



کنترل گسترده معادله برگر غیر خطی

بهروز رحمانی^{1*}، امین موسائی¹، احمد منصوریان طبائی²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج

* b_rahmani@yu.ac.ir، 75914-353 پستی صندوق

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 25 مهر 1393
پذیرش: 13 دی 1393
ارائه در سایت: 11 اسفند 1393

کلید واژگان:
معادله برگر غیر خطی
روش فازی تاکاگی - ساجینو
تبدیل فوری سریع
جبران سازی موازی توزیع یافته

چکیده

در این مقاله، روشی برای کنترل گسترده معادله برگر غیرخطی پیشنهاد شده است. در این روش، ابتدا معادله مشتق جزئی غیرخطی حاکم بر سیستم با استفاده از روش خطی سازی تاکاگی- ساجینو به دو معادله مشتق جزئی خطی تبدیل می شود؛ به گونه ای که ترکیب فازی آن ها به صورت دقیق معادله غیرخطی اصلی را بازیابی می کند. این فرآیند به منظور پیش گیری از پدیده اختلال فرکانسی یا آلیاسینگ صورت می پذیرد. سپس هر کدام از این معادلات با به کار بردن تبدیل فوری سریع به مجموعه ای از معادلات مشتق معمولی تبدیل می شود؛ بنابراین می توان گفت که ترکیب دو روش تاکاگی- ساجینو و تبدیل فوری سریع، به دو معادله مشتق معمولی برای هر نقطه شبکه ای منجر می شود. در این راستا، برای پایدارسازی دینامیک هر کدام از این نقاط، از روش جبران سازی توزیع یافته موازی استفاده می شود. پایداری روش کنترل پیشنهادی با استفاده از قضیه دوم لیاپانوف برای سیستم های فازی اثبات شده و بر آن اساس بهره های کنترلی پایدارساز طراحی شده است. شبیه سازی های عددی کارایی روش پیشنهادی نسبت به پژوهش های همانند را نشان می دهد، که از آن جمله می توان به مشخصه های بهتر پاسخ گذرا، خطای حالت ماندگار کوچک و مقاوم بودن نسبی آن در مقابل نویزهای اندازه گیری اشاره کرد.

Distributed control of nonlinear Burger's equation

Behrooz Rahmani*, Amin Moosaie, Ahmad Mansourian Tabaei

Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran

*P.O.B. 75914-353, Yasouj, Iran, b_rahmani@yu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 October 2014
Accepted 03 January 2015
Available Online 02 March 2015

Keywords:
Nonlinear Burger's equation
Takagi-Sugeno fuzzy method
fast Fourier transform
parallel distributed compensation

ABSTRACT

In this paper, a method for distributed control of nonlinear Burger's equation is proposed. In this method, first the nonlinear partial differential equation governing the system is transformed into two linear partial differential equations using the Takagi-Sugeno linearization; such that their fuzzy composition exactly recovers the original nonlinear equation. This is done to alleviate the aliasing phenomenon occurring in nonlinear equations. Then, each of the two linear equations is converted to a set of ordinary differential equations using the fast Fourier transform (FFT). Thus, the combination of Takagi-Sugeno method and FFT technique leads to two ordinary differential equation for each grid point. For the stabilization of the dynamics of each grid point, the use is made of the parallel distributed compensation method. The stability of the proposed control method is proved using the second Lyapunov theorem for fuzzy systems. In order to solve the nonlinear Burger equation, a combination of FFT and finite difference methodologies is implemented. Simulation studies show the performance of the proposed method, for example the smaller settling time and overshoot and also its relatively robustness with respect to the measurement noises.

1- مقدمه

هر چند تا به حال از روش های کاهش مرتبه برای بهبود پایداری این معادلات بهره برده شده، ولی این تحقیقات هنوز در دوران طفولیت به سر برده و به تکامل لازم برای پیاده سازی در عمل نزدیک نشده است. براین اساس، توجه بسیاری از محققان بر یک مدل ساده شده فضایی یک بعدی که دارای عبارت پیچیده کننده غیرخطی جابه جایی² موجود در معادلات ناویر- استوکس، متمرکز شده است [4، 3]. این معادله که برگر³ نام گذاری شده است، علاوه بر خاصیت گفته شده، توانایی مدل سازی رفتار جریان های مافوق صوت پیرامون ایرفویل ها، موج های شوک⁴ و همچنین جریان های ترافیکی را دارد [5]. در این مقاله، روشی برای کنترل گسترده معادله برگر

در دو دهه اخیر، پژوهش گران توجه زیادی به مدل سازی و کنترل دینامیک سیالات، یا به عبارت دیگر کنترل جریان سیال کرده اند. برای نمونه می توان به کنترل حلقه بسته آشفتنگی به منظور کاهش نیروی درگ، پایدارسازی سیستم های در معرض سقوط سیال، کنترل میزان تولید آلاینده ها در فرآیند احتراق، کنترل صوت تولید شده توسط جریان (ایروآکوستیک)، اندرکنش بین جریان و سازه و همچنین کنترل فرآیندهای شکل دهی توسط سیال اشاره کرد، اما معادلات دیفرانسیلی مشتق جزئی¹ غیرخطی حاکم بر دینامیک سیال (معادلات ناویر- استوکس)، بسیار پیچیده هستند و به کار بردن یک الگوریتم کنترلی مناسب برای آن ها بسیار چالش برانگیز است [2، 1].

2- Nonlinear convective term
3- Burgers' equation
4- Shock waves

1- Partial differential equation: PDE

آن جمله می‌توان به مشخصه‌های بهتر پاسخ گذرا، خطای حالت ماندگار کوچک، مقاوم بودن نسبی آن در مقابل نویزهای اندازه‌گیری و همچنین عدم قطعیت‌های پارامتری اشاره کرد. نوآوری این مقاله نسبت به کارهای پیشین را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: الف) ترکیب دو روش تاکاگی - ساجینو و تبدیل فوریه سریع برای کنترل گسترده معادله برگر غیرخطی؛ ب) ارائه روشی ساده برای اثبات پایداری و در نتیجه طراحی کنترل‌کننده پایدار ساز معادلات دیفرانسیل جزئی.

در ادامه، نخست در بخش 2 به بیان مدل ریاضی سیستم مورد بحث پرداخته و سپس در بخش 3 مقدمات لازم برای بیان روش پیشنهادی ارائه خواهد شد. در بخش 4 و 5 روش کنترلی پیشنهادی تشریح و روشی برای بررسی پایداری آن پیشنهاد می‌شود. روش مورد استفاده برای حل عددی معادله مشتق جزئی غیرخطی برگر در بخش 6 تشریح می‌شود. با انجام چند شبیه‌سازی در بخش 7، کارایی روش پیشنهادی نشان داده می‌شود.

