود I نیز با استفاده از روش تابع وزنی تعیین می‌شود. توزیع دما، تنش و ضریب شدت تنش مدل تأخیر فاز دوگانه با مدل‌های دیگر مقایسه و اثر زمان‌های آسایش شار گرمایی و گرادبان دما روی آنها بررسی شده است. نتایج علاوه بر اختلاف تغییر زمانی دمای یک نقطه طبق مدل تأخیر فاز دوگانه با مدل‌های هذلولوی و فوری، رفتار متفاوت ترک نسبت به مدل فوری را نشان می‌دهد. ضریب شدت تنش بیشینه مدل تأخیر فاز دوگانه از مدل فوری به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر است. همچنین، در مدل تأخیر فاز دوگانه ضریب شدت تنش بیشینه در هر لحظه قبل از رسیدن پیشانی موج به سطح داخلی، برای ترکی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش در موقعیت نوک آن قرار دارد. مطابق نتایج، در نظر گرفتن مدل مناسب هدایت گرمایی در طراحی سازه‌ها تحت بار گرمایی گذرا اهمیت ویژه‌ای دارد.

## Thermoelastic analysis of circumferential cracks in thick-walled cylinders considering dual phase lag theory

Edris Farahinejad<sup>1</sup>, Mohammad Bagher Nazari<sup>1\*</sup>, Masoud Mahdizadeh Rokhi<sup>2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

2- Department of Electrical and Robotics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

\* P.O.B. 3619995161, Shahrood, Iran, mbnazari@shahroodut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 29 August 2016  
Accepted 08 October 2016  
Available Online 11 December 2016

### Keywords:

Stress intensity factor  
Dual phase lag  
Weight function method  
Thermal shock  
Circumferential crack in cylinder

### ABSTRACT

In this paper, the stress intensity factor for an internal circumferential crack in a thick-walled cylinder has been determined. The cylinder has been subjected to an axisymmetric thermal shock on the outer surface according to the dual phase lag theory. The uncoupled, quasi-stationary thermoelastic governing equations have been assumed. The temperature and stress fields have been solved numerically in the Laplace domain and its Laplace inversion transform has been obtained numerically. Using weight function method, the stress intensity factor for mode-I has been extracted. Temperature, stress and stress intensity factor of hyperbolic and dual phase lag theories have been compared and the effects of heat flux and temperature gradient time relaxations on the temperature, stress and stress intensity factor have been studied. According to the results, the dual phase lag temperature distribution is different in comparison with the Fourier model. Also, the stress intensity factor for dual phase lag model is significantly larger than the Fourier one. Moreover, the maximum stress intensity factor in dual phase lag model occurs for a crack that the peak of stress wave reaches to its tip. Results show assumption of adequate heat conduction model for structure design under transient thermal loading is critical.

### 1- مقدمه

هدایت گرمایی در مقیاس میکرو، سرعت محدود موج گرما را تأیید می‌کند. در این موارد، نتایج کاربرد قانون فوری به نتایج تجربی اختلاف فاحش دارد. برای مثال، دمای اندازه‌گیری شده در تختال نازکی که تحت گرمایش با لیزر قرار گرفته است، در زمان‌های نزدیک به اعمال شوک حرارتی حدود 300°C بیشتر از دمایی است که با استفاده از قانون فوری پیش‌بینی می‌شود [2].

بخاطر طبیعت سهموی تئوری هدایت گرمایی فوری، اثر یک اغتشاش گرمایی در مرز یک جسم بلافاصله در نقاط دور از آن احساس می‌شود که از نظر فیزیکی قابل قبول نیست [1]. از طرف دیگر آزمایش‌ها در مواردی چون اغتشاش گرمایی در دماهای پایین، شوک‌های گرمایی در زمان‌های کوتاه و

کاهش دمای لبه را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هذلولوی بررسی کرده‌اند. هو و چن [21]، ضریب شدت تنش برای یک ترک موازی با لبه‌های یک باریکه را با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هذلولوی به‌دست آورده‌اند. چن و هو تغییرات زمانی ضریب شدت تنش، برای یک نیم‌صفحه با پوشش [22] و بدون پوشش [23] شامل یک ترک تحت اغتشاش حرارتی در مرز را با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هذلولوی به‌دست آورده‌اند. ونگ [24]، ضریب شدت تنش برای یک استوانه شامل یک ترک سکه‌ای کوچک را به‌صورت تحلیلی به‌دست آورده است. فو و همکاران ضریب شدت تنش برای استوانه توپر [25] و توخالی [26] شامل یک ترک محیطی را با استفاده از روش تبدیل انتگرالی و تبدیل لاپلاس معکوس عددی و با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هذلولوی ارائه کرده‌اند. هو و چن [27] ضریب شدت تنش برای یک ترک موازی با مرز یک نیم‌صفحه را با در نظر گرفتن مدل تأخیر فاز دوگانه و استفاده از روش‌های تبدیل لاپلاس و فوریه به‌طور تحلیلی ارائه کرده‌اند. اخیراً، ونگ و همکاران [28]، تغییرات زمانی ضریب شدت تنش برای یک ترک عمود بر لبه یک نیم‌صفحه تحت شوک گرمایی را با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه استخراج کرده‌اند. اخیراً، نظری و عاصمی، ضریب شدت تنش مود I برای گوشه و عمق یک ترک نیم‌بیضی [29] و نوک یک ترک محیطی کامل [30] تحت بار گرمایی هذلولوی را با استفاده از روش تابع وزنی به‌دست آورده‌اند.

بنا بر اطلاع نویسندگان، ضریب شدت تنش برای ترک محیطی در یک استوانه جدار ضخیم تحت بارگذاری گرمایی با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه گزارش نشده است. در مقاله حاضر، رفتار ترموالاستیک یک استوانه بلند شامل یک ترک محیطی -مطابق شکل 1- تحت بارگذاری گرمایی با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه بررسی شده است. ضریب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزنی استخراج شده است. میدان‌های دما و تنش در استوانه بدون ترک در فضای لاپلاس با صرف‌نظر از اثر اینرسی و کوپل میدان‌های کرنش و دما به‌دست آمده است.

## 2- میدان دما در استوانه

در این بخش، میدان دما در یک استوانه بلند با شعاع‌های داخلی  $r_i$  و خارجی  $r_o$ ، براساس مدل تأخیر فاز دوگانه به‌دست می‌آید. رابطه ساختاری شار گرمایی طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه برای ماده همسانگرد به‌صورت رابطه (1) است [9].

$$q(x, t + \tau_q) = -k\nabla T(x, t + \tau_T) \quad (1)$$

در این رابطه،  $\tau_T$  و  $\tau_q$  زمان‌های آسایش گرادیان دما و شار گرمایی هستند که از 1 پیکو ثانیه برای فلزات تا حدود 10 ثانیه برای بافت‌های زنده تغییر می‌کنند [9]، همچنین  $T$  دما،  $k$  ضریب هدایت گرمایی و  $q$  بردار شار گرمایی را نشان می‌دهد.

رابطه ساختاری شار گرمایی مدل هذلولوی (کاتانو-ورنات)، با در نظر گرفتن بسط تیلور یک جمله برای شار گرمایی و فرض  $\tau_T = 0$  از رابطه فوق به‌دست می‌آید. همچنین، رابطه (1) با فرض  $\tau_q = \tau_T$  به قانون فوریه تبدیل می‌شود. رابطه ساختاری شار گرمایی مدل تأخیر فاز دوگانه با در نظر گرفتن دو جمله برای بسط تیلور  $q$  و یک جمله برای  $T$  حول زمان  $t$  -به‌صورت زیر- منجر به سرعت محدود موج گرما می‌شود [9].

تاکنون مدل‌های مختلفی برای حل مشکل سرعت بی‌نهایت موج گرما براساس قانون فوریه ارائه شده است. کاتانو [3] و ورنات [4]، یک مدل هذلولوی برای انرژی گرمایی پیشنهاد کردند که در آن در نظر گرفتن یک زمان آسایش برای شار گرمایی منجر به سرعت محدود موج گرما می‌شود. البته استفاده از این مدل در برخی موارد منجر به نتایج غیرمنتظره می‌شود که در مراجع [6,5] گزارش شده است. تزو [8,7]، یک مدل هذلولوی دو مرحله‌ای را برای لحاظ کردن برهم کنش میکروساختار ماده در فرآیندهای سریع انتقال گرما پیشنهاد کرد. در این مدل -که مدل تأخیر فاز دوگانه نامیده می‌شود- دو زمان آسایش، یکی برای گرادیان دما و دیگری برای شار گرمایی معرفی شده است. زمان آسایش گرادیان دما، تأخیر زمانی ناشی از برهم کنش میکروساختار -برهم کنش فوتون -الکترون و پراکنش فوتون‌ها- و زمان آسایش شار گرمایی اثر اینرسی گرمایی را لحاظ می‌کند [9]. مدل تأخیر فاز دوگانه برخلاف قانون فوریه، منجر به معادله هدایت گرمایی با مشتقات جزئی مرتبه بالاتر نسبت به زمان می‌شود. نتایج آزمایش‌ها نشان می‌دهد مدل تأخیر فاز دوگانه رفتار واقعی ماده در انتقال گرمای سریع و یا انتقال گرما در مقیاس میکرو را بهتر از مدل هذلولوی بیان می‌کند [10].

