

بررسی تحلیلی انتقال حرارت غیردایمی اورتوتروپیک پین‌های کامپوزیتی

محمدحسن کیهانی^{۱*}، محمود نوروزی^۲، امین امیری دلویی^۳

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

۳- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی ۳۱۶، کد پستی ۳۶۱۹۹۵۱۶۱، h_kayhani@shahroodut.ac.ir

چکیده- در این مقاله، یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت غیردایمی در پین‌های کامپوزیتی چندلایه با در نظر گرفتن شرایط مرزی کلی در سطح پره ارائه شده است. معادله انتقال حرارت هدایتی دوبعدی در حالت ناپایا برای لمینیت‌های اورتوتروپیک استخراج شده و مسئله با اعمال تبدیل لاپلاس از حوزه زمان به فرکانس انتقال یافته است. با استفاده از تئوری اشتراک لیوویل یک تبدیل فوریه مناسب استخراج شده و دستگاه معادلاتی بر اساس شرایط مرزی پره و شرایط پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه‌ها ساخته شده است. همچنین از روش توابع مرموفیک برای محاسبه انتگرال مختلط پیچیده مربوط به تبدیل لاپلاس معکوس بهره برده شده است. نمودارهای مربوط به توزیع دمای غیردایم و تغییرات نرخ سرد شدن پره رسم شده و نشان داده شده که اثر هدایت اورتوتروپیک، در نرخ‌های سرد شدن بالا، محسوس‌تر است.

کلیدواژگان: حل تحلیلی، هدایت اورتوتروپیک، تئوری اشتراک لیوویل، توابع مرموفیک

Analytical investigation of orthotropic unsteady heat transfer in composite pin fins

M. H. Kayhani^{1*}, M. Norouzi², A. A. Delouei³

1- Associate Prof. of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran

2- Assistant Prof. of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran

3- PhD Student of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Technology, Shahrood, Iran

*P. O. B. 316, P. Code: 3619995161, Shahrood, Iran, h_kayhani@shahroodut.ac.ir

Abstract- In this paper, an analytical solution of transient heat conduction in multi-layer composite pin fins under the general boundary conditions is presented. The 2D unsteady heat conduction equation in cylindrical coordinate system has been achieved for multi-layer orthotropic laminates. Laplace transformation is applied to change the solution's domain from time into the frequency. An appropriate Fourier transformation has been derived using the Strum-Liouville theorem and a set of equations are obtained based on the boundary conditions of fin and temperature/heat flux continuity at boundaries located between the layers. The Meromorphic function method is utilized to find the complicated complex integration of inverse Laplace. Diagrams of unsteady temperature distribution and cooling rate of pin fin have been depicted and it is shown that the effects of orthotropic conduction are more noticeable in high convection coefficients.

Keywords: Analytical Solution, Strum-Liouville Theorem, Orthotropic Conduction, Meromorphic Functions

۱- مقدمه

پیشرفت‌های اخیر در زمینه طراحی و تولید سازه‌های کامپوزیتی آن‌ها را در زمره یکی از تاثیرگذارترین مواد در حوزه‌های مختلف صنعت، حمل‌ونقل، خطوط انتقال مایعات و ... قرار داده است. این پیشرفت‌ها عمدتاً ناشی از خواص منحصر به فرد این مواد مانند نسبت استحکام به وزن بالا، مقاومت به خوردگی، قابلیت شکل‌پذیری، هزینه‌های تولید پایین و ... است. بدیهی است که با افزایش روزافزون کاربرد این مواد دانش مرتبط با آن‌ها نیز گسترش یافته است.

مطالعات پیشین در زمینه انتقال حرارت مواد کامپوزیتی عمدتاً به بررسی‌های عددی محدود شده است. کرلی و ادوانی [۱] دمای یک صفحه کامپوزیتی نازک که در معرض یک منبع گرمایی متمرکز قرار دارد را با روش‌های عددی و تجربی به دست آورده‌اند. آن‌ها یک بررسی پارامتریک برای تعیین اعداد بی‌بعد مهم و تاثیرشان بر توزیع درجه حرارت صفحه ارائه داده‌اند. اینگار [۲] انتقال حرارت غیردایمی هدایتی را در یک ورق کامپوزیتی مورد بررسی قرار داده و از فرمولاسیون المان محدود برای تحلیل این مسئله استفاده کرده است. این تحلیل بر روی لمینیت گرافیت/اپوکسی با آرایش الیاف $[90^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ]$ و در شرایط مرزی مختلف انجام شده است. سونائو و همکاران [۳] حل عددی را برای انتقال حرارت پایدار هدایتی در ورق‌های کامپوزیتی ارائه کرده‌اند. آن‌ها اثرات انتقال حرارت بر روی لایه داخلی را که ناشی از القا خاصیت ترموپلاستیک ماده است مورد بررسی قرار دادند.

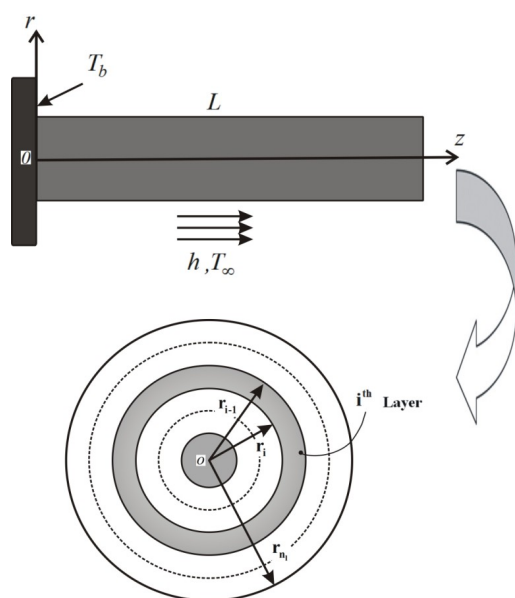
گو [۴] به طور عددی انتقال حرارت هدایتی در لمینیت‌های ضخیم را مطالعه کرده و با استفاده از روش المان محدود، انتقال حرارت غیردایمی را در حضور تولید انرژی داخلی بررسی کرده است. چترجی و همکاران [۵] با استفاده از فرمولاسیون مرز محدود اقدام به محاسبه انتقال حرارت پایدار در کامپوزیت‌های سه‌بعدی کرده‌اند. آن‌ها، با استفاده از توابع خطی و درجه چهار، توزیع دما و شار حرارتی را در این لمینیت‌ها به دست آوردند. یوونت و همکاران [۶] نیز فرمولاسیون مناسبی را بر مبنای روش المان محدود برای حل عددی انتقال حرارت موثر در کامپوزیت‌ها ارائه داده‌اند.