2- نمادهای به کار رفته

در ادامه‌ی این نوشتار، R^n و $R^{m \times n}$ به ترتیب بیان‌گر فضای اقلیدسی n بعدی و مجموعه تمامی ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ است. همچنین، نماد $p > 0$ ($p \geq 0$) نشان‌دهنده (نیمه) مثبت معین و متقارن بودن ماتریس p است و برای ماتریس p ، p^T بیان‌گر ترانپوز آن است. I و 0 به ترتیب نشان‌دهنده ماتریس‌های همانی و صفر با اندازه مناسب است.

3- بیان مسأله

در پژوهش پیش‌رو، کنترل معادله برگر لزج غیرخطی، که به صورت رابطه (1) است، در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \quad (1)$$

که در آن تابع $u(x,t)$ سرعت در یک نقطه فضایی x و در زمان t ، نیروی بدنی و خارجی فعال بر سیال و پارامتر لزج v لزجت سینماتیکی است. همچنین عبارت‌های $\partial u/\partial t$ ، $u \partial u/\partial x$ و $v \partial^2 u/\partial x^2$ به ترتیب بیان‌گر شتاب محلی، شتاب جابه‌جایی و عبارت نفوذ است.

این معادله توصیف‌کننده ساده‌ترین مدل معادلات غیرخطی جابه‌جایی نفوذ⁴ است که بسیاری از ویژگی‌های معادلات ناویر-استوکس را در حین سادگی حفظ می‌کند؛ بنابراین معادله برگر مدل مناسبی برای مطالعه خواص ریاضی معادلات ناویر-استوکس و از جمله کنترل آن‌هاست.

4- مقدمات لازم برای ارائه روش پیشنهادی

4-1- رهیافت مدل‌سازی فازی تاکاگی - ساجینو [12-14]

مدل‌های فازی تاکاگی - ساجینو توانایی تشریح بسیار دقیق رفتار هر مدل غیرخطی که درون یک مجموعه محدب قرار گیرد، را دارند (شرط غیرخطی ناحیه‌ای). در این راستا، هر بخش غیرخطی سیستم تحت کنترل، به صورت مجموع وزن داده شده دو بخش خطی که بر تابع غیرخطی محیط هستند، نوشته می‌شود. براین اساس، معادلات سیستم غیرخطی به تعدادی زیرسیستم خطی با درجه عضویت مشخص تفکیک می‌شود؛ به گونه‌ای که تلفیق فازی این زیرسیستم‌ها به بازبازی دقیق مدل غیرخطی سیستم منجر می‌شود؛ بنابراین برتری استفاده از این مدل را می‌توان این گونه بیان کرد که استفاده از منطق فازی، امکان به کار بردن قضیه‌های کنترلی بسط داده شده برای

غیرخطی پیشنهاد شده است. هدف نهایی این تحقیق کنترل گسترده و مرزی جریان آشفته سیال برای اهدافی مانند کاهش درگ و بهبود اختلاط است. از آن جا که جریان آشفته یک دینامیک سه‌بعدی، به شدت غیرخطی و آشوبناک با تعداد درجات آزادی بسیار بالاست، کنترل آن موضوعی بسیار پیچیده است. به همین دلیل ابتدا از یک مدل نسبتاً ساده یک‌بعدی که ویژگی‌های اساسی معادلات ناویر - استوکس را از خود بروز می‌دهد یعنی معادله برگر آغاز کرده و پس از توسعه روش‌های کنترلی مورد نیاز، به مرور بر پیچیدگی‌های مسأله افزوده می‌شود تا به معادلات کامل ناویر - استوکس سه‌بعدی رسید. در ادامه، به‌طور مختصر به بررسی کارهای پیشین در زمینه کنترل معادله برگر پرداخته می‌شود.

اسماوی، از تجزیه متعامد مناسب یا پی-آدی¹ برای محاسبه مدهای بهینه استفاده کرد و سپس با به کارگیری آن در کنار روش گالرکین، به مجموعه کاهش یافته‌ای از معادله‌های دیفرانسیلی معمولی غیرخطی دست یافت؛ همچنین، از خطی‌سازی بازخورد برای پایداری آن‌ها استفاده شد [4].

کانیش و وولکوین از روش پی-آدی برای ایجاد مدل کاهش مرتبه یافته معادله برگر استفاده کرده و سپس از روش بازخورد حالت کنترل برای پایدارسازی بهره بردند [6]. در این راستا، کانیش و ژای با استفاده از روش ژاکوبی - بلمن، کنترل‌کننده‌های بهینه طراحی کردند [7]. هاینز و وولکوین [8] با گسترده‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم و استفاده از روش کنترلی بازخورد حالت بهینه دیجیتال، به پایدارسازی سیستم پرداختند. کینگ و همکاران از تنظیم‌کننده خطی مرتبه دو برای طراحی کنترل‌کننده سیستم رتبه کاسته استفاده کردند [9]. پارک و همکارش با به کارگیری روش‌های پی-آدی، گالرکین و گرادیان مزدوج به پایدارسازی سیستم پرداختند [3]. وولکوین استفاده از کنترل بهینه گسترده که با استفاده از روش بهینه‌سازی لاگرانژی-اس کیو پی² طراحی می‌شود را پیشنهاد کرد [10]. بیکر و همکاران از روش بازخورد حالت مبتنی بر ریتگر بهره بردند [2]. گورنر و همکاران از کنترل پیش‌بینی که به وسیله روش خطی مرتبه دوم گوسی³ طراحی شد، استفاده کردند [11].