بسیاری از قطعات از جمله سازه‌های مدور مثل لوله‌ها و مخازن تحت فشار در تجهیزات مهندسی مدرن مثل راکتورهای هسته‌ای، دستگاه‌های تولید و انتقال اشعه ایکس و لیزر و همچنین مخازن گازهای مایع در صنایع هوافضا تحت هدایت گرمایی سریع قرار می‌گیرند. با توجه به امکان وجود عیب یا ترک در این سازه‌ها، ارزیابی دقیق ایمنی، تخمین عمر و ظرفیت تحمل بار آن‌ها، مستلزم بررسی رفتار ترک است. از طرفی، ترک محیطی بعنوان مدل مناسبی از عیوب در ناحیه اتصال لوله‌ها به یکدیگر پیشنهاد شده است [11]. در تحقیقات مختلفی رفتار ترک محیطی در استوانه‌ها مطالعه شده است. ایردل و اردگن [12]، آیدین و آرتم [13]، نید و اردگن [14]، با استفاده از روش تبدیل انتگرالی، ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی در یک استوانه تحت بار مکانیکی و گرمایی به‌صورت متقارن محوری را به‌دست آوردند. ونگ [15]، با استفاده از روش المان محدود ضریب شدت تنش دینامیکی را برای ترک محیطی در یک استوانه جدار ضخیم تحت فشار داخلی متغیر با زمان، محاسبه کرد. همچنین گرینر [16]، ضریب شدت تنش را برای استوانه‌ای شامل یک ترک محیطی و تحت بار محوری، با استفاده از روش المان محدود به‌دست آورد.

در تحلیل سازه‌های شامل ترک با الگوی مشخص با توجه به محدودیت‌ها و پیچیدگی‌های روش‌های تحلیلی و لزوم تکرار روش‌های عددی با تغییر ابعاد هندسی و خصوصیات مادی، ترجیح داده می‌شود از روش تابع وزنی استفاده شود. اگر تابع وزنی برای یک جسم شامل ترک در دسترس باشد، ضریب شدت تنش با انتگرال‌گیری از حاصل‌ضرب توزیع تنش روی ترک فرضی و تابع وزنی روی سطح ترک به‌دست می‌آید. نبوی و قاجار [17] با استفاده از نتایج المان محدود، ضرایب تابع وزنی پیشنهادی گلینکا و شن [18] را به‌صورت توابع چندجمله‌ای برای محدوده وسیعی از نسبت قطرهای خارجی به داخلی و طول نسبی ترک، مشخص کردند و ضریب شدت تنش را برای بارگذاری حرارتی پایا به‌دست آوردند. همچنین ایشان ضرایب تابع وزنی پیشنهادی گلینکا و شن را برای یک نسبت قطر خاص به‌صورت توابع متعالی از ابعاد هندسی استوانه، ارائه کردند [19].

در تحقیقات فوق از تئوری هدایت گرمایی فوریه استفاده شده است. چانگ و ونگ [20]، رفتار یک ترک لبه‌ای عمود بر لبه یک نیم‌صفحه تحت

معادله (5) - به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right) \frac{\partial T'}{\partial t'} = \left[\delta \frac{\partial}{\partial t'} + 1\right] \left[\frac{\partial^2 T'}{\partial R^2} + \frac{\partial T'}{\partial R}\right] \quad (9)$$

این رابطه ماهیت موج‌گونه معادله هدایت گرمایی در مدل تأخیر فاز دوگانه را نشان می‌دهد. طبق رابطه (9) سرعت موج گرما در مدل تأخیر فاز دوگانه و کاتانو-ورنات به صورت زیر است.

$$C_{DPL} = \frac{\sqrt{2\delta}}{\varepsilon} \quad (a-10)$$

$$C_{C-V} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (b-10)$$

معادله هدایت گرمایی (9) در فضای لاپلاس با توجه به شرایط اولیه، منجر به معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر مسئله برحسب متغیر مکان می‌شود.

$$s \left(1 + \varepsilon s + \frac{\varepsilon^2}{2} s^2\right) \tilde{T}' = [\delta s + 1] \left[\frac{d^2 \tilde{T}'}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\tilde{T}'}{dR}\right] \quad (11)$$

که در آن،  $s$  پارامتر تبدیل لاپلاس است. رابطه (11) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$R^2 \frac{d^2 \tilde{T}'}{dR^2} + R \frac{d\tilde{T}'}{dR} - ER^2 \tilde{T}' = 0 \quad (12)$$

که در آن،

$$E = \frac{\left(1 + \varepsilon s + \frac{\varepsilon^2}{2} s^2\right) s}{\delta s + 1} \quad (13)$$

توابع بسط اصلاح‌شده مرتبه صفر نوع اول  $I_0$  و دوم  $K_0$  پاسخ‌های مستقل معادله دیفرانسیل (12) هستند.

$$\tilde{T}''(R, s) = A_1 I_0(\lambda R) + A_2 K_0(\lambda R) \quad (14)$$

در حل فوق،  $\lambda = \sqrt{E}$  است.

اعمال شوک گرمایی به استوانه جدار ضخیم به‌گونه‌ای است که در لحظه  $t = 0$ ، استوانه در دمای اولیه  $T_0$  قرار دارد و در زمان  $t = 0^+$  دمای سطوح داخلی و خارجی استوانه مطابق با شرایط مرزی (6) دچار تغییر می‌شوند. شرایط مرزی (6) پس از بی‌بعدسازی طبق روابط (8)، در حوزه لاپلاس به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\tilde{T}''(1, s) = \frac{1}{s} \quad (a-15)$$

$$\tilde{T}''(R_i, s) = \frac{T'_{wi}}{s} \quad (b-15)$$

ضرایب مجهول حل (14) با اعمال شرایط مرزی (15) به صورت زیر تعیین می‌شوند.

$$A_1 = \frac{-K_0(\lambda R_i) + T'_{wi} K_0(\lambda)}{s(I_0(\lambda R_i) K_0(\lambda) - K_0(\lambda R_i) I_0(\lambda))} \quad (a-16)$$

$$A_2 = \frac{I_0(\lambda R_i) - T'_{wi} I_0(\lambda)}{s(I_0(\lambda R_i) K_0(\lambda) - K_0(\lambda R_i) I_0(\lambda))} \quad (b-16)$$

جهت بررسی درستی نتایج، توزیع دمای حاصل از روابط فوق با گزارش‌های منتشر شده مقایسه می‌شود. در شکل 2 توزیع دما طبق مدل هدایت گرمایی هذلولوی - که با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی بیان شده در پیوست به‌دست آمده است - با نتیجه حل تحلیلی مرجع [29] در دو زمان مقایسه شده است. نتایج انطباق قابل قبولی دارند. در این شکل، توزیع دمای مدل هذلولوی برحسب شعاع در زمان‌های 0.7 و 0.1  $t' =$  از ای 1  $\varepsilon =$  رسم شده است. پارامترهای بی‌بعدی که در شکل 2 استفاده شده است مطابق مرجع [29] به صورت زیر است:

$$t^* = \frac{t}{\tau_q} \quad (a-17)$$

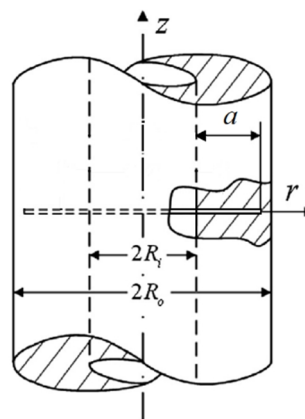


Fig. 1 Cylinder containing a circumferential crack [26]

شکل 1 هندسه استوانه شامل ترک محیطی [26]

$$\vec{q} + \tau_q \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial t^2} = -k \left[ \nabla T + \tau_T \frac{\partial \nabla T}{\partial t} \right] \quad (2)$$

برای یک جامد صلب، قانون اول ترمودینامیک به صورت زیر است:

$$-\nabla \cdot \vec{q} + R_s = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

که در آن،  $R_s$  منبع گرمای داخلی،  $\rho$  چگالی و  $C_p$  گرمای ویژه است. معادله حاکم بر هدایت گرمایی یک جامد صلب با حذف شار گرمایی در روابط (2) و (3) به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - R_s\right) = \nabla \cdot \left(k \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla T\right) \quad (4)$$

با فرض عدم وجود منبع گرمای داخلی، معادله حاکم بر هدایت گرمایی طبق مدل تأخیر فاز دوگانه برای یک استوانه جدار ضخیم و بلند در حالت متقارن محوری به صورت رابطه (5) بیان می‌شود.