فعالیت‌هایی نیز در زمینه حل تحلیلی انتقال حرارت در مواد کامپوزیتی صورت گرفته است. آرگیریس و همکاران [۷]

بررسی تحلیلی را بر روی انتقال حرارت در لمینیت‌های تخت مثلثی انجام داده‌اند. آن‌ها در فرمولاسیون خود اثر هر سه مکانیزم انتقال حرارت هدایتی، همرفتی و تشعشعی را بر لمینیت در نظر گرفتند. فرمولاسیون آن‌ها بر مبنای انتقال حرارت مرتبه اول لمینیت کامپوزیتی بود و تغییرات خطی را برای انتقال حرارت در جهت ضخامت لایه‌ها لحاظ کردند و در نهایت نشان دادند که استفاده از این فرمولاسیون از نظر هزینه محاسباتی بسیار موثرتر از محاسبات عددی است. ما و همکاران [۸-۹] حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در محیط‌های چندلایه غیرایزوتروپیک را در دو حالت، بدون در نظر گرفتن منبع گرمایی و همراه با گرمایش داخلی، به طور جداگانه مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها با استفاده از یک تبدیل مختصات خطی مسئله انیزوتروپ را به شکل ساده ایزوتروپ تبدیل کرده و مسئله را حل کرده‌اند.

اوسلوکا [۱۰] نیز، با استفاده از توابع گرین و فرمول‌بندی انتگرالی معادله انتقال حرارت، پاسخی برای انتقال حرارت در واسط‌های کامپوزیتی به دست آورده است. سان و ویچمن [۱۱] در مقاله خود حلی تحلیلی از انتقال حرارت یک بعدی غیردایم در یک بلوک کامپوزیتی ارائه کرده‌اند. لو و همکاران [۱۲] انتقال حرارت در جدارهای مرکب استوانه‌ای شکل را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها در تحلیل خود از روش جداسازی متغیرها استفاده کرده و نشان داده‌اند که حل آن‌ها دارای تطابق مناسبی با محاسبات عددی است. حاجی شیخ و همکاران [۱۳] یک فرمولاسیون ریاضی برای میدان دما در حالت پایدار در اجسام چندلایه و چندبعدی به دست آورده‌اند و در ادامه اثبات کرده‌اند که مقادیر ویژه برای حالتی که لایه‌ها همگن باشد حقیقی است، در حالی که برای حالت اورتوتروپ این مقادیر می‌توانند موهومی باشند. سینگ و همکاران [۱۴] حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در مختصات قطبی چندلایه در جهت شعاعی را مورد بررسی قرار داده‌اند. بهادر و بارکهن [۱۵] یک حل تحلیلی برای توزیع دما و نرخ انتقال حرارت در پین‌فین‌های استوانه‌ای (تکلایه) با ضرایب هدایت گرمایی اورتوتروپ ارائه داده و سپس نتایج را با حل عددی به روش اجزا محدود مقایسه کرده‌اند. اونیکجکوه [۱۶] یک حل دقیق برای انتقال حرارت در محیط‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری انتگرال مرزی ارائه داده است. کیهانی و همکاران [۱۷-۱۸] حل تحلیلی هدایت پایا

صورت روابط بازگشتی ارائه شده است. در نهایت تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس معکوس اعمال شده است تا توزیع دما در حوزه زمان به دست آید. مهم ترین مشکل در روند کار حل انتگرال مختلط پیچیده مربوط به تبدیل لاپلاس معکوس است که در اینجا از روشی موسوم به روش توابع مرمرفیک^۵ جهت حل آن بهره جستیم. از نتایج حاصل برای رسم نمودارهای مرتبط با دمای متوسط لمینیت و کانتورهای توزیع دما در زمان های مختلف استفاده شده است. همچنین، نمودارهای مربوط به تغییرات نرخ سرد شدن پین فین با ضرایب هدایت و ابعاد پره رسم و با کارهای دیگران مقایسه شده است.



شکل ۱ هندسه و شرایط مرزی مربوط به پره

۲- هدایت در مواد مرکب

در این بخش، به صورت مختصر مسئله انتقال حرارت هدایتی در مواد مرکب چندلایه معرفی شده است. رابطه فوریه برای انتقال حرارت در محیط های اورتوتروپ به صورت کلی زیر نوشته می شود [۲۱]:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

در لمینیت های کامپوزیتی استوانه ای در جهت های شعاعی و زاویه ای (r, φ) و همچنین جهت های شعاعی و طولی (r, z) را مورد بررسی قرار داده اند. این حل ها تنها برای گذشت زمان های زیاد و حالت دایم معتبرند.

بررسی انتقال حرارت در فرایند تولید مواد مرکب نیز از اهمیت فراوانی برخوردار است. برای نمونه می توان به پژوهش حسن و همکارانش [۱۹] در زمینه تحلیل اثر انتقال حرارت در حین ترکیب الیاف و ماده زمینه اشاره کرد. در این پژوهش، شرح مناسبی از تئوری انتقال حرارت در لمینیت های کامپوزیتی ارائه شده است. نیونهم و آبرات [۲۰] نیز در مقاله خود به تحلیل انتقال حرارت کاربردی (کاربرد در فرایند تولید) به روش المان محدود در مواد غیرایزوتروپ پرداخته اند.