در این مقاله، روشی برای کنترل گسترده میدان سرعت در معادله برگر پیشنهاد شده است. در این روش، ابتدا معادله مشتق جزئی غیرخطی حاکم بر سیستم با استفاده از روش خطی‌سازی تاکاگی - ساجینو به دو معادله مشتق جزئی خطی تبدیل شده، در حالی که ترکیب فازی آن‌ها به صورت دقیق معادله اصلی را بازبازی می‌کند. این فرآیند به منظور پیشگیری از پدیده اندرکنش موده‌های فوریه صورت پذیرفته است. زیرا وقتی آنالیز فوریه برای سیستم‌های غیرخطی به کار رود، به دلیل اندرکنش مودها، در معادله مشتق معمولی مربوط به ضریب هر مود، ضرایب موده‌های دیگر هم ظاهر می‌شوند. در نتیجه آنالیز فوریه ابزار مفیدی برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی نیست. روش خطی‌سازی فازی تاکاگی - ساجینو با خطی کردن معادلات از این مشکل جلوگیری می‌کند. سپس هر کدام از معادلات خطی شده با به کار بردن تبدیل فوریه سریع به مجموعه‌ای از معادلات مشتق معمولی تبدیل می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که ترکیب دو روش تاکاگی - ساجینو و تبدیل فوریه سریع، به دو معادله مشتق معمولی برای هر نقطه شبکه‌ای منجر می‌شود. سپس برای پایدارسازی دینامیک هر کدام از این نقاط، از روش جبران‌سازی توزیع‌یافته موازی استفاده می‌شود. پایداری روش کنترلی پیشنهادی با استفاده از قضیه دوم لیاپانوف برای سیستم‌های فازی اثبات شده و بر آن اساس بهره‌های کنترلی پایدار ساز طراحی شده است. شبیه‌سازی‌های عددی کارایی روش پیشنهادی نسبت به پژوهش‌های همانند را نشان می‌دهد، که از

1- Proper orthogonal decomposition: POD

2- Lagrangian-SQP

3- Linear quadratic Gaussian

4- Advection-diffusion

متناظر با هر زیرسیستم، برای طراحی کنترل کننده بازخورد حالت برآیند (کلی) سیستم غیرخطی استفاده می شود. ساختار کلی این کنترل کننده را می توان این گونه نوشت:

قانون i^{th} : اگر $Z_1(t)$ برابر با M_{i1} ، $Z_2(t)$ برابر با M_{i2} ، ... و $Z_p(t)$ برابر با M_{ip} باشد، آن گاه کنترل کننده به صورت رابطه (9) خواهد بود.

$$u = - \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z) K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i} = - \sum_{i=1}^r h_i K_i x(t) \quad (9)$$

توجه به این نکته ضروری است که مدل فازی تاکاگی - ساجینو و کنترل کننده موازی توزیع یافته موازی دارای شمار مساوی قوانین فازی هستند و همچنین از توابع عضویت یکسان استفاده می کنند.

2-4- تبدیل فوریه سریع

با توجه به پیچیدگی و غیرخطی بودن معادله (1) و غیرممکن بودن محاسبه پاسخ تحلیلی آن در حالت کلی، استفاده از روش های تقریبی عددی منطقی به نظر می رسد، که یکی از آن ها روش تبدیل فوریه سریع یا اف تی² است. همان گونه که در ادامه تشریح می شود، دلیل این گزینش، دقت، سرعت، سادگی و هزینه محاسباتی به نسبت پایین این روش نسبت به روش های مشابه است. با استفاده از روش اف تی می توان معادلات دیفرانسیلی مشتق جزئی با شرط مرزی پررودیک را به شمار محدودی معادله دیفرانسیلی معمولی تبدیل کرد [15]. اف تی که یکی از روش های طیفی است، از دقت بسیار بالایی برخوردار است و همچنین حجم محاسبات لازم را به صورت چشم گیری کاهش می دهد. اگر N تعداد نقاط گرهی یا تعداد مودهای فوریه باشد، این روش نسبت به روش تبدیل گسسته مستقیم فوریه حجم محاسبات را از $4N^2$ به $N \log_2 N$ کاهش می دهد که این مسأله خود سبب سرعت بخشیدن به محاسبه پاسخ در کدهای محاسباتی می شود.

فرم کلی تبدیل فوریه سریع تابع $f(x, t)$ در جهت پررودیک X به صورت رابطه (10) است.

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^N \hat{f}_k(t) e^{ikx} \quad (10)$$

که در آن k عدد موج، $i^2 = -1$ و $\hat{f}_k(t)$ نیز ضرایب فوریه برای اعداد موج مختلف بوده که فقط تابع زمان است. به این ترتیب، به کمک این تبدیل تابعیت پاسخ از مختصات فضایی به صورت توابع هارمونیک e^{ikx} در نظر گرفته می شود و تنها تابعیت زمانی ضرایب توابع هارمونیک $\hat{f}_k(t)$ مجهول است. یعنی معادلات را به فضای زمانی برده و تبدیل به معادلات مشتق معمولی کرده که در این تحقیق مطلوب است.

مشابه با هر روش عددی دیگر، استفاده از تکنیک اف تی با مشکلاتی همراه است که یکی از آن ها پیدایش خطای آلیاسینگ³ است؛ این خطا در مواقعی که عبارت غیرخطی در معادله وجود دارد، به دلیل اندرکنش مودهای فوریه با اعداد موج مختلف که ناشی از عمل ضرب در عبارت غیرخطی است به وجود می آید. برای نمونه، چنان چه عبارت غیرخطی معادله برگر بر یک مود فوریه با عدد موج k یعنی e^{ikx} عمل کند، می توان نوشت $u \partial u / \partial x = e^{ikx} i k e^{ikx} = i k e^{2ikx}$. یعنی از عدد موج k عدد موج $2k$ ساخته می شود. فرض کنید که تعداد کل نقاط گرهی 128 و k نیز برابر با 100 باشد. در این صورت از عبارت غیرخطی

سیستم های خطی را در سیستم های غیرخطی فراهم می سازد. فرض کنید که مدل دینامیکی یک دستگاه چند- ورودی و چند- خروجی، غیرخطی و نامتغیر با زمان به صورت رابطه (2) است:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (2)$$

که در آن $x(t) \in R^n$ و $u(t) \in R^m$ به ترتیب بیان گر بردار حالت و ورودی است. اگر عبارت های غیرخطی موجود در معادله (2)، یعنی درایه های بردار $f(x, u)$ شرط غیرخطی ناحیه ای را ارضا کند، قانون فازی متناظر با زیرسیستم i^{th} را برای $i = 1, 2, \dots, r$ می توان این گونه نوشت:

قانون i^{th} : اگر $Z_1(t)$ برابر با M_{i1} ، $Z_2(t)$ برابر با M_{i2} ، ... و $Z_p(t)$ برابر با M_{ip} باشد، آن گاه در رابطه (3) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (3)$$

که در آن M_{ij} به ازای $j = 1, 2, \dots, p$ مشخص کننده مجموعه های فازی، p تعداد متغیرهای تصمیم (یا عبارت های غیرخطی در نظر گرفته شده)، $r = 2^p$ تعداد قانون های مدل (یا تعداد زیرسیستم های فازی) $A_i \in R^{n \times n}$ و $B_i \in R^{n \times m}$ است. همچنین $Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_p(t)$ معرف متغیرهای تصمیم تابع ورودی، اغتشاش خارجی و یا متغیرهای حالت است که از معادله (2) قابل محاسبه است. از این پس، $z(t) = [Z_1(t) \ Z_2(t) \ \dots \ Z_p(t)]$ معرف بردار متغیرهای تصمیم است که برای سادگی نوشتار، در ادامه نماد زمان آن حذف می شود. همچنین $M_{ij}(Z_j)$ بیانگر درجه عضویت Z_j در مجموعه فازی M_{ij} است و هر سیستم خطی که با $A_i x(t) + B_i u(t)$ نشان داده می شود یک زیرسیستم نامیده می شود. براین اساس و با تلفیق فازی زیرسیستم های خطی، خروجی نهایی سیستم فازی به صورت روابط (4) و (5) بیان می شود.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z)} = \sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (4)$$

$$y(t) = C_i x(t) \quad (5)$$

که در آن روابط (6) و (7) را به صورت زیر داریم.