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r k \left\{ \frac{\partial T}{\partial r} + \tau_T \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial r} \right\} \right] \quad (5)$$

شرایط مرزی و اولیه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$T(r_i, t) = T_{wi} \quad (a-6)$$

$$T(r_o, t) = T_{wo} \quad (b-6)$$

$$T(r, 0) = T_0 \quad (a-7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(r, 0) = 0 \quad (b-7)$$

برای سادگی، پارامترهای بی‌بعد زیر تعریف می‌شوند.

$$t' = \frac{K'_0 t}{r_o^2} \quad (a-8)$$

$$\varepsilon = \frac{K'_0 \tau_q}{r_o^2} \quad (b-8)$$

$$\delta = \frac{K'_0 \tau_T}{r_o^2} \quad (c-8)$$

$$R_i = \frac{r_i}{r_o} \quad (d-8)$$

$$R = \frac{r}{r_o} \quad (e-8)$$

$$T' = \frac{T - T_0}{T_{wo} - T_0} \quad (f-8)$$

در روابط فوق،  $K'_0 = k/\rho C_p$ ، ضریب پخش حرارتی و  $T_0$  دمای اولیه استوانه است که برابر با دمای محیط ( $T_\infty$ ) در نظر گرفته شده است. با استفاده از پارامترهای بی‌بعد فوق، معادله هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه

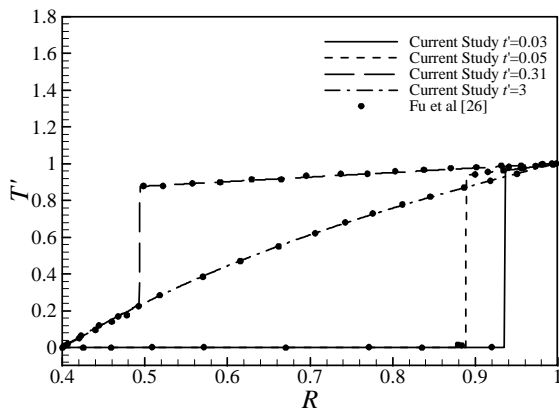


Fig. 3 Hyperbolic temperature distribution

شکل 3 توزیع دما در استوانه طبق مدل هدایت گرمایی هذلولوی

پس از جایگذاری رابطه (14) در رابطه (22) تنش محوری در استوانه در حوزه لاپلاس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S'_z(R, s) = \frac{2}{\lambda(1 - R_i^2)} \{A_1 [I_1(\lambda) - R_i I_1(\lambda R_i)] + A_2 [R_i K_1(\lambda R_i) - K_1(\lambda)]\} - A_1 I_0(\lambda R) - A_2 K_0(\lambda R) \quad (23)$$

در شکل 4 توزیع تنش محوری در  $R = 0.6$  دیواره یک استوانه دو سر آزاد با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هذلولوی بر حسب زمان برای استوانه توخالی به شعاع داخلی  $R_i = 0.4$  و خارجی  $R_o = 1$ ، با مرجع [26] مقایسه شده است. در شکل 5 نیز توزیع تنش محوری در چهار زمان مختلف بر حسب شعاع با مرجع [26] مقایسه شده است. دما در سطح داخلی  $T'_{wi} = 0$ ، در سطح خارجی  $T'_{wo} = 1$  و  $\varepsilon = 0.3$  در نظر گرفته شده است. در مرجع [26] معادله حاکم بر هدایت گرمایی طبق مدل هذلولوی پس از بی بعد سازی در فضای لاپلاس به صورت تحلیلی حل شده و سپس توزیع دما و تنش محوری با تبدیل لاپلاس معکوس عددی در حوزه زمان به دست آمده است. برخلاف توزیع دما، تنش محوری تمام نقاط به محض اعمال شوک گرمایی تغییر می‌کند.

این مسئله به خاطر اعمال شرایط نیرویی (19) و وجود تعادل اتفاق می‌افتد. روش عددی تبدیل لاپلاس معکوس در ضمیمه بطور خلاصه توضیح داده شده است.

#### 4- تعیین ضریب شدت تنش با روش تابع وزنی

##### 1-4 روش تابع وزنی

تابع وزنی اثر بارگذاری و هندسه جسم روی ضریب شدت تنش را از هم جدا می‌کند. به طوری که اگر تابع وزنی برای یک ترک در یک جسم با هندسه معلوم در دسترس باشد، می‌توان ضریب شدت تنش برای هر بارگذاری دلخواه را به دست آورد. اگر تابع وزنی  $m(r, a)$  برای یک هندسه خاص معلوم باشد؛ ضریب شدت تنش با انتگرال گیری از حاصل ضرب توزیع تنش در هندسه بدون ترک،  $\sigma(r)$  و تابع وزنی روی سطح فرضی ترک تعیین می‌شود [19].

$$K_I = \int_{r_i}^{r_i+a} m(r, a) \sigma(r) dr \quad (24)$$

تابع وزنی پیشنهادی شن و گلینکا برای استوانه دارای ترک تحت بارگذاری مود I به صورت زیر است [19]:

$$m(r, a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{r_i + a - r}} + M_1 \sqrt{\frac{2}{\pi a}} + M_2 \sqrt{\frac{2}{\pi a a}}$$

$$R = \frac{r}{l_0} \quad (b-17)$$

$$T' = \frac{T - T_0}{T_{wi} - T_0} \quad (c-17)$$

که در آن،

$$l_0 = \sqrt{\frac{k\tau_q}{\rho c}} \quad (18)$$

دمای بی بعد دیواره داخلی استوانه یک و دمای سطح خارجی استوانه صفر در نظر گرفته شده است. سرعت محدود موج گرما در زمان بی بعد  $t' = 0.1$  کاملاً مشخص است، دمای سطح داخلی تا پیشانی موج افزایش یافته در حالیکه، نقاط جلوتر از پیشانی موج در دمای اولیه قرار دارند. در زمان  $t' = 0.7$  نیز موج گرمایی پس از برگشت از دیواره خارجی به سمت دیواره داخلی منعکس می‌شود.

در شکل 3 توزیع دمای مدل هذلولوی در چهار زمان با مرجع [26] مقایسه شده است که با توجه به شکل، نتایج تطابق خوبی دارند.

#### 3- میدان تنش محوری

در این بخش، میدان تنش در استوانه در حوزه لاپلاس تعیین می‌شود. از کوپل میدان‌های کرنش و دما و همچنین اثر اینرسی صرف نظر می‌شود. دو سر استوانه برای حرکت در راستای محور استوانه آزاد در نظر گرفته می‌شود (شرایط تنش صفحه‌ای در راستای محوری). این شرط مرزی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\int_{r_i}^{r_o} r \sigma_z dr = 0 \quad (19)$$

تنش محوری در استوانه بر حسب توزیع دما به صورت رابطه (20) به دست می‌آید [26].

$$\sigma_z = \frac{2E\alpha}{(1-\nu)(r_o^2 - r_i^2)} \int_{r_i}^{r_o} r T dr - \frac{E\alpha}{1-\nu} T \quad (20)$$

با استفاده از رابطه (21) تنش محوری بی بعد می‌شود.

$$S'_z = \frac{\sigma_z(1-\nu)}{E\alpha(T_{wo} - T_0)} \quad (21)$$

با قرار دادن توزیع تنش (20) در رابطه فوق، تنش محوری بدون بعد استخراج می‌شود.

$$S'_z(R, s) = \frac{2}{1 - R_i^2} \int_{R_i}^1 R \tilde{T}'(R, s) dR - \tilde{T}'(R, s) \quad (22)$$

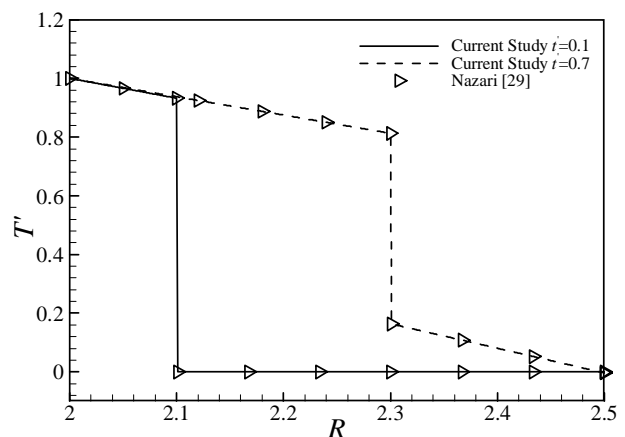


Fig. 2 Hyperbolic temperature distribution

شکل 2 توزیع دما در استوانه طبق مدل هدایت گرمایی هذلولوی

2-4- محاسبه ضریب شدت تنش

انتگرال‌گیری از نتایج عددی تنش در رابطه (24) منجر به نوسان مقادیر ضریب شدت تنش می‌شود [30]. برای حل این مشکل، از برازش دو منحنی دوجمله‌ای بر عبارت تنش گرمایی بدون بعد در هر زمان استفاده شده است. این تقریب به‌خصوص در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی قابل قبول است. اگر موقعیت ناپیوستگی  $\rho$  باشد، توزیع تنش محوری به دو بخش قبل و بعد از ناپیوستگی تقسیم می‌شود تا برازش منحنی دقیق‌تری صورت گیرد.