در مطالعه حاضر یک حل تحلیلی برای توزیع دمای غیردایم در پره های کامپوزیتی چندلایه (با در نظر گرفتن خواص اورتوتروپیک هر یک از لایه ها) ارائه شده و نرخ سرد شدن پره در حالت پایا محاسبه شده است. پره مورد بررسی استوانه ای شکل بوده و الیاف در جهت های مشخص به دور آن پیچیده شده اند. شکل ۱ هندسه و لایه بندی مربوط به پین فین مورد بحث را نشان می دهد. زاویه الیاف در هر کدام از لایه های لمینیت می تواند تغییر کند. در این مقاله بر روی انتقال حرارت ناپایای متقارن دوبعدی در جهت های طولی و شعاعی (r, z) تمرکز کرده ایم. همچنین، شرایط مرزی در سطح تبادل حرارت با محیط به صورت کلی در نظر گرفته شده است تا در صورت نیاز تمامی مکانیزم انتقال حرارت را پوشش دهد. تبدیل لاپلاس^۱ بر روی معادله انرژی اعمال شده تا مسئله از حوزه زمان به فرکانس انتقال یابد. سپس معادله دیفرانسیل جزئی حاصل با استفاده از یک تبدیل فوریه^۲ مناسب به یک معادله معمولی ساده شده است. در اینجا از تئوری اشتترم لیوویل^۳ برای استخراج تبدیل فوریه منطبق با شرایط مرزی بهره برده ایم. با توجه به شرایط مرزی مسئله و همچنین معادلات پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه ها یک دستگاه معادلات برای ضرایب سری فوریه حاصل خواهد شد که این دستگاه با استفاده از الگوریتم توماس^۴ حل شده و جواب ها به

1. Laplace Transformation
2. Fourier Transformation
3. Sturm-Liouville Theorem
4. Thomas Algorithm

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_{11} &= m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22} \\
 \bar{k}_{22} &= n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22} \\
 \bar{k}_{33} &= k_{22} \\
 \bar{k}_{12} &= \bar{k}_{21} = m_l n_l (k_{11} - k_{22}) \\
 \bar{k}_{13} &= \bar{k}_{31} = 0 \\
 \bar{k}_{23} &= \bar{k}_{32} = 0
 \end{aligned} \quad (3)$$

در این روابط $\cos \theta$ با m_l و $\sin \theta$ با n_l نشان داده شده است. از آنجایی که در مطالعه حاضر انتقال حرارت هدایتی در پره‌های استوانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است، بایستی مسئله در مختصات استوانه‌ای حل شود. الیاف در هر لایه به دور استوانه در جهت‌های مشخص پیچیده شده‌اند و φ ، r و z مولفه‌های دستگاه مختصات فرعی (مرجع) هستند.

θ به صورت زاویه بین دو خط مماس بر استوانه یکی در جهت الیاف و دیگری در جهت φ تعریف می‌شود. در دستگاه مختصات فرعی رابطه فوریه در یک ماده اورتوتروپ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ q_\varphi \\ q_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

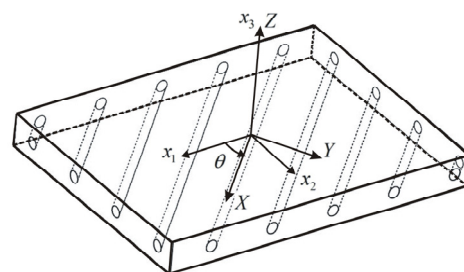
از آنجا که در دستگاه مختصات استوانه‌ای زاویه الیاف نسبت به مولفه دوم یعنی φ تعریف شده است، ضرایب هدایت (معادله ۳) بایستی بازآرایی شوند.

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_{11} &= k_{22} \\
 \bar{k}_{22} &= m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22} \\
 \bar{k}_{33} &= n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22} \\
 \bar{k}_{12} &= \bar{k}_{21} = 0 \\
 \bar{k}_{13} &= \bar{k}_{31} = 0 \\
 \bar{k}_{23} &= \bar{k}_{32} = m_l n_l (k_{11} - k_{22})
 \end{aligned} \quad (5)$$

با اعمال معادله موازنه انرژی برای یک المان استوانه‌ای و استفاده از روابط (۴) در (۵)، معادله انتقال حرارت دوبعدی ناپایا در لمینیت استوانه‌ای به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \bar{k}_{33} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (\bar{k}_{13} + \bar{k}_{31}) \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial z} \\
 + \frac{k_{13}}{r} \frac{\partial T}{\partial z} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}
 \end{aligned} \quad (6)$$

که در این رابطه q شار حرارتی، k_{ij} ضریب انتقال حرارت هدایتی و T دماست. رابطه بین ضرایب انتقال حرارت به طور کامل در مراجع معرفی شده است [۲۲-۲۳]. با توجه به این که لمینیت‌های کامپوزیتی از چیدن لایه‌های مختلف با راستای الیاف متفاوت ساخته می‌شوند، از دو دستگاه مختصات اصلی (x_1, x_2, x_3) و فرعی (x, y, z) برای بررسی خواص در مواد مرکب استفاده می‌شود [۲۴] به طوری که محور x_1 در راستای الیاف، محور x_2 عمود بر راستای الیاف در صفحه لایه کامپوزیتی و محور x_3 عمود بر صفحه لایه قرار دارند. نحوه قرارگیری این دستگاه‌های مختصات در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲ دستگاه‌های مختصات اصلی و فرعی

حال با توجه به تعریف دستگاه مختصات مرجع (دستگاه فرعی)، می‌توان کمیت‌های فیزیکی را در جهت‌های ثابت بررسی کرد. در هر لایه بین دستگاه مختصات اصلی و فرعی به اندازه زاویه θ انحراف وجود دارد و محور x_3 دستگاه مختصات اصلی با محور z دستگاه مختصات فرعی هم‌جهت است. در دستگاه مختصات اصلی رابطه فوریه برای یک ماده مرکب به صورت زیر است [۲۵]:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}_{on} = - \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix}_{on} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{Bmatrix}_{on} \quad (7)$$

با استفاده از یک دوران به اندازه θ می‌توان از محور مختصات فرعی به اصلی رسید، به طوری که اگر ضرایب انتقال حرارت در جهات اصلی با $[k]$ و در جهات فرعی با $[\bar{k}]$ نشان داده شود، داریم:

که در آن ρ و c_p به ترتیب نمایانگر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت‌اند.