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (6)$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)) \quad (7)$$

همچنین برای هر زمان t و $i = 1, 2, \dots, r$ می توان رابطه (8) را اثبات کرد.

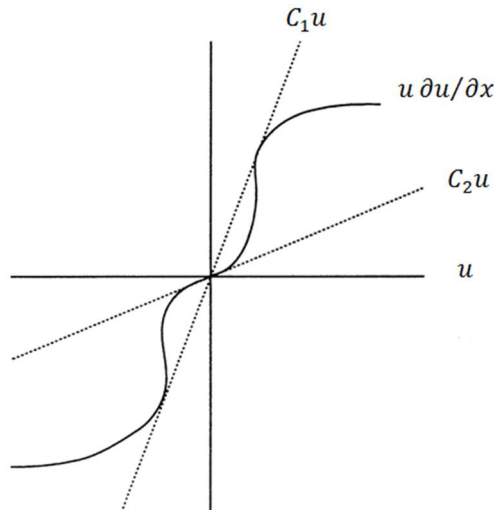
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(z) = 1 \\ h_i(z) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^r w_i(z) > 0 \\ w_i(z) \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

اکنون با استفاده از مدل فازی تاکاگی - ساجینو می توان با ترکیبی از ضرایب بهره، یک کنترل کننده دینامیکی پایدارساز سیستم غیرخطی ساخت. چنین روش طراحی سیستم کنترلی، جبران سازی توزیع یافته موازی¹ نام گذاری شده که در آن از تلفیق بهره های بازخورد حالت پایدارساز $K_i, i = 1, 2, \dots, r$

2- Fast Fourier transform: FFT

3- Aliasing error

1- Parallel distributed compensation: PDC



شکل 1 نمایش شرط غیرخطی ناحیه‌ای برای عبارت $u \partial u / \partial x$

با جای گذاری رابطه (14) در (13) می‌توان رابطه (18) را نوشت.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) \sum_{j=1}^2 C_j M_j + v \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \quad (18)$$

با توجه به این که فقط عبارت نخست سمت راست معادله (18) به اندیس j وابسته است، آن را می‌توان به صورت رابطه (19) بازنویسی کرد:

$$\sum_{j=1}^2 M_j \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + C_j u(x,t) \right] = -v \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \quad (19)$$

معادله (19) که معرف تلفیق فازی دو معادله مشتق جزئی خطی است، به صورت دقیق معادله مشتقی جزئی غیرخطی رابطه (11) را بازیابی می‌کند. در حقیقت، معادله برگر به صورت دو زیرسیستم فازی رابطه (20 و 21) قابل بیان است.

قانون نخست: اگر Z_1 بزرگ باشد، آن‌گاه رابطه (20) را به صورت زیر داریم.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -C_1 u(x,t) + v \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \quad (20)$$

قانون دوم: اگر Z_1 کوچک باشد، آن‌گاه رابطه (21) را به صورت زیر داریم.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -C_2 u(x,t) + v \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \quad (21)$$

اکنون با استفاده از تبدیل اف اف تی، سیستم پیوسته رابطه (19) به یک سیستم رتبه کاسته با شمار محدودی از معادلات دیفرانسیل معمولی با دقت مناسبی تقریب زده می‌شود. در این راستا، با در نظر گرفتن روابط $u(x,t) = \sum_{k=1}^N e^{ikx} \hat{u}_k(t)$ و $F(x,t) = \sum_{k=1}^N e^{ikx} \hat{f}_k(t)$ می‌توان رابطه (22) را نوشت.

$$\sum_{j=1}^2 M_j \left[\sum_{k=1}^N e^{ikx} \dot{\hat{u}}_k(t) + C_j \sum_{k=1}^N e^{ikx} \hat{u}_k(t) \right] = -v \sum_{k=1}^N k^2 e^{ikx} \hat{u}_k(t) + \sum_{k=1}^N e^{ikx} \hat{f}_k(t) \quad (22)$$

که به صورت رابطه (23) قابل ساده‌سازی است.

$$\sum_{k=1}^N e^{ikx} \left[\dot{\hat{u}}_k(t) + \sum_{j=1}^2 M_j ((-vk^2 - C_j) \hat{u}_k(t) + \hat{f}_k(t)) \right] \quad (23)$$

پس برای هر نقطه شبکه‌های $k = 1, 2, \dots, N$ ، تلفیق فازی دو زیرسیستم خطی $A_{kj} \hat{u}_k(t) + B_{kj} \hat{f}_k(t)$ معرف دینامیک آن به صورت رابطه (24) است.

$$\dot{\hat{u}}_k(t) = \sum_{j=1}^2 M_j (A_{kj} \hat{u}_k(t) + B_{kj} \hat{f}_k(t)) \quad (24)$$

معادله برگر، عدد موج $2k$ برابر با 200 ساخته می‌شود که نمی‌توان آن را بر شبکه نشان داد زیرا از 128 بزرگ‌تر است. بدین ترتیب خطایی در محاسبه عبارت غیرخطی معادله برگر ایجاد می‌شود که آن را خطای آلیاسینگ می‌نامند.

همچنین استفاده از روش اف اف تی دارای محدودیت‌هایی مانند پریودیک بودن شرایط مرزی و یکنواخت بودن شبکه¹ محاسباتی است. البته روش کنترل پیشنهادی در این مقاله محدود به استفاده از روش طیفی اف اف تی نبوده و برای دیگر روش‌های گسسته‌سازی عددی مانند روش تفاضل محدود نیز قابل توسعه است که در کارهای آینده به آن پرداخته خواهد شد.