$$S'_{z1} = A_1 R^2 + B_1 R + C_1, \quad R_i \leq R \leq R_i + \rho \quad (a-29)$$

$$S'_{z2} = A_2 R^2 + B_2 R + C_2, \quad R_i + \rho \leq R \leq R_o \quad (b-29)$$

در شکل 6، ضریب شدت تنش مدل هذلولوی با مرجع [30] مقایسه شده است. در مرجع [30]، دمای بی‌بعد در سطح داخلی استوانه  $T'_{wi} = -1$  و دمای دیواره خارجی  $T'_{wo} = 0$  در نظر گرفته شده است. فشار مکانیکی در سطح داخلی  $p_i = 10$  MPa و در سطح خارجی  $p_o = 0.1$  MPa می‌باشد. همچنین با توجه به بی‌بعدسازی در نظر گرفته شده در این مرجع، سرعت موج گرمایی برابر واحد است. تطابق قابل قبول نتایج دو روش، دقت روش بکار گرفته شده را تأیید می‌کند. در شکل 7، ضریب شدت تنش مدل کاتانو-ورنات برحسب زمان به ازای  $\varepsilon = 0.2$  و طول نسبی ترک  $a/t = 0.4$  با مرجع [26] مقایسه شده است. در این شکل دمای بی‌بعد دیواره داخلی  $T'_{wi} = -0.5$  و دیواره خارجی استوانه مطابق رابطه زیر عایق فرض شده است.

$$\frac{\partial T'}{\partial R}(1) = 0 \quad (30)$$

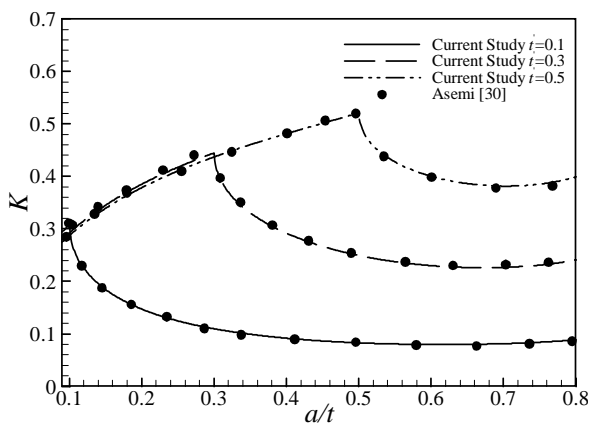


Fig. 6 The Hyperbolic SIF in  $t' = 0.3$

شکل 6 ضریب شدت تنش مدل هذلولوی در  $t' = 0.3$

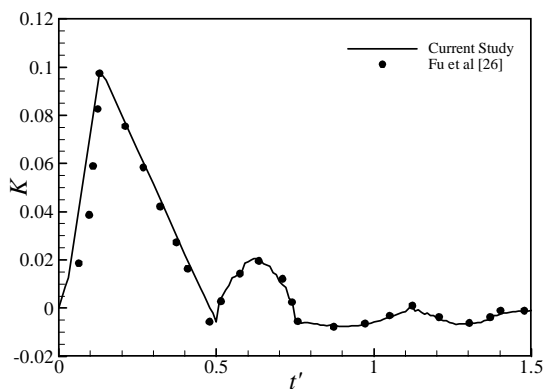


Fig. 7 The Hyperbolic SIF in  $a/t = 0.4$

شکل 7 ضریب شدت تنش مدل هذلولوی در  $a/t = 0.4$

$$\times \sqrt{r_i + a - r} + M_3 \sqrt{\frac{2}{\pi a^3} \sqrt{r_i + a - r}} \quad (25)$$

که در آن،  $r = r_i + a$  موقعیت نوک ترک نسبت به مرکز استوانه است. ضرایب  $M_i$  با توجه به ضرایب شدت تنش متناظر با دو بارگذاری مرجع روی سطح ترک و صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در دهانه ترک به‌صورت زیر تعیین می‌شوند [19].

$$M_1 = -\sqrt{2}\pi Y_1 + 3\sqrt{2}\pi \frac{t}{a} Y_2 - \frac{24}{5} \quad (a-26)$$

$$M_2 = 3 \quad (b-26)$$

$$M_3 = 3\sqrt{2}\pi Y_1 - 6\sqrt{2}\pi \frac{t}{a} Y_2 + \frac{8}{5} \quad (c-26)$$

که در آن،  $Y_1$  و  $Y_2$  توابع چندجمله‌ای از طول نسبی ترک -نسبت طول ترک به ضخامت استوانه- است که در مرجع [19] برای  $R = 2R_i r$  به‌صورت زیر بیان شده است.

$$Y_1 = A_{10} + \exp\left(\sum_{n=1}^6 A_{1n} \left(\frac{a}{t}\right)^{n-1}\right) \quad (a-27)$$

$$Y_2 = A_{20} \tan\left(\sum_{n=1}^6 A_{2n} \left(\frac{a}{t}\right)^n\right) \quad (b-27)$$

ثابت‌های روابط فوق در مرجع [19] آمده است. ضریب شدت تنش گرمایی بصورت زیر بی‌بعد شده است.

$$K = \frac{(1 - \nu)}{E\alpha(T_{wo} - T_o)\sqrt{r_o}} K_I \quad (28)$$

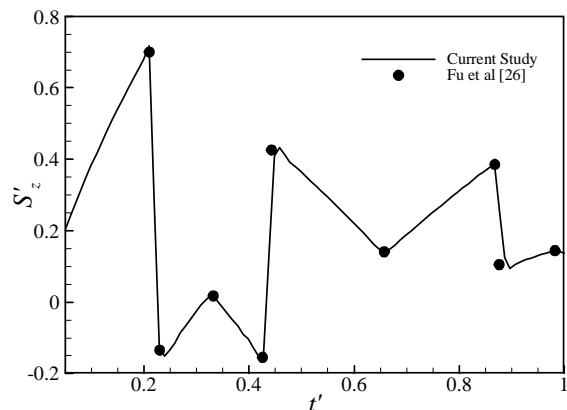


Fig. 4 Time variation of axial thermal stress distribution in  $R = 0.6$

شکل 4 تنش محوری حرارتی در  $R = 0.6$  برحسب زمان

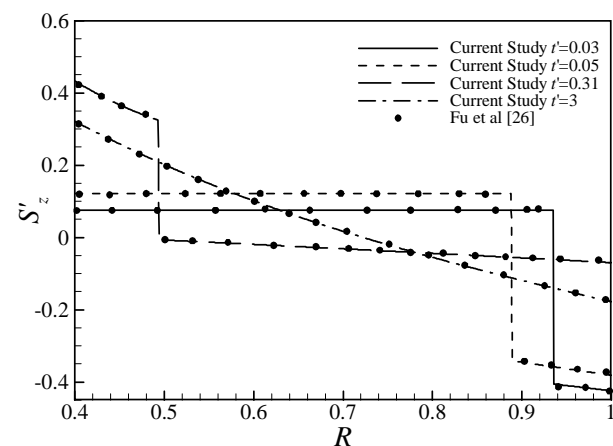


Fig. 5 Hyperbolic axial thermal stress distribution

شکل 5 توزیع تنش محوری حرارتی طبق مدل هذلولوی

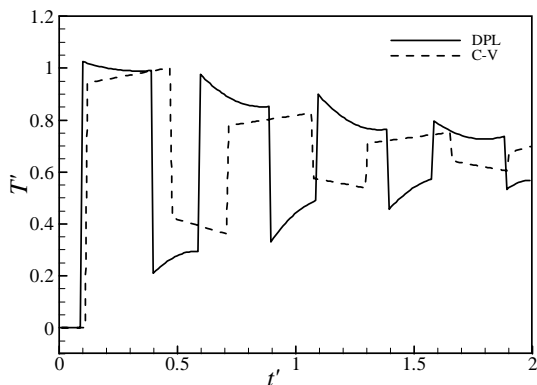


Fig. 9 Time variation of hyperbolic and DPL temperature distribution at  $R = 0.8$

شکل 9 توزیع دمای مدل تأخیر فاز دوگانه و هذلولوی در  $R = 0.8$  برحسب زمان

به تعویق می‌اندازد. رفتار دما در مدل هذلولوی عکس رفتار دما در مدل تأخیر فاز دوگانه است. در حالی که توزیع دما با گذشت زمان از دمای پایا دور می‌شود؛ کاهش ارتفاع پیشانی موج گرما سبب رسیدن آن به حالت پایا می‌شود.

در شکل 10، توزیع دما برحسب شعاع بی‌بعد استوانه برای مقادیر مختلف زمان آسایش بی‌بعد گرادیان دما در زمان‌های مختلف رسم شده است. نمودارها با فرض  $\varepsilon = 0.35$  رسم شده‌اند. طبق رابطه (a-32) سرعت موج گرما با توان 0.5 پارامتر  $\delta$  متناسب است. در نتیجه، برای مقادیر بزرگتر  $\delta$  سرعت موج گرما افزایش می‌یابد.