از طرفی در بحث حاضر انتقال حرارت هدایتی در محیط‌های چندلایه مورد توجه است؛ بنابراین بایستی رابطه بین لایه‌ها توسط معادلات پیوستگی مربوط به دما و شار حرارت در نظر گرفته شود. با توجه به شکل ۱، اگر $r = r_i$ مرز بین دو لایه مجاور i و $i+1$ باشد، پیوستگی دما و شار حرارت به صورت زیر خواهد بود:

$$T^{(i)} = T^{(i+1)} \quad (1-7)$$

$$\frac{\partial T^{(i)}}{\partial r} = \frac{\partial T^{(i+1)}}{\partial r} \quad (2-7)$$

۳- حل تحلیلی هدایت حرارتی غیردایم

در این قسمت، یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت ناپایا تحت شرایط مرزی کلی در سطح پره ارائه شده است. شرایط مرزی ارائه شده می‌تواند دربرگیرنده انواع شرایط مرزی شامل شرایط مرزی نوع اول، دوم و سوم باشد. برای ساده‌سازی، پروفیل دمای اصلاح شده به شکل زیر تعریف شده است:

$$\phi(r, z, t) = T(r, z, t) - T_i \quad (8)$$

که T_i نمایانگر دمای اولیه است. در این صورت، معادله انتقال حرارت دوبعدی به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\alpha_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \alpha_r \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \alpha_{z,i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (9)$$

که

$$\alpha_r = \frac{k_{22}}{\rho c_p} \quad (1-10)$$

$$\alpha_{z,i} = \frac{n_i^2 k_{11} + m_i^2 k_{22}}{\rho c_p} \quad (2-10)$$

توجه به این مورد ضروری است که $\alpha_{z,i}$ تابعی از زاویه ییاف بوده و لایه به لایه تغییر می‌کند. شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر بیان شده است:

$$\phi^{(i)}(r, z, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_l \quad (1-11)$$

$$\phi(r, 0, t) = \phi_b \quad (2-11)$$

$$\frac{\partial \phi(r, L, t)}{\partial z} = 0 \quad (3-11)$$

$$a \phi(r_{n_l}, z, t) + b \frac{\partial \phi(r_{n_l}, z, t)}{\partial r} = f(z, t) \quad (4-11)$$

که $f(r, z)$ می‌تواند هر تابع دلخواهی باشد. ثابت‌های a و b به ترتیب ابعادی مشابه ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، یعنی W/m^2K ، و ضریب انتقال حرارت هدایتی، یعنی W/mK ، دارند. شایان ذکر است که شرایط مرزی خطی در جهت طولی در کلی‌ترین شکل خود در نظر گرفته شده است. همچنین شرط مرزی تقارن و یا دما محدود را می‌توان برای قسمت مرکزی استوانه در نظر گرفت. در ادامه به منظور انتقال معادله انرژی (۹) از حوزه زمان (t) به حوزه فرکانس (s) از تبدیل لاپلاس استفاده شده است [۲۶].

$$\mathcal{L}\{\phi(r, z, t)\} = \bar{\phi}(r, z, s) \quad (12)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس و شرایط اولیه روی معادله (۹)، معادله انرژی به صورت زیر در می‌آید:

$$\alpha_r \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \alpha_r \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} + \alpha_{z,i} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} - s \bar{\phi} = 0 \quad (13)$$

علاوه بر این، شرایط مرزی نیز در حوزه فرکانس به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\bar{\phi}(r, 0, s) = \phi_b / s. \quad (1-14)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}(r, L, s)}{\partial z} = 0. \quad (2-14)$$

$$a \bar{\phi}(r_{n_l}, z, s) + b \frac{\partial \bar{\phi}(r_{n_l}, z, s)}{\partial r} = \bar{f}(z, s) \quad (3-14)$$

که

$$\bar{f}(r, z, s) = \mathcal{L}\{f(r, z, t)\} \quad (15)$$

در ادامه لازم است تا با استفاده از قضیه اشترم-لیوویل تبدیل فوریه مناسب استخراج شود [۲۶]. با اعمال قضیه اشترم-لیوویل در راستای محور z ، تبدیل فوریه تابع دلخواه g تحت شرایط مرزی مسئله (معادلات (۱-۱۴) و (۲-۱۴)) به دست خواهد آمد:

$$F(g) = \frac{2}{L} \int_0^L [g(z) \sin(\lambda_n z)] dz \quad (16)$$

که مقادیر ویژه λ_n از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

حال با توجه به تبدیل فوریه به دست آمده (معادله ۱۶) و استفاده از انتگرال جزء به جزء، مشتق دوم نسبت به z به دست می‌آید.