5- روش کنترلی پیشنهادی

همان‌گونه که در بخش 2 بیان شد، معادله برگر از نوع مشتق جزئی است؛ بنابراین برای طراحی کنترل‌کننده کمینه مرتبه مناسب، ابتدا باید معادلات دیفرانسیل زمانی معمولی سیستم رتبه کاسته را به دست آورد. برای دستیابی به این هدف، با توجه به این که شرایط مرزی پریودیک و شبکه‌بندی نیز یکنواخت در نظر گرفته شده، از روش اف اف تی می‌توان بهره برد، اما از آنجایی که معادله (1) غیرخطی است، استفاده از اف اف تی با خطای آلیاسینگ همراه است. برای حل این مشکل، راه کار پیشنهادی بر پایه به کارگیری روش تاکاگی - ساجینو برای خطی کردن معادله دیفرانسیل مشتق جزئی برگر و به دست آوردن دو زیرسیستم مشتق جزئی خطی استوار است؛ به گونه‌ای که تلفیق فازی آن‌ها به بازیابی دقیق مدل غیرخطی سیستم منجر می‌شود.

معادله (11) که بازنویسی شده (1) است را در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \quad (11)$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، عبارت نخست سمت راست این معادله غیرخطی است. برای برطرف کردن خطای آلیاسینگ در به کارگیری روش اف اف تی، ابتدا سعی می‌شود با بهره گرفتن از روش تاکاگی - ساجینو این عبارت خطی شود. برای رسیدن به این هدف، بخشی از عبارت غیرخطی مدل به عنوان متغیر تصمیم Z_1 ، به صورت رابطه (12) در نظر گرفته می‌شود.

$$Z_1 = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (12)$$

براین اساس، رابطه (11) را می‌توان به صورت رابطه (13) بازنویسی کرد.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -Z_1 u(x,t) + v \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \quad (13)$$

با توجه به این که سرعت $u(x,t)$ در صورت پایداری سیستم، نسبت به متغیر مکانی x پیوسته است، شرط غیرخطی ناحیه‌ای برای Z_1 برقرار بوده و می‌توان آن را به صورت $Z_1 \in [C_2, C_1]$ بین دو کران بالای C_1 و کران پایین C_2 محدود کرد (شکل 1)؛ با توجه به اینکه با ترکیب این دو مقدار در هر لحظه می‌توان Z_1 را به صورت دقیق، رابطه (14)، ساخت.

$$Z_1 = C_1 M_1 + C_2 M_2 = \sum_{j=1}^2 C_j M_j \quad (14)$$

M_1 و M_2 بیانگر وزن‌های فازی ترکیب است و فرض می‌شود که به صورت رابطه (15) به هم مربوط باشند.

$$M_1(Z_1(t)) + M_2(Z_1(t)) = 1 \quad (15)$$

براین اساس، این وزن‌ها به صورت روابط (16، 17) محاسبه می‌شود.

$$M_1(Z_1(t)) = \frac{Z_1(t) - C_2}{C_1 - C_2} \quad (16)$$

$$M_2(Z_1(t)) = 1 - M_1(Z_1(t)) \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 & -X_k A_{kr}^T - A_{kr} X_k - X_k A_{kj}^T - A_{kj} X_k + M_{kr}^T B_{kr}^T \\
 & + B_{kr} M_{kr} + M_{kj}^T B_{kj}^T + B_{kj} M_{kj} - 4\alpha X_k \geq 0, \\
 & r < j \text{ such that } h_r \cap h_j \neq \varphi
 \end{aligned} \quad (31)$$

در این صورت، بهره‌های کنترل کننده بازخورد حالت فازی برابر با رابطه (32) خواهد بود.

$$K_{kr} = M_{kr} (X_k)^{-1} \quad (32)$$

اثبات. از آنجا که در این جا هدف بررسی پایداری داخلی است، ورودی مرجع $Y_k^{ref}(t)$ برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. برای این منظور، با فرض مثبت معینی ماتریس متقارن P_k ، کاندید لیاپونوف رابطه (33) را در نظر گرفت.

$$V_k(t) = \hat{U}_k^T(t) P_k \hat{U}_k(t) \quad (33)$$

پایداری نمایی کلی رابطه (26) تضمین می‌شود در صورتی که برای هر $\hat{U}_k(t) \neq 0$ و $\alpha > 0$ ، رابطه (34) داشته باشیم [13]:

$$\dot{V}_k(t) = \hat{U}_k^T(t) P_k \dot{\hat{U}}_k(t) + \hat{U}_k^T(t) P_k \dot{\hat{U}}_k(t) < -2\alpha V_k(t) \quad (34)$$

با جای گذاری از معادله (26) در رابطه (34)، رابطه (35) را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= \sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^2 M_r M_j \hat{U}_k^T(t) [(A_{kr} - B_{kr} K_{kj})^T P_k \\
 &+ P_k (A_{kr} - B_{kr} K_{kj})] \hat{U}_k(t) \\
 &= \sum_{r=1}^2 M_r^T \hat{U}_k^T(t) [G_{rr}^T P_k + P_k G_{rr}] \hat{U}_k(t) \\
 &+ \sum_{r=1}^2 \sum_{r < j} 2 M_r M_j \hat{U}_k^T(t) \left[\frac{G_{rj} + G_{jr}}{2} \right]^T P_k \\
 &+ P_k \left(\frac{G_{rj} + G_{jr}}{2} \right) \hat{U}_k(t) < -2\alpha \hat{U}_k^T(t) P_k \hat{U}_k(t)
 \end{aligned} \quad (35)$$

درحالی که $G_{rj} = A_{kr} - B_{kr} K_{kj}$ است. نامساوی (35) برقرار است در صورتی که دو نامساوی روابط (36) و (37) برقرار باشد.

$$(A_{kr} - B_{kr} K_{kr})^T P_k + P_k (A_{kr} - B_{kr} K_{kr}) + 2\alpha P_k < 0 \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
 & (A_{kr} - B_{kr} K_{kj} + A_{kj} - B_{kj} K_{kr})^T P_k \\
 & + P_k (A_{kr} - B_{kr} K_{kj} + A_{kj} - B_{kj} K_{kr}) + 4\alpha P_k \leq 0
 \end{aligned} \quad (37)$$

با ضرب از چپ راست طرفین نامساوی‌های روابط (36) و (37) در $X_k = P_k^{-1}$ و سپس در -1 ، همچنین فرض $K_{kr} = M_{kr} X_k^{-1}$ می‌توان به روابط (30) و (31) رسید.