در شکل 11، نیز اثر زمان آسایش شار بر روی توزیع دما به‌طور جداگانه نشان داده شده است. طبق رابطه (a-32) سرعت موج گرما با پارامتر  $\varepsilon$  نسبت عکس است. در اینجا مقادیر بزرگتر  $\varepsilon$ ، منجر به سرعت کمتر موج گرما می‌شود.

در شکل 12، توزیع تنش در زمان‌های مختلف برای مدل تأخیر فاز دوگانه و هذلولوی مقایسه شده است. سرعت محدود موج تنش در شکل مشهود است.

در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی، نقاط بین دیواره داخلی و پیشانی موج تنش، دارای تنش کششی هستند. درحالی‌که تنش در نقاط بین پیشانی موج گرمایی و دیواره خارجی فشاری است. با توجه به صفر بودن بار مکانیکی، سطح زیر نمودار تنش محوری برحسب شعاع در هر لحظه صفر است. شبیه توزیع دما، سرعت موج حاصل از مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز

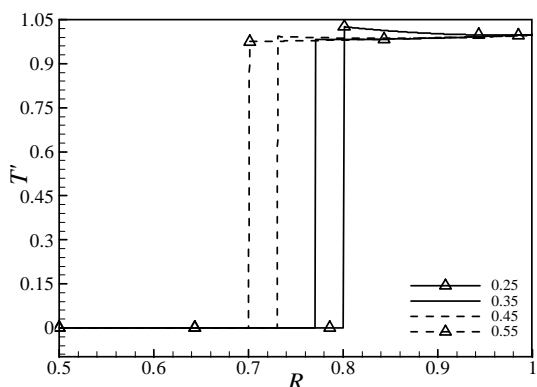


Fig. 10 The effect of  $\delta$  on the DPL temperature distribution for  $\varepsilon = 0.35$  at  $t' = 0.1$

شکل 10 توزیع دما برای مقادیر مختلف  $\delta$  در  $t' = 0.1$  به ازای  $\varepsilon = 0.35$

با فرض شرایط مرزی بیان شده، ضرایب مجهول معادلات (14) و (23) در حوزه لاپلاس به‌شکل زیر قابل بیان هستند.

$$A_1 = \frac{-0.5K_1(\lambda)}{s(I_0(\lambda R_i)K_1(\lambda) + K_0(\lambda R_i)I_1(\lambda))} \quad (a-31)$$

$$A_2 = \frac{-0.5I_1(\lambda)}{s(I_0(\lambda R_i)K_1(\lambda) + K_0(\lambda R_i)I_1(\lambda))} \quad (b-31)$$

با توجه به شکل، نتایج ارائه شده از دقت کافی برخوردارند.

## 5- نتایج و بحث

در این بخش، نتایج تحلیل ترموالاستیک یک استوانه بلند حاوی یک ترک محیطی کامل ارائه شده است. میدان‌های دما و تنش محوری با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی از روابط (14) و (23) به‌دست می‌آیند. سپس ضریب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزنی - رابطه (24) - برحسب طول نسبی ترک استخراج می‌شود. با توجه به شرایط مرزی در نظر گرفته شده در رابطه (6)، موج گرمایی در نمودارهای دما، تنش و ضریب شدت تنش از دیواره خارجی استوانه به سمت دیواره داخلی حرکت می‌کند.

در شکل 8، توزیع دمای حاصل از مدل تأخیر فاز دوگانه با هذلولوی مقایسه شده است. توزیع دما با فرض شرایط مرزی رابطه (15) و برای مقادیر  $\varepsilon = 0.35$  و  $\delta = 0.25$  به‌دست آمده است. طبق رابطه (10)، سرعت بی‌بعد موج گرمایی در مدل تأخیر فاز دوگانه و مدل هذلولوی باتوجه به داده‌ها به‌ترتیب برابر است با:

$$C_{DPL} = \frac{\sqrt{2\delta}}{\varepsilon} = 2.02 \quad (a-32)$$

$$C_{C-V} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = 1.69 \quad (b-32)$$

در نمودارها، موج گرما برای هر دو مدل از دیواره خارجی به‌سمت دیواره داخلی استوانه با سرعت محدود حرکت می‌کند. موقعیت پیشانی موج با سرعت به‌دست آمده در روابط فوق انطباق دارد. در شکل 9، توزیع دما در موقعیت  $R=0.8$  برحسب زمان نشان داده شده است. بیشتر بودن سرعت موج گرما طبق مدل تأخیر فاز دوگانه - با توجه به مقادیر انتخابی - در اینجا نیز مشهود است. مطابق شکل، بیشینه دما در قله‌های نمودار مربوط به مدل تأخیر فاز دوگانه از مدل هذلولوی بزرگتر است که از زمان آسایش گرادیان دمای در نظر گرفته شده در رابطه ساختاری شار گرمایی مدل تأخیر فاز دوگانه ناشی می‌شود.

در مدل تأخیر فاز دوگانه دما با گذشت زمان به دمای پایا میل می‌کند؛ اما در لحظه عبور پیشانی موج گرما تغییر شدید دما رسیدن به حالت پایا را

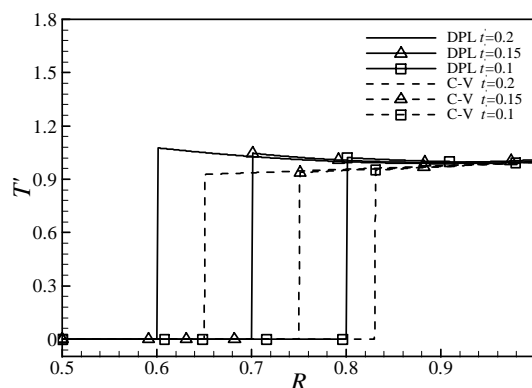
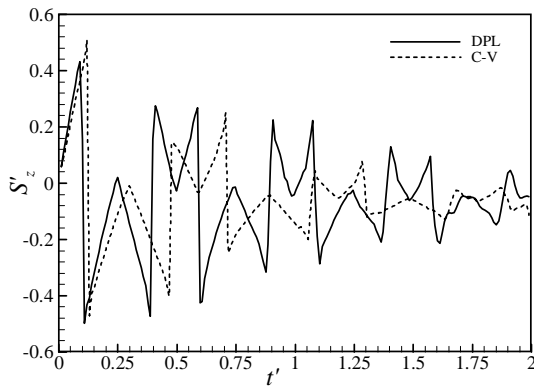
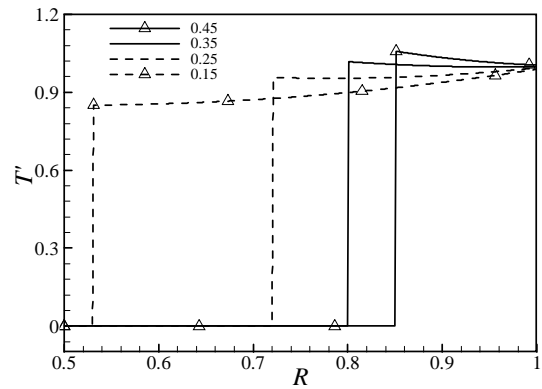


Fig. 8 Hyperbolic and DPL temperature distribution

شکل 8 توزیع دمای مدل تأخیر فاز دوگانه و هذلولوی در زمان‌های مختلف

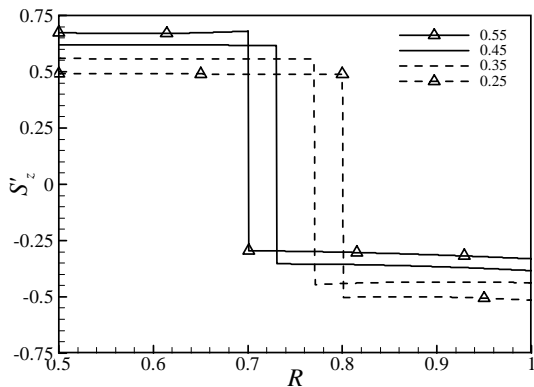


**Fig. 13** Hyperbolic and DPL stress distribution in  $R = 0.8$   
 شکل 13 توزیع تنش تأخیر فاز دوگانه و هذلولوی در  $R = 0.8$  برحسب زمان



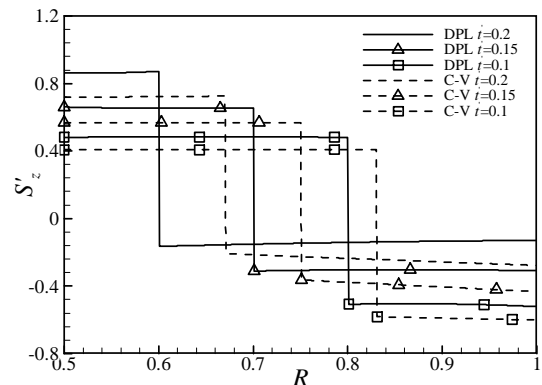
**Fig. 11** The effect of  $\varepsilon$  on the DPL temperature distribution for  $\delta = 0.25$  at  $t' = 0.1$