• اعمال شرط مرزی کلی در خارج پره (معادله ۲۱):

$$\begin{aligned} & a_{n,s}^{(n_i)} \left[aI_0(\omega_{n,s,n_i} r_{n_i}) + b\omega_{n,s,n_i} I_1(\omega_{n,s,n_i} r_{n_i}) \right] \\ & + b_{n,s}^{(n_i)} \left[aK_0(\omega_{n,s,n_i} r_{n_i}) - b\omega_{n,s,n_i} K_1(\omega_{n,s,n_i} r_{n_i}) \right] \\ & = F(n,s) - a w^{(n_i)}(r_{n_i}, n, s) - b \frac{\partial w^{(n_i)}(r_{n_i}, n, s)}{\partial r} \quad (1-26) \end{aligned}$$

• از شرط مرزی تقارن محوری در مرکز استوانه نتیجه می‌شود:

$$b_{n,s}^{(1)} = 0 \quad (2-26)$$

• اعمال شرط پیوستگی دما در مرز بین لایه‌های i و $i+1$ (معادله ۱-۷):

$$\begin{aligned} U^{(i)}(r_i, n, s) &= U^{(i+1)}(r_i, n, s) \Rightarrow \\ & a_{n,s}^{(i)} I_0(\omega_{n,s,i} r_i) + b_{n,s}^{(i)} K_0(\omega_{n,s,i} r_i) \\ & - a_{n,s}^{(i+1)} I_0(\omega_{n,s,i+1} r_i) + b_{n,s}^{(i+1)} K_0(\omega_{n,s,i+1} r_i) \\ & = w^{(i+1)}(r_i, n, s) - w^{(i)}(r_i, n, s) \quad (3-26) \end{aligned}$$

• اعمال شرط پیوستگی شار حرارت در مرز بین لایه‌های i و $i+1$ (معادله ۲-۷):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(i)}(r_i, n, s)}{\partial r} &= \frac{\partial U^{(i+1)}(r_i, n, s)}{\partial r} \Rightarrow \\ & a_{n,s}^{(i)} \omega_{n,s,i} I_1(\omega_{n,s,i} r_i) + b_{n,s}^{(i)} p_{n,s,i} K_1(\omega_{n,s,i} r_i) - \\ & a_{n,s}^{(i+1)} \omega_{n,s,i+1} I_1(\omega_{n,s,i+1} r_i) + b_{n,s}^{(i+1)} \omega_{n,s,i+1} \times \\ & K_1(\omega_{n,s,i+1} r_i) = \frac{\partial w^{(i+1)}(r_i, n, s)}{\partial r} - \frac{\partial w^{(i)}(r_i, n, s)}{\partial r} \quad (4-26) \end{aligned}$$

I_1 و K_1 به ترتیب توابع بسل اصلاح‌شده نوع اول و دوم از مرتبه یک هستند. حال برای تعیین ضرایب $a_{n,s}^{(i)}$ و $b_{n,s}^{(i)}$ بایستی در هر n برای تمامی لایه‌ها دستگاه معادلات شامل روابط (۱-۲۶)، (۲-۲۶)، (۳-۲۶) و (۴-۲۶) حل شوند. دستگاه معادلات حاصل یک دستگاه پنج قطری است که در مقاله حاضر، با استفاده از الگوریتم توماس، ماتریس ضرایب پنج‌قطری مذکور به یک ماتریس دوقطری تبدیل شده است که درایه‌های روی قطر اصلی همگی مساوی یک هستند. در ادامه، با استفاده از روابط بین سطرها در دستگاه معادلات به‌دست آمده، روابط بازگشتی زیر برای محاسبه $a_{n,s}$ و $b_{n,s}$ به ازای مقادیر مختلف n حاصل شده است.

$$F(g) = \left\{ \frac{2\lambda_n}{L} \left[\frac{\phi_b}{s} \right] - \lambda_n^2 F(g) \right\} \quad (18)$$

حال اگر این تبدیل فوریه را بر روی معادله (۹) اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \alpha^* \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \alpha^* \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \left(\lambda_n^2 + \frac{s}{\alpha_{z,i}} \right) U \\ = \frac{2\lambda_n}{L} \times \left[-\frac{\phi_{end}}{s} \right] \quad (19) \end{aligned}$$

که

$$\alpha^* = \frac{\alpha_r}{\alpha_{z,i}} \quad (20)$$

همچنین، شرط مرزی کلی در جهت r (معادله ۱۴-۳) به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$a U(r_{n_i}, n, s) + b \frac{\partial U(r_{n_i}, n, s)}{\partial r} = F(n, s) \quad (21)$$

که در آن:

$$U(r, n, s) = F(\bar{\phi}(r, z, s)) \quad (1-22)$$

$$F(n, s) = F(\bar{f}(z, s)) \quad (2-22)$$

جواب کلی معادله (حوزه فرکانس) در هر لایه از لمینیت کامپوزیتی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} U^{(i)}(r, n, s) &= \\ & a_{n,s}^{(i)} I_0(\omega_{n,s} r) + b_{n,s}^{(i)} K_0(\omega_{n,s} r) + w^{(i)}(r, n, s) \quad (23) \end{aligned}$$

که

$$\omega_{n,s,i} = \sqrt{\lambda_n^2 + \frac{s}{\alpha_{z,i}}} \quad (24)$$

و $w(r, n)$ پاسخ غیرهمگن معادله (۱۹) است و در حالت کلی برابر است با:

$$\begin{aligned} w^{(i)}(r, n, s) &= \left(\frac{2\lambda_n}{L} \times \frac{-\phi_b}{s} \right) \\ & \times \left[I_0(\omega_{n,s,i} r) \times \int_{r_0}^{r_{n_i}} [r \times K_0(\omega_{n,s,i} r)] dr \right. \\ & \left. + K_0(\omega_{n,s,i} r) \times \int_{r_0}^{r_{n_i}} [r \times I_0(\omega_{n,s,i} r)] dr \right] \quad (25) \end{aligned}$$