7- روش پیشنهادی برای محاسبه پاسخ معادله برگر

برای شبیه‌سازی معادله برگر، از تبدیل فوری سریع برای تقریب مشتق‌های فضایی استفاده می‌شود. در این روش، عبارت لاج و نیروی حجمی به راحتی قابل تقریب هستند، اما عبارت غیرخطی جابه‌جایی مشکل ایجاد می‌کند. به همین دلیل عبارت جابه‌جایی به جای فضای فوری در فضای فیزیکی محاسبه شده است. در هر گام انتگرال‌گیری زمانی، از طریق تبدیل فوری سریع معکوس (IFFT) می‌توان u را از \hat{U}_k ، $\partial u / \partial x$ را از $ik \hat{U}_k$ به دست آورد. سپس ضرب را در فضای فیزیکی انجام داده و $v = u \partial u / \partial x$ را محاسبه کرد. آن‌گاه از v تبدیل فوری سریع گرفت و \hat{V}_k را به دست آورد. \hat{V}_k به دست آمده را در سمت راست معادله برگر قرار داد. به همین دلیل محاسبه عبارت غیرخطی از نظر محاسباتی گران‌تر از محاسبه عبارت خطی است، زیرا در هر گام زمانی نیازمند تبدیل فوری مستقیم و معکوس است. در حالی که عبارت خطی به‌طور مستقیم به صورت رابطه (38) محاسبه می‌شود.

که در آن $A_{kj} = -v k^2 - C_j$ و $B_{kj} = 1$ است. برای پایداری رابطه (24)، از کنترل کننده توزیع یافته موازی (25) استفاده می‌شود. به این ترتیب، می‌توان معادله سیستم حلقه بسته را در هر نقطه شبکه‌ای به صورت روابط (25) و (26) نوشت.

$$\hat{f}_k = -\sum_{r=1}^2 M_r K_{kr} \hat{U}_k(t) \quad (25)$$

$$\dot{\hat{U}}_k(t) = \sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^2 M_r M_j (A_{kj} - B_{kj} K_{kr}) \hat{U}_k(t) \quad (26)$$

در این رابطه K_{kr} معرف بهره کنترلی متناظر با r^{th} زیرسیستم نقطه شبکه‌ای k^{th} است.

برای ردگیری یک ورودی مرجع، اضافه کردن یک عبارت پیش‌خوراند به ورودی پایداری سیستم پیشنهاد می‌شود. برای این منظور، با مشخص بودن ورودی مرجع $U_{ref}(X, t)$ در فضای مکانی مورد بررسی و گرفتن اف اف تی از آن، می‌توان ضرایب فوریه مطلوب $U_k^{ref}(t)$ متناظر با آن را در اعداد موج مختلف به دست آورد؛ بنابراین سیستم (24) در شرایط تعادلی مطلوب قرار می‌گیرد در صورتی که رابطه (27) ارضا شود.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ U_k^{ref}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_k^*(t) \\ \hat{f}_k^*(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

پس مقادیر سرعت و ورودی نامی برای این سیستم فازی به صورت رابطه (28) محاسبه می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_k^*(t) \\ \hat{f}_k^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ U_k^{ref}(t) \end{bmatrix} \quad (28)$$

که در این رابطه $A_k = \sum_{j=1}^2 M_j A_{kj}$ و $B_k = \sum_{j=1}^2 M_j B_{kj}$ است. از سوی دیگر، در حالی که اثبات شده است مدل‌های فازی تاکاگی - ساجینو به صورت بسیار دقیق هر تابع غیرخطی که در شرط غیرخطی ناحیه‌ای صدق می‌کند را تشریح می‌نماید، پس نقطه کار معادله غیرخطی برگر و مدل فازی تاکاگی - ساجینو آن یکسان است؛ بنابراین ورودی کنترلی به صورت (29) اصلاح می‌شود.

$$\hat{f}_k(t) = -\sum_{r=1}^2 M_r K_{kr} (\hat{U}_k(t) - \hat{U}_k^*(t)) + \hat{f}_k^*(t) \quad (29)$$

ملاحظه 1. با توجه به این که ورودی کنترلی $\hat{f}_k(t)$ در فضای فوریه بیان شده است، با استفاده از تبدیل معکوس (10) به فضای فیزیکی منتقل می‌شود.

6- اثبات پایداری روش کنترلی پیشنهادی

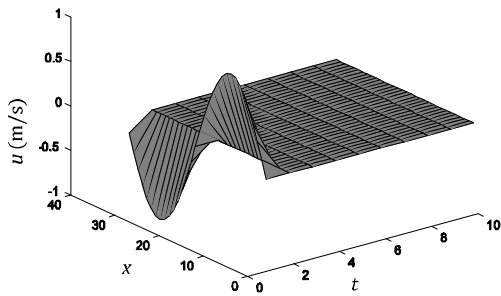
از آنجایی که روش تاکاگی-ساجینو به صورت دقیق سیستم غیرخطی را به ترکیبی از زیرسیستم‌های خطی تبدیل کرده و همچنین تبدیل فوری سریع با دقت بالا نسبت به روش‌های دیگر به حل معادله دیفرانسیل جزئی می‌پردازد، طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های (1) و (24) معادل است. در ادامه با استفاده از معیار پایداری لیاپونوف برای سیستم‌های فازی و حل مجموعه‌ای از نامعادله‌های ماتریسی خطی، بهره‌های کنترلی محلی K_{kr} طراحی می‌شود.

قضیه 1. سیستم حلقه بسته (26) با نرخ کاهش α پایدار نمایی کلی است، اگر ماتریس‌های $X_k > 0$ و ماتریس‌های M_{kr} به‌ازای $j = r = \{1, 2\}$ و $k = \{1, 2, \dots, N\}$ وجود داشته باشد، به صورت روابط (30) و (31) است.

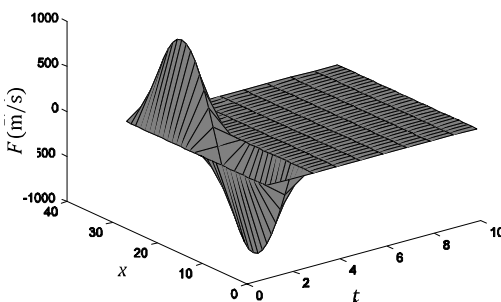
$$-X_k A_{kr}^T - A_{kr} X_k + M_{kr}^T B_{kr}^T + B_{kr} M_{kr} - 2\alpha X_k > 0, \quad (30)$$

خاطر نشان می‌شود که در شکل‌های سه‌بعدی، t برحسب گام زمانی و x مشخص‌کننده نقاط گرهی است.