شکل 11 توزیع دما برای مقادیر مختلف  $\varepsilon$  در  $t' = 0.1$  به ازای  $\delta = 0.25$



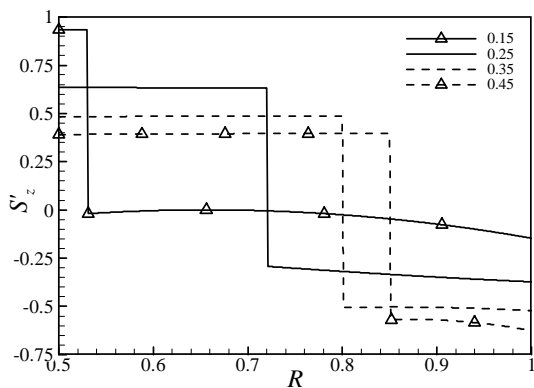
**Fig. 14** The effect of  $\delta$  on the stress distribution for  $t' = 0.1$  and  $\varepsilon = 0.35$

شکل 14 اثر زمان آسایش گرادیان دما بر توزیع تنش در  $t' = 0.1$  به ازای  $\varepsilon = 0.35$



**Fig. 12** Hyperbolic and DPL stress distribution

شکل 12 توزیع تنش مدل تأخیر فاز دوگانه و هذلولوی در زمان‌های مختلف



**Fig. 15** The effect of  $\varepsilon$  on the stress distribution for  $t' = 0.1$  and  $\delta = 0.25$

شکل 15 اثر زمان آسایش شار بر توزیع تنش در  $t' = 0.1$  به ازای  $\delta = 0.25$

متناسب با طول ترک بیشتر می‌شود. درحالی‌که وجود تنش فشاری بین پیشانی موج و دیواره خارجی، باعث کاهش ضریب شدت تنش برای ترک‌هایی می‌شود که پیشانی موج تنش از نوک آنها گذشته است. کاهش شدید ضریب شدت تنش پس از عبور موج تنش، تکینگی تابع وزنی در نوک ترک است که اثر بیشتر توزیع تنش اطراف ترک در محاسبه ضریب شدت تنش را در پی دارد.

در شکل 17، اثر نسبت شعاع خارجی به داخلی استوانه بر ضریب شدت تنش حاصل از مدل تأخیر فاز دوگانه در استوانه‌های جدار ضخیم برای سه نسبت شعاع 1.25، 1.5 و 2 در دو زمان مختلف نشان داده شده است.

دوگانه - با توجه به مقادیر انتخابی پارامترها - از مدل هذلولوی بیشتر است. در شکل 13، توزیع تنش برحسب زمان برای دو مدل تأخیر فاز دوگانه و هذلولوی رسم شده است. زمان آسایش شار گرمایی بی‌بعد  $\varepsilon = 0.35$  و زمان آسایش گرادیان دمای بی‌بعد  $\delta = 0.25$  در نظر گرفته شده است. برخلاف مدل فوریه، تنش غیرفوری‌ای در یک نقطه نسبت به زمان حول مقدار پایا نوسان می‌کند. سرعت بیشتر موج گرما در مدل تأخیر فاز دوگانه باعث تغییر سریع‌تر تنش می‌شود. همچنین، تنش غیرفوری‌ای در یک نقطه بخاطر عبور موج تنش از آن بطور متناوب کششی و فشاری می‌شود. وجود استهلاک بیشتر در مدل هذلولوی باعث می‌شود علی‌رغم دامنه بزرگتر تنش در زمان‌های ابتدایی، تنش در این مدل زودتر به مقدار پایا میل کند.

در شکل‌های 14 و 15، اثر زمان آسایش گرادیان دما و شار گرمایی روی توزیع تنش مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه نشان داده شده است. افزایش  $\delta$  و کاهش  $\varepsilon$  باعث بیشتر شدن سرعت موج دما و در نتیجه سرعت موج تنش می‌شود. اعمال شرایط مرزی (6) باعث ایجاد تنش فشاری در بخش بیرونی دیواره استوانه تا موقعیت پیشانی موج تنش و تنش کششی در بخش داخلی آن - بخاطر تعادل نیرویی کل دیواره - می‌شود.

در شکل 16 ضریب شدت تنش مدل‌های فوریه، هذلولوی و تأخیر فاز دوگانه در زمان‌های مختلف مقایسه شده‌اند. قبل از رسیدن پیشانی موج تنش به دیواره داخلی، ضریب شدت تنش در مدل‌های هذلولوی و تأخیر فاز دوگانه برای ترکی حد اکثر است که موج تنش در موقعیت نوک آن قرار دارد. با توجه به وجود تنش کششی بین دیواره داخلی و پیشانی موج، برای ترک‌هایی که پیشانی موج تنش به نوک آنها نرسیده است؛ مقدار ضریب شدت تنش

اما با گذشت زمان و مستهلک شدن موج تنش این اختلاف کم می‌شود. بطوریکه، پس از مدتی از اعمال شوک گرمایی، ضریب شدت تنش بیشینه در طول ترک نسبی 0.8 اتفاق می‌افتد. این مسئله در استوانه‌های نازک‌تر بیشتر به چشم می‌خورد.

در شکل 18، اثر زمان آسایش گرادیان دما بر ضریب شدت تنش مدل تأخیر فاز دوگانه به ازای  $\varepsilon = 0.35$ ، در زمان  $t' = 0.1$  نشان داده شده است. طبق رابطه (a-31) سرعت موج تنش با توان 0.5 پارامتر  $\delta$  متناسب است. در نتیجه، برای مقادیر بزرگتر  $\delta$  سرعت موج گرما افزایش می‌یابد. از طرفی، تنش در فاصله بین موقعیت پیشانی موج تنش و دیواره داخلی استوانه کششی است (در شکل 14 نشان داده شده است). در نتیجه، ضریب شدت تنش برای ترک‌هایی که موج تنش به آنها نرسیده است؛ با سرعت موج تنش متناسب است. از طرف دیگر، سرعت بیشتر موج تنش باعث می‌شود ضریب شدت تنش برای ترک‌هایی که موج تنش از آنها گذشته است؛ نسبت به مقدار حداکثر بیشتر کاهش یابد و کوچکتر شود.

در شکل 19، اثر زمان آسایش شار گرمایی بر ضریب شدت تنش مدل تأخیر فاز دوگانه با فرض  $\delta = 0.25$  در زمان  $t' = 0.1$  نشان داده شده است. طبق رابطه (a-32) سرعت موج تنش با پارامتر  $\varepsilon$  نسبت عکس دارد و مقادیر بزرگتر  $\varepsilon$ ، منجر به سرعت کمتر موج گرما می‌شود. سرعت بیشتر موج تنش باعث افزایش ضریب شدت تنش برای ترک‌هایی می‌شود که موج تنش هنوز به نوک آنها نرسیده است. به‌علاوه، کاهش بیشتر ضریب شدت تنش برای ترک‌هایی که موج تنش از نوک آنها گذشته است را در پی دارد. وقتی

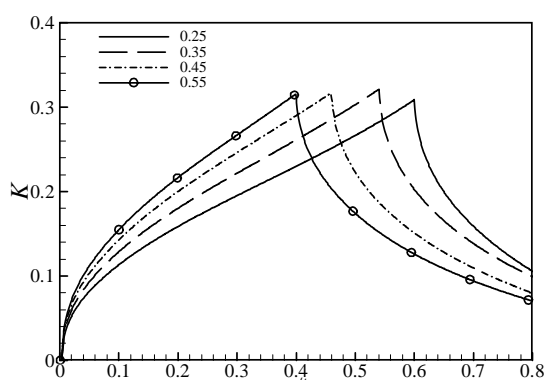


Fig. 18 The effect of  $\delta$  on the DPL SIF

شکل 18 اثر زمان آسایش گرادیان دما بر ضریب شدت تنش مدل تأخیر فاز دوگانه

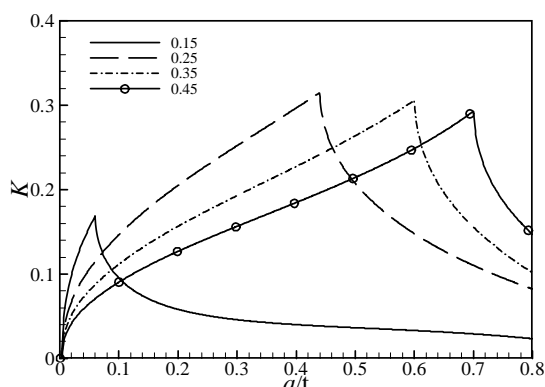


Fig. 19 The effect of  $\varepsilon$  on the DPL SIF

شکل 19 اثر زمان آسایش شار گرمایی بر ضریب شدت تنش مدل تأخیر فاز دوگانه

$R_o/R_i = 1.25$  شعاع داخلی استوانه  $R_i = 2$  و شعاع خارجی  $R_o = 2.5$  برای  $R_o/R_i = 1.5$  شعاع داخلی  $R_i = 1$  و شعاع خارجی  $R_o = 1.5$  و برای نسبت شعاع  $R_o/R_i = 2$  شعاع داخلی  $R_i = 0.5$  و شعاع خارجی  $R_o = 1$  در نظر گرفته شده است. شعاع‌های داخلی و خارجی به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که ضخامت استوانه‌ها در هر سه حالت یکسان باشد. زمان‌های آسایش شار گرمایی و گرادیان دما به ترتیب  $\varepsilon = 0.35$  و  $\delta = 0.25$  انتخاب شده است که منجر به  $C_{DPL} = 2.02$  می‌شود. در هر زمان، ناپیوستگی‌ها در نمودارهای ضریب شدت تنش برحسب طول نسبی ترک در نقاط یکسانی رخ می‌دهند. در حالت کلی، ضریب شدت تنش در استوانه‌های نازک (با نسبت  $R_o/R_i$  کوچکتر) از استوانه‌های ضخیم بیشتر است. بنابراین، امکان رشد ترک در استوانه‌های نازک بیشتر است. براساس نتایج شکل 17، در زمان‌های اولیه اعمال شوک گرمایی رفتار ترک‌های کوتاه ( $a/t < 0.2$ ) مشابه است و ضخامت دیواره استوانه ( $R_o/R_i$ ) بر ضریب شدت تنش ترک‌های کوتاه اثر چندانی ندارد.