در روابط بالا I_0 و K_0 به ترتیب توابع بسل اصلاح‌شده نوع اول و دوم از مرتبه صفرند. در نهایت با اعمال شرایط مرزی در جهت r و پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه‌ها ضرایب $a_{n,s}$ و $b_{n,s}$ به‌دست می‌آیند:

$$\gamma_i = \frac{I_0(\omega_{n,s,i} r_i)}{\chi_i \times K_0(\omega_{n,s,i+1} r_i) - I_0(\omega_{n,s,i+1} r_i)} \quad (3-29)$$

$$\psi_i = \frac{\pi_i \times K_0(\omega_{n,s,i+1} r_i) + K_0(\omega_{n,s,i} r_i)}{\chi_i \times K_0(\omega_{n,s,i+1} r_i) - I_0(\omega_{n,s,i+1} r_i)} \quad (4-29)$$

$$E_i = \pi_i \left[\left(\frac{\partial w^{(i+1)}(r_i, n, s)}{\partial r} - \frac{\partial w^{(i)}(r_i, n, s)}{\partial r} \right) - \frac{\omega_{n,s,i} (w^{(i+1)}(r_i, n, s) - w^{(i)}(r_i, n, s)) I_1(\omega_{n,s,i+1} r_i)}{\chi_i \times K_0(\omega_{n,s,i+1} r_i) - I_0(\omega_{n,s,i+1} r_i)} \right] \quad (5-29)$$

$$F_i = \frac{E_i \times K_0(\omega_{n,s,i+1} r_i) - w^{(i+1)}(r_i, n, s) - w^{(i)}(r_i, n, s)}{\chi_i \times K_0(\omega_{n,s,i+1} r_i) - I_0(\omega_{n,s,i+1} r_i)} \quad (6-29)$$

در نهایت با مشخص شدن ضرایب $a_{n,s}$ و $b_{n,s}$ برای هر لایه می توانیم توزیع درجه حرارت (در حوزه فرکانس) لایه های مختلف را با اعمال تبدیل فوریه معکوس مشخص کنیم [۲۶].

$$\bar{\phi}^{(i)}(r, z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n,s}^{(i)} I_0(\omega_{n,s,i} r) + b_{n,s}^{(i)} K_0(\omega_{n,s,i} r) + w^{(i)}(r, n, s) \right) \times (a_1 \sin(\lambda_n z) - b_1 \lambda_n \cos(\lambda_n z)) \quad (30)$$

شایان ذکر است که در رابطه بالا ضرایب $a_{n,s}^{(i)}$ و $b_{n,s}^{(i)}$ همچنین آرگومان توابع بسل $(\omega_{n,s,i})$ همگی تابعی از s می باشند. دمای لایه ها در حوزه زمان و مکان با اعمال تبدیل لاپلاس معکوس روی معادله (۳۰) به دست خواهد آمد:

$$\phi(r, z, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \bar{\phi}(r, z, s) \right\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} \bar{\phi}(r, z, s) ds \quad (31)$$

در رابطه (۳۱)، c عدد ثابت مختلطی است که بخش حقیقی کلیه قطب های تابع $\bar{\phi}$ از بخش حقیقی عدد c بزرگ تر است. با توجه به پیچیدگی بسیار زیاد انتگرال مختلط فوق، به نظر می رسد که به دست آوردن رابطه مشخصی از محاسبه این انتگرال کار بسیار دشوار و یا غیرممکن است. در اینجا از روشی موسوم به روش تابع مرموفیک [۲۷] جهت محاسبه انتگرال فوق استفاده شده است. مطابق این روش، یک تابع به صورت زیر بر روی $\bar{\phi}$ برازش می شود:

$$\begin{cases} a_n^{(1)} = M_n^{(1)} \\ b_n^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (1-27)$$

$$\begin{cases} b_n^{(i)} = N_n^{(i)} - \alpha_n^{(i)} a_n^{(i)} \\ a_n^{(i)} = M_n^{(i)} - \beta_n^{(i)} b_n^{(i)} \end{cases}, 1 < i < n_l - 1 \quad (2-27)$$

$$b_n^{(n_l)} = N_n^{(n_l)} - \alpha_n^{(n_l)} a_n^{(n_l)} \quad (3-27)$$

ضرایب M_n ، N_n ، β_n ، α_n برای هر لایه از روابط زیر پیروی می کنند:

$$\alpha_{n,s}^{(n_l)} = \frac{a I_0(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l}) + b \omega_{n,s,n_l} I_1(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l})}{a K_0(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l}) - b \omega_{n,s,n_l} K_1(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l})} \quad (1-28)$$

$$N_{n,s}^{(n_l)} = \frac{F(n, s) - a w^{(n_l)}(r_{n_l}, n, s) - b \frac{\partial w^{(n_l)}(r_{n_l}, n, s)}{\partial r}}{a K_0(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l}) - b \omega_{n,s,n_l} K_1(\omega_{n,s,n_l} r_{n_l})} \quad (2-28)$$

$$\begin{cases} \beta_{n,s}^{(i+1)} = \frac{\pi_i}{\chi_i - \alpha_{n,s}^{(i+1)}} \\ M_{n,s}^{(i+1)} = \frac{E_i - N_{n,s}^{(i+1)}}{\chi_i - \alpha_{n,s}^{(i+1)}} \\ \alpha_{n,s}^{(i)} = \frac{\gamma_i}{\psi_i - \beta_{n,s}^{(i+1)}} \\ N_{n,s}^{(i)} = \frac{F_i - M_{n,s}^{(i+1)}}{\psi_i - \beta_{n,s}^{(i+1)}} \end{cases}, 1 < i < n_l - 1 \quad (3-28)$$

$$M_n^{(1)} = \frac{N_n^{(1)}}{\alpha_n^{(1)}} \quad (4-28)$$

برای اجتناب از پیچیدگی و طولانی شدن عبارات فوق، ضرایب π_i ، χ_i ، γ_i ، ψ_i ، E_i و F_i به صورت جداگانه تعریف شده اند:

$$\pi_i = \frac{-I_0(\omega_{n,s,i} r_i) K_1(\omega_{n,s,i+1} r_i) - I_1(\omega_{n,s,i} r_i) K_0(\omega_{n,s,i+1} r_i)}{\frac{\omega_{n,s,i+1}}{\omega_{n,s,i}} I_0(\omega_{n,s,i} r_i) K_1(\omega_{n,s,i+1} r_i) + I_1(\omega_{n,s,i} r_i) K_0(\omega_{n,s,i+1} r_i)} \quad (1-29)$$