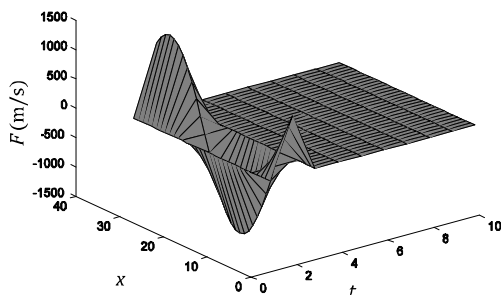
همان‌گونه که در بخش 4 گفته شد، برای رساندن سرعت $u(x,t)$ به یک مقدار ثابت مطلوب یا ردگیری یک تابع متغیر با زمان، با اضافه کردن یک عبارت پس‌خوراند به رابطه (25)، ورودی کنترلی به صورت رابطه (29) اصلاح می‌شود. برای نشان دادن کارایی ردگیری یا تنظیم روش پیشنهادی، در شبیه‌سازی دوم هدف رساندن نمایه سرعت از یک تابع سینوسی به یک تابع کسینوسی است. برای این کار، ورودی کنترلی شکل 5 اعمال می‌شود. همچنین همان‌گونه که در شکل 6 دیده می‌شود، شرط $-2.5 < \partial u / \partial x = C_j < 2.5$ برای این سیستم برقرار است. شکل 7 نشان می‌دهد که پس از چهار گام زمانی سرعت به نمایه مطلوب می‌رسد.



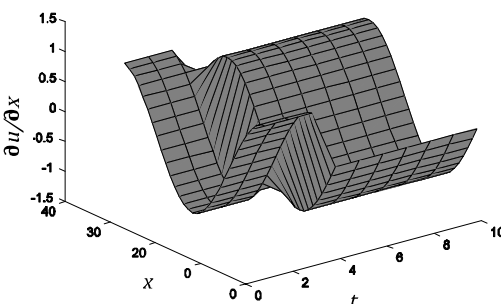
شکل 3 پاسخ سیستم حلقه بسته به شرایط اولیه غیر صفر سینوسی



شکل 4 ورودی ردگیری اعمال شده برای ایجاد نمایه پایدار شکل 3



شکل 5 ورودی ردگیری اعمال شده در شبیه‌سازی حلقه بسته دوم



شکل 6 نمایش $\partial u / \partial x$ در تغییر نمایه سرعت از سینوسی به کسینوسی

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\hat{u}_k}{dt} e^{ikx} = \sum_{k=1}^n \hat{f}_k e^{ikx} - v \sum_{k=1}^n k^2 \hat{u}_k e^{ikx} - \sum_{k=1}^n \hat{v}_k e^{ikx} \quad (38)$$

که با استفاده از خواص سیگما به صورت رابطه (39) داریم:

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt} = \hat{f}_k - vk^2 \hat{u}_k - \hat{v}_k \quad (39)$$

سمت چپ معادله با یک روش انتگرال‌گیری زمانی در نظر گرفته می‌شود. برای نمونه با روش صریح اولر به صورت رابطه (40) می‌توان نوشت.

$$\frac{\hat{u}_k(t) - \hat{u}_k(t-1)}{dt} = \hat{f}_k - vk^2 \hat{u}_k - \hat{v}_k \quad (40)$$

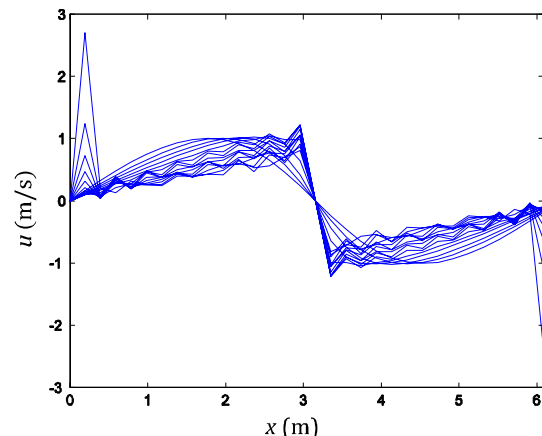
در کار حاضر، از روش صریح رونگه-کوتای مرتبه چهارم برای انتگرال‌گیری زمانی با دقت بالا استفاده شده است. هر گام این روش از چهار زیرگام تشکیل شده که هر کدام از زیرگام‌ها مشابه یک گام صریح اولر رابطه (40) است.

8- شبیه‌سازی عددی

در این بخش، کارایی روش پیشنهادی به کمک شبیه‌سازی عددی و کنترل رفتار دینامیکی معادله برگر بررسی می‌شود. در این‌جا لزجت v برابر با 0.0007 ، گام زمانی برابر با $0/001$ و طول دامنه حل برابر با 2π در نظر گرفته می‌شود. همان‌گونه که در شکل 2 مشاهده می‌شود، سیستم حلقه باز ناپایدار بوده و این مسأله ایجاد موج‌های شوک در میدان سرعت را سبب می‌شود. در ادامه هدف این است که پاسخ معادله برگر از هر پروفایل اولیه سرعت به هر پروفایل مطلوب، در کمترین زمان ممکن تبدیل شود. در این راستا، اسماوی در پژوهش [4] و وولکوین [10]، روش‌هایی ارائه کردند که در آن‌ها، به ترتیب پس از گذشت حدود سی ثانیه و یک ثانیه، نمایه سرعت به حد مطلوب رسید.

اکنون از روش کنترلی پیشنهادی برای طراحی کنترل‌کننده‌های پایدارساز و ردگیری استفاده می‌شود. در این راستا، نرخ کاهش α برابر با 1000 و $-2.5 < C_j < 2.5$ فرض شده و سپس جعبه ابزار ال-ام-آی¹ نرم‌افزار متلب به کار برده می‌شود. برای نمایش کارایی روش پیشنهادی، چند شبیه‌سازی انجام شده که در ادامه به بررسی آن‌ها پرداخته می‌شود.

در شبیه‌سازی نخست، پایدارسازی یا به صفر رساندن یک نمایه سرعت سینوسی با دوره تناوبی 2π مدنظر است. همان‌گونه که در شکل 3 مشاهده می‌شود، با اعمال ورودی کنترلی نشان داده شده در شکل 4 که براساس معادله (25) ایجاد شده، سرعت پس از گذشت چهار گام زمانی به صفر می‌رسد.