به‌طوری‌که، ضریب شدت تنش برای استوانه‌های دارای نسبت شعاع 2 و  $R_o/R_i = 1.25$  در زمان  $t' = 0.1$  حدود 1% و در زمان  $t' = 0.2$  حدود 2.5% باهم اختلاف دارند. در حالی‌که، ترک‌های عمیق در استوانه‌های نازک شرایط بحرانی دارند. مطابق شکل 17، در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی ضریب شدت تنش برای ترک‌هایی که موج تنش از نوک آنها عبور کرده است به شدت کاهش می‌یابد. برای مثال، در زمان  $t' = 0.1$  ضریب شدت تنش برای ترکی با طول نسبی  $a/t = 0.8$  در استوانه‌ای با

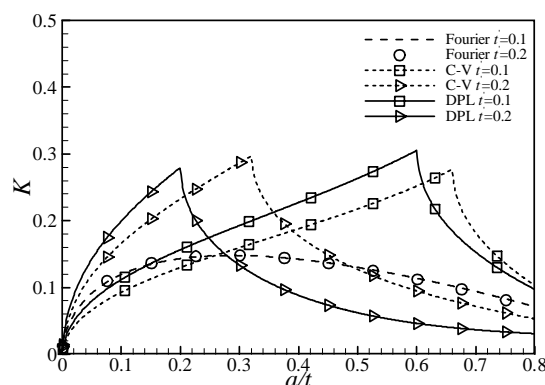


Fig. 16 Time variation of Fourier, hyperbolic and DPL SIFs

شکل 16 ضریب شدت تنش مدل فوری، هذلولوی و تأخیر فاز دوگانه در زمان‌های مختلف

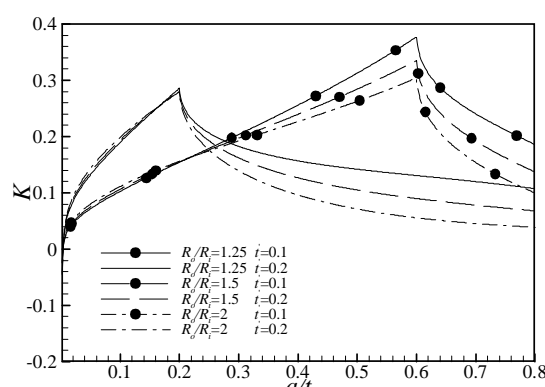


Fig. 17 The effect of wall thickness on the SIF

شکل 17 ضریب شدت تنش برای نسبت شعاع‌های مختلف



7- ضمایم

1-7- ضمیمه 1

با استفاده از روش‌های عددی میدان‌های دما و تنش در فضای لاپلاس به حوزه زمان نگاشت می‌شود [31]. معکوس تبدیل لاپلاس تابع  $\tilde{f}(s)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{v-i\infty}^{v+i\infty} \tilde{f}(s) e^{st} ds \quad (33)$$

که در آن،  $i = \sqrt{-1}$  و  $s = v + i\omega$  است.  $v$  مقدار حقیقی دلخواهی است که از قسمت حقیقی تمام نقاط تکین تابع  $\tilde{f}(s)$  بزرگ‌تر است. رابطه (33) به صورت زیر نیز قابل بیان است.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{\pi} \int_0^\infty [\text{Re}\{\tilde{f}(s)\} \cos \omega t - \text{Im}\{\tilde{f}(s)\} \sin \omega t] d\omega \quad (34)$$

با استفاده از بسط سری فوری  $g(t) = e^{-vt} f(t)$  در بازه  $[0, 2\pi]$ ، دورباین یک رابطه‌ی تقریبی به شکل زیر برای محاسبه تابع  $f(t)$  در حوزه لاپلاس پیشنهاد کرد.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{\pi} \left[ -\frac{1}{2} \text{Re}\{\tilde{f}(s)\} + \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re}\left\{\tilde{f}\left(v + i \frac{n\pi}{\tau}\right)\right\} \cos \frac{n\pi}{\tau} t - \sum_{n=0}^{\infty} \text{Im}\left\{\tilde{f}\left(v + i \frac{n\pi}{\tau}\right)\right\} \sin \frac{n\pi}{\tau} t \right] - \text{Er1}(v, t, \tau) \quad (35)$$

که در آن،  $\text{Er1}(v, t, \tau)$  خطای گسسته‌سازی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Er1}(v, t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nvt} f(2n\tau + t) \quad (36)$$

با انتخاب مقدار  $v$  بزرگ‌تر امکان کاهش خطای گسسته‌سازی وجود دارد. تخمین سری‌های بی‌نهایت فوق با  $N$  جمله باعث ایجاد خطای انباشتی در محاسبات می‌شود.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{\tau} \left[ -\frac{1}{2} \text{Re}\{\tilde{f}(s)\} + \sum_{n=0}^N \text{Re}\left\{\tilde{f}\left(v + i \frac{n\pi}{\tau}\right)\right\} \cos \frac{n\pi}{\tau} t - \sum_{n=0}^N \text{Im}\left\{\tilde{f}\left(v + i \frac{n\pi}{\tau}\right)\right\} \sin \frac{n\pi}{\tau} t \right] - \text{Er1}(v, t, \tau) + \text{Er2}(N, v, t, \tau) \quad (37)$$

که  $\text{Er2}(N, v, t, \tau)$  بدین صورت بیان می‌شود:

$$\text{Er2}(N, v, t, \tau) = \frac{e^{vt}}{\tau} \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} \text{Re}\left\{\tilde{f}\left(v + i \frac{n\pi}{\tau}\right)\right\} \cos \frac{n\pi}{\tau} t - \sum_{n=N+1}^{\infty} \text{Im}\left\{\tilde{f}\left(v + i \frac{n\pi}{\tau}\right)\right\} \sin \frac{n\pi}{\tau} t \right) \quad (38)$$

در مرجع [31] یک روش تصحیح‌کننده برای کاهش خطای گسسته‌سازی و انباشتی پیشنهاد شده است. با توجه به رابطه (36)، خطای گسسته‌سازی می‌تواند با انتخاب مقدار  $v\tau$  بزرگ‌تر، کاهش یابد. از طرفی، مقادیر بیش از حد بزرگ  $v\tau$  ممکن است سبب واگرایی خطای انباشتی - بیان شده در رابطه (38) شود. روش پیشنهادی [31] منجر به کاهش خطای گسسته‌سازی بدون افزایش خطای انباشتی و تعیین تخمین بهینه  $v$ ، با مقادیر ثابت برای  $N$  و  $\tau$  می‌شود. در این روش، مقدار بهینه  $v$  با کمینه کردن مجموع خطاهای گسسته‌سازی و انباشتی به دست می‌آید.

2-7- ضمیمه 2

در مرجع [11]، تابع وزنی چهار جمله‌ای، ضرایب شدت تنش مرجع و

موج تنش به دیواره داخلی نزدیک می‌شود؛ ضریب شدت تنش بیشینه کاهش می‌یابد.

در شکل 20 ضریب شدت تنش طبق مدل تأخیر فاز دوگانه برحسب زمان نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که ضریب شدت تنش از مقدار صفر شروع شده و با نوسان‌های متوالی در جسم تغییر می‌یابد. با توجه به استهلاک قله‌های نمودار و مقدار ضریب شدت تنش در زمان‌های 0.25، 0.5، 0.75 و 1 مشاهده می‌شود که ضریب شدت تنش در حال همگرایی به سمت مقدار پایایی خود در استوانه است. نوسان تنش طبق تئوری تأخیر فاز دوگانه مهمترین عامل نوسان ضریب شدت تنش است.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی کامل واقع در سطح داخلی یک استوانه جدار ضخیم به دست آمده است که تحت شوک گرمایی طبق مدل تأخیر فاز دوگانه قرار دارد. نتایج این تحقیق به صورت زیر قابل بیان است:

در مدل تأخیر فاز دوگانه، زمان آسایش گرادیان دما موجب پیش‌بینی مقادیر بزرگ‌تر دما و تنش نسبت به مدل هذلولوی می‌شود.