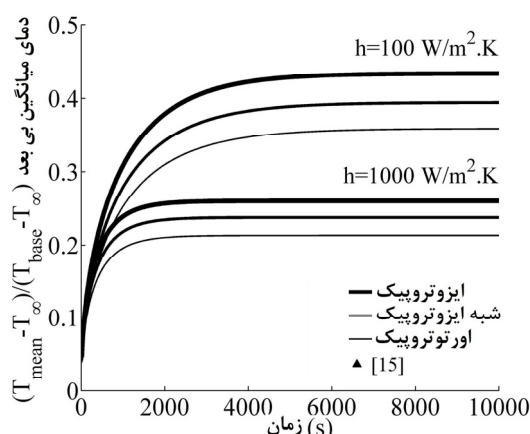
$$\chi_i = \frac{-\frac{\omega_{n,s,i+1}}{\omega_{n,s,i}} I_0(\omega_{n,s,i} r_i) I_1(\omega_{n,s,i+1} r_i) + I_0(\omega_{n,s,i+1} r_i) I_1(\omega_{n,s,i} r_i)}{\frac{\omega_{n,s,i+1}}{\omega_{n,s,i}} I_0(\omega_{n,s,i} r_i) K_1(\omega_{n,s,i+1} r_i) + I_1(\omega_{n,s,i} r_i) K_0(\omega_{n,s,i+1} r_i)} \quad (2-29)$$

- زاویه الیاف در تمامی لایه‌ها مساوی 90° باشد که در این صورت الیاف در جهت z قرار گرفته و انتقال حرارت شبیه هدایت در مواد اورتوتروپ با ضرایب هدایت $k_{zz} = k_{ll}$ و $k_{rr} = k_{22}$ خواهد بود.
- الیاف به شکل یک لمینیت شبه‌ایزوتروپ چندلایه قرار گرفته باشند ($[0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ]$).

قبل از هر چیز، به منظور بررسی توزیع درجه حرارت ناپایدار در لمینیت کامپوزیتی پروفیل دمایی بی‌بعد به صورت زیر تعریف شده است:

$$T^*(r, z, t) = \frac{T(r, z, t) - T_\infty}{T_b - T_\infty} \quad (34)$$

شکل ۳ تغییرات دمایی میانگین بی‌بعد نسبت به زمان را در دو مقدار متفاوت از ضریب جابه‌جایی نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل ۳ بر می‌آید با افزایش ضریب جابه‌جایی زمان رسیدن به حالت پایدار کاهش پیدا می‌کند که این امر ناشی از افزایش نرخ انتقال حرارت بین پره و محیط است. این نمودارها به ازای سه آرایش ایزوتروپ، شبه‌ایزوتروپ و اورتوتروپ رسم شده‌اند. از آنجایی که در حالت اورتوتروپ الیاف در جهت z مرتب می‌شوند انتقال حرارت محیطی از پره کاهش خواهد یافت و در نتیجه بیشترین میانگین دمایی در این حالت اتفاق می‌افتد و به طور عکس در آرایش ایزوتروپ کمترین مقدار میانگین دمایی را شاهد خواهیم بود.



شکل ۳ تغییرات دمایی میانگین بی‌بعد با زمان به ازای ضرایب جابه‌جایی و آرایش الیاف مختلف
($K_{11} = 30 \text{ W/m.K}$, $K_{22} = 20 \text{ W/m.K}$)

$$\bar{\phi}^{(i)}(r, z, s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s + \mathcal{Q}_i} \quad (32)$$

در رابطه فوق، مقادیر $\mathcal{Q}_i$ معرف قطب‌های تابع $\bar{\phi}$ است. به این ترتیب انتگرال (۳۱) از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\phi^{(i)}(r, z, t) = \sum_{i=1}^n K_i \exp(-\mathcal{Q}_i t) \quad (33)$$

۴- نتایج و بحث

در این بخش، سعی شده است که با ارائه یک نمونه عملی توانایی حل ارائه‌شده در بررسی مسائل مربوط به پره‌های چندلایه کامپوزیتی برای آرایش‌های مختلف الیاف نشان داده شود. مسئله در حالت ناپایدار حل شده است و درستی جواب در حالت پایدار (بعد از رسیدن به جواب پایدار) با حل تحلیلی آقایان بهادر و بارکهن [۱۵] برای نرخ انتقال حرارت از پره‌های اورتوتروپ (یک‌لایه) مقایسه شده است. شرایط مرزی به‌کاربرده شده در این مقاله شامل شرط مرزی دما ثابت و عایق در دو انتهای پره و شرط مرزی جابه‌جایی در سطح پره است. جدول ۱ هندسه و شرایط مرزی حاکم بر مسئله را نشان می‌دهد. همچنین، مقادیر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه به ترتیب مساوی 1400 kg/m^3 و 935 J/kg.K در نظر گرفته شده است. سایر متغیرهای دخیل در حل مسئله در توضیحات مربوط به هر نمودار شرح داده خواهد شد.