شکل 2 پاسخ سیستم حلقه باز به شرایط اولیه غیر صفر سینوسی

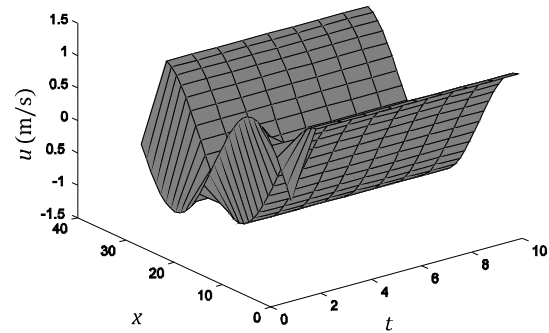
1- Linear matrix inequality: LMI

9- نتیجه گیری

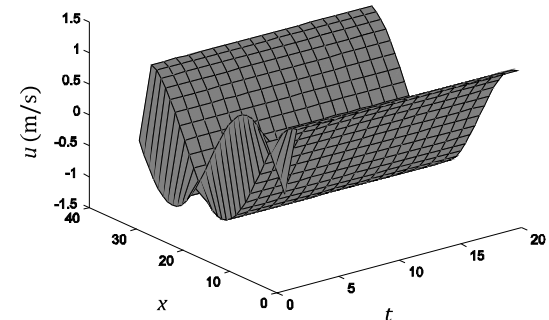
در این مقاله، روشی برای کنترل گسترده نمایه سرعت در معادله برگر غیرخطی لزج و رساندن آن با هر شرایط اولیه‌ای به شرایط نهایی دلخواه پیشنهاد شده است. این روش، بر مبنای ترکیب روش‌های فازی تاکاگی-ساجینو و تبدیل فوریه سریع استوار است، که به دو معادله مشتق معمولی برای هر نقطه شبکه‌ای منجر می‌شود. سپس برای پایداری دینامیک هر کدام از این نقاط، از روش جبران‌سازی توزیع‌یافته موازی استفاده می‌شود. پایداری روش کنترلی پیشنهادی با استفاده از قضیه دوم لیاپانوف برای سیستم‌های فازی اثبات شده و بر آن اساس بهره‌های کنترلی پایداری طراحی شده‌اند. شبیه‌سازی‌های عددی کارایی روش پیشنهادی نسبت به پژوهش‌های همانند را نشان می‌دهد، که از آن جمله می‌توان به مشخصه‌های بهتر پاسخ گذرا، خطای حالت ماندگار کوچک و مقاوم بودن نسبی آن در مقابل نویزهای اندازه‌گیری اشاره کرد.

10- مراجع

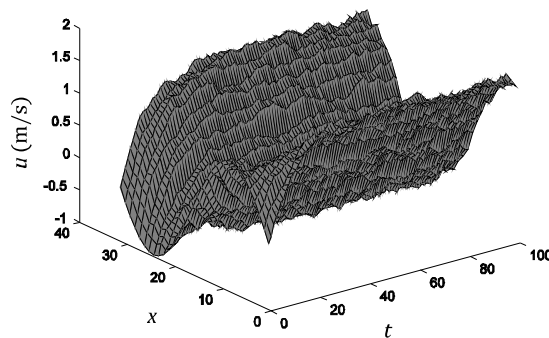
- [1] H. Emdad, A. R. Mostofizadeh, S. A. Mousavinia, Optimal control of vortex shedding around square cylinder via reduced order model, *Madares Mechanical Engineering*, pp. 53-55, 1391. (In Persian)
- [2] J. Baker, A. Armaou, P. D. Christofides, Nonlinear control of incompressible fluid flow: application to Burgers equation and 2d channel flow, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 252, pp. 230-255, 2000.
- [3] H. M. Park, Y. D. Jang, Control of Burgers equation by means of mode reduction, *International Journal of Engineering Science*, vol. 38, pp. 275-805, 2003.
- [4] N. Smaoui, Boundry and distributed control of the viscous Burger equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 182, pp. 91-104, 2005.
- [5] S. M. Hashemi, H. Werner, Gain-scheduled controller synthesis for a nonlinear PDE, *International Journal of Control*, vol. 85, pp. 88-97, 2012.
- [6] K. Kunisch, S. Volkwein, Control of the Burgers equation by a reduced-order approach using proper orthogonal decomposition, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 102, pp. 345-371, 1999.
- [7] K. Kunisch, L. Xie, POD-based feedback control of the Burgers equation by solving the evolutionary HJB equation, *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 49, pp. 1113-1126, 2005.
- [8] M. Hinze, S. Volkwein, Analysis of instantaneous control for the Burgers equation, *Nonlinear Analysis*, vol. 50, pp. 1-26, 2002.
- [9] B. B. King, D. A. Kreuger, Burgers' equation: Galerkin least-squares approximations and feedback control, *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 38, pp. 1075-1085, 2003.
- [10] S. Volkwein, Distributed control problems for the Burgers equation, *Computational Optimization and Applications*, vol. 18, pp. 115-140, 2001.
- [11] S. Gorner, P. Benner, MPC for the Burgers equation based on an LQG design, *Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 6, pp. 781-782, 2006.
- [12] T. Takagi, M. Sugeno, Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 15, pp. 116-132, 1985.
- [13] K. Tanaka, H. Wang, *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*, Wiley, 2001.
- [14] M. Seidi, A. H. Markazi, Performance-oriented parallel distributed compensation, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 348, no. 7, pp. 1231-1244, 2011.
- [15] P. Moin, *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 2010.



شکل 7 نمایش چگونگی تغییر نمایه سرعت از سینوسی به کسینوسی



شکل 8 نمایش چگونگی تغییر نمایه سرعت از سینوسی به کسینوسی در حالت نامعینی مقدار دقیق لزجت



شکل 9 نمایش چگونگی تغییر نمایه سرعت از سینوسی به کسینوسی در حالت وجود نویز اندازه‌گیری

در شبیه‌سازی بعد، مقاوم بودن کنترل‌کننده در برابر عدم قطعیت‌های مدل‌سازی بررسی می‌شود. برای این منظور فرض می‌شود کنترل‌کننده طراحی شده در این بخش به معادله برگر با $0 \leq v \leq 1$ اعمال شود. همان‌گونه که در شکل 8 نشان داده شده است، روش پیشنهادی در مقابل این عدم قطعیت نیز جواب خوبی دارد.

در شبیه‌سازی آخر، برای نشان دادن مقاوم بودن نسبی روش پیشنهادی در مقابل نویز حساسه‌ها، فرض می‌شود که نویزی با دامنه $0/1$ در اندازه‌گیری سرعت هر نقطه شبکه‌ای وجود داشته باشد. همان‌گونه که در شکل 9 آشکار است، روش پیشنهادی با وجود این نویز نیز تا حدی قادر به رساندن نمایه سرعت به حد مطلوب است.