افزایش زمان آسایش گرادیان دما و کاهش زمان آسایش شار گرمایی باعث افزایش سرعت موج گرمایی، کاهش بیشینه دما و افزایش بیشینه تنش محوری و ضریب شدت تنش در مدل تأخیر فاز دوگانه می‌شود.

در ابتدای اعمال شوک گرمایی، ضریب شدت تنش مدل فوری در طول ترک‌هایی که با موج تنش فاصله دارند و موج تنش به نوک آنها نرسیده است، از مدل تأخیر فاز دوگانه بزرگ‌تر است ( $t' = 0.1$ ). اما در طول ترک‌هایی که موج تنش به آنها نزدیک شده است ( $t' = 0.2$ )، ضریب شدت تنش مدل فوری از مدل تأخیر فاز دوگانه کمتر است (شکل 16).

در ترک‌های کوتاه  $a/t \approx 0.1$  ضریب شدت تنش بیشینه برای مدل‌های فوری، هذلولوی و تأخیر فاز دوگانه اختلاف کمی دارند. اما در ترک‌های با طول بیشتر، ضریب شدت تنش مدل تأخیر فاز دوگانه از مدل فوری به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر است.

در مدل تأخیر فاز دوگانه و برای  $0.1 < a/t < 0.8$  ضریب شدت بیشینه در هر لحظه برای ترکی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش در موقعیت نوک آن قرار دارد.

با توجه به رفتار متفاوت ترک تحت بارگذاری‌های گرمایی فوری‌ای و غیرفوری‌ای، در نظر گرفتن مدل مناسب برای هدایت گرمایی در تحلیل و طراحی سازه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

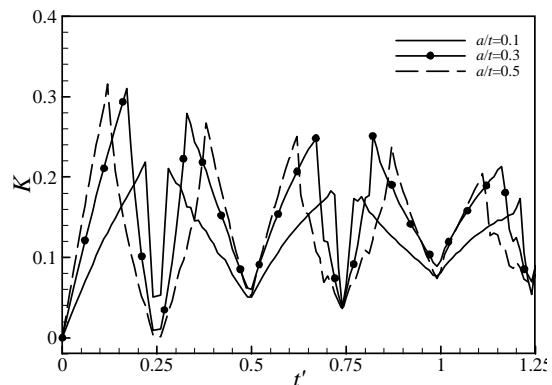


Fig. 20 Time variation of DPL SIF

شکل 20 ضریب شدت تنش مدل تأخیر فاز دوگانه برحسب زمان

- thick walled cylinder, *International Journal of Fracture*, Vol. 73, No. 4, pp. 359-366, 1995.
- [16] H. Grebner, Finite element calculation of stress intensity factors for complete circumferential surface cracks at the outer wall of a pipe, *International Journal of Fracture*, Vol. 27, No. 3, pp. 99-102, 1985.
- [17] S. M. Nabavi, R. Ghajar, Analysis of thermal stress intensity factors for cracked cylinders using weight function method, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 12, pp. 1811-1823, 2010.
- [18] G. Glinka, G. Shen, Universal features of weight functions for cracks in mode I, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 40, No. 6, pp. 1135-1146, 1991.
- [19] R. Ghajar, S. M. Nabavi, Closed-form thermal stress intensity factors for an internal circumferential crack in a thick-walled cylinder, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 33, No. 8, pp. 504-512, 2010.
- [20] D. M. Chang, B. L. Wang, Transient thermal fracture and crack growth behavior in brittle media based on non-Fourier heat conduction, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 94, No.1, pp. 29-36, 2012.
- [21] K. Q. Hu, Z. T. Chen, Thermoelastic analysis of a partially insulated crack in a strip under thermal impact loading using the hyperbolic heat conduction theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 51, No. 1, pp. 144-160, 2012.
- [22] Z. T. Chen, K. Q. Hu, Thermoelastic analysis of a cracked substrate bonded to a coating using the hyperbolic heat conduction theory, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 37, No. 3, pp. 270-291, 2014.
- [23] Z. T. Chen, K. Q. Hu, Thermo-elastic analysis of a cracked half-plane under a thermal shock impact using the hyperbolic heat conduction theory, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 35, No. 4, pp. 342-362, 2012.
- [24] B. L. Wang, Transient thermal cracking associated with non-classical heat conduction in cylindrical coordinate system, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 29, No. 2, pp. 211-218, 2013.
- [25] J. W. Fu, Z. T. Chen, L. F. Qian, K. Q. Hu, Transient thermoelastic analysis of a solid cylinder containing a circumferential crack using the C-V heat conduction model, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 37, No. 2, pp. 1324-1345, 2014.
- [26] J. W. Fu, Z. T. Chen, L. F. Qian, Y. D. Xu, Non-Fourier thermoelastic behavior of a hollow cylinder with an embedded or edge circumferential crack, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 128, No. 1, pp. 103-120, 2014.
- [27] K. Q. Hu, Z. T. Chen, Transient heat conduction analysis of a cracked half-plane using dual-phase-lag theory, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 62, No. 2174, pp. 445-451, 2013.
- [28] B. Wang, J. E. Li, C. Yang, Thermal shock fracture mechanics analysis of a semi-infinite medium based on the dual-phase-lag heat conduction model, *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 471, No. 2174, pp. 20140595, 2015.
- [29] M.B. Nazari, O. Asemi, Stress intensity factor for a longitudinal semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder under hyperbolic thermal loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 143-151, 2015, (in Persian).
- [30] O. Asemi, M.B. Nazari, Evaluation of the stress intensity factor for circumferential cracked cylinders under non-classical thermal shock, *Journal of solid and fluid mechanics*, Vol. 5, No. 3, pp. 101-112, 2016, (in Persian).
- [31] G. Honig, U. Hirdes, A method for the numerical inversion of Laplace transform, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 10, No.1, pp. 113-132, 1984.
- ضرایب  $M_i (i = 1, 2, 3)$  برای نسبت شعاع‌های مختلف ارائه شده است. با استفاده از ضرایب شدت تنش مرجع بیان شده و استفاده از روش انطباق منحنی، ضرایب تصحیح هندسه  $Y_i (i = 1, 2, 3)$  به صورت توابع چندجمله‌ای (درجه 19) استخراج می‌شوند. در مرجع [11]، ضرایب شدت تنش مرجع برای بارگذاری‌های ثابت، خطی و سهمی، ارائه شده‌اند. از تابع وزنی شرح داده شده تنها برای رسم شکل 7، با در نظر گرفتن نسبت شعاع داخلی به خارجی 0.3 استفاده شده است.

## 8- مراجع

- [1] B. Straughan, *Heat Waves*, pp. 3-4, New York: Springer, 2011.
- [2] M. H. Babaei, Z. T. Chen, Transient hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow cylinder, *Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 24, No. 2, pp. 325-330, 2010.
- [3] C. Cattaneo, Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 247, No. 4, pp. 431-433, 1958.
- [4] P. Vernotte, Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 246, No. 22, pp. 3154-3155, 1958.
- [5] C. Kroner, H. W. Bergmann, The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation, *Applied Physics*, Vol. 67, No. 1, pp. 397-401, 1998.
- [6] S. Godoy, L. S. Garcia-Colin, Nonvalidity of the telegrapher's diffusion equation in two and three dimensions for crystalline solids, *Physical Review*, Vol. 55, No. 3, pp. 2127-2131, 1997.
- [7] D. Y. Tzou, A unified field approach for heat conduction from macro- to microscale, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 117, No. 1, pp. 8-16, 1996.
- [8] D. Y. Tzou, The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, No. 17, pp. 3231-3240, 1995.
- [9] A. H. Akbarzadeh, Z. T. Chen, Transient heat conduction in a functionally graded cylindrical panel based on the dual phase lag theory, *International Journal of Thermophysics*, Vol. 33, No. 6, pp. 1100-1125, 2012.
- [10] D.Y. Tzou, Experimental support for the lagging response in heat propagation, *Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 9, No. 4, pp. 686-693, 1995.
- [11] I. S. Jones, G. Rothwell, Reference stress intensity factors with application to weight functions for internal circumferential cracks in cylinders, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 8, No. 4, pp. 435-454, 2001.
- [12] R. Erdol, F. Erdogan, A thick-walled cylinder with an axisymmetric internal or edge crack, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, No. 2, pp. 281-286, 1978.
- [13] L. Aydin, H. S. A. Artem, Axisymmetric crack problem of thick-walled cylinder with loadings on crack surfaces, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, No. 6, pp. 1294-309, 2008.
- [14] H. F. Nied, F. Erdogan, The elasticity problem for a thick-walled cylinder containing a circumferential crack, *International Journal of Fracture*, Vol. 22, No. 4, pp. 277-301, 1983.
- [15] Z. Q. Wang, The calculation of dynamic stress intensity factors for a cracked