جدول ۱ هندسه و شرایط مرزی پره

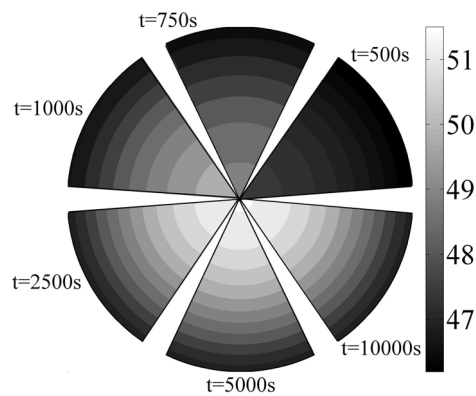
۰/۹	قطر پره
۵	طول پره (cm)
۴۵	دمای اولیه ($^\circ\text{C}$)
۹۵	دمای پایه پره ($^\circ\text{C}$)
۴۵	دمای محیط ($^\circ\text{C}$)
۵	تعداد لایه‌ها

به منظور بررسی اثر زاویه الیاف روی توزیع درجه حرارت و نرخ سرد شدن پره، سه آرایش مختلف از الیاف به شرح زیر در نظر گرفته شده است:

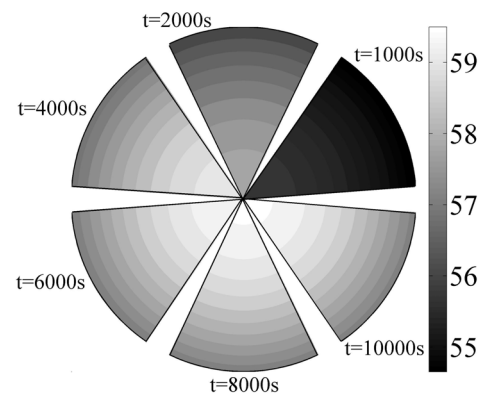
- زاویه الیاف در تمامی لایه‌ها مساوی صفر باشد و یا به عبارتی دیگر تمامی الیاف در جهت ϕ پیچیده شده باشند. در این حالت انتقال حرارت مشابه هدایت در یک پره ایزوتروپ خواهد بود.

از آنجا که مسئله مورد بررسی به صورت متقارن محوری است توزیع دما در جهت θ تغییر نمی‌کند و کانتورهای دما در زمان‌های مختلف به صورت برش‌های قطاعی نشان داده شده‌اند.

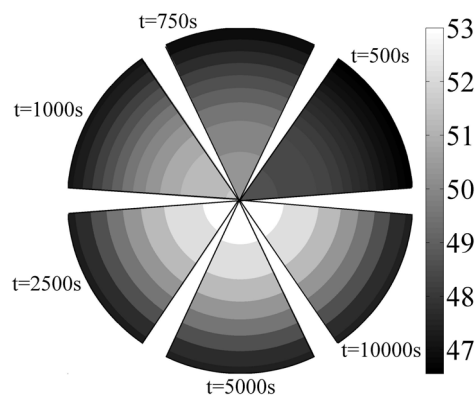
به منظور بررسی الگوهای مختلف توزیع دما در زوایای مختلف الیاف، کانتورهای توزیع دمای پره در زمان‌های گوناگون و به ازای ضرایب جابه‌جایی مختلف رسم شده است (شکل ۴).



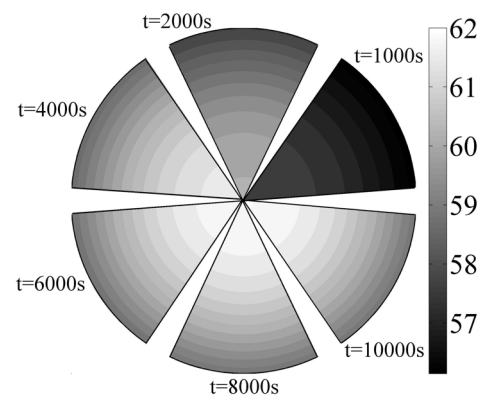
ایزوتروپیک و $h = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$



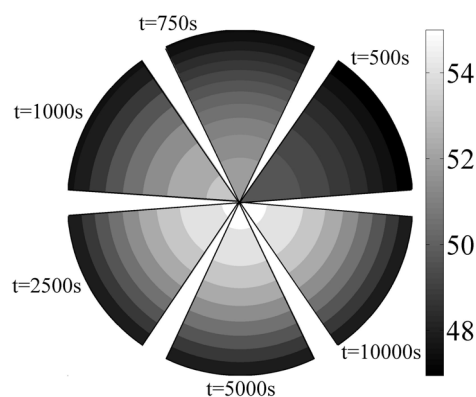
ایزوتروپیک و $h = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$



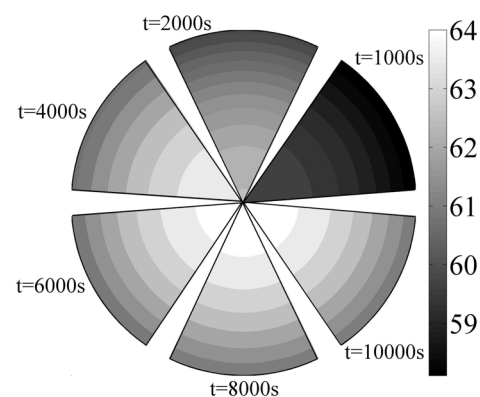
شبه ایزوتروپیک و $h = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$



شبه ایزوتروپیک و $h = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$



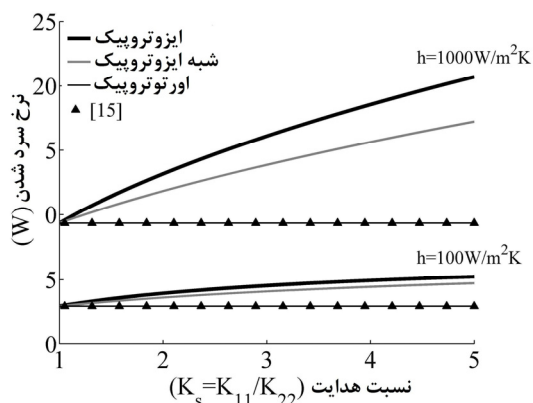
اورتوتروپیک و $h = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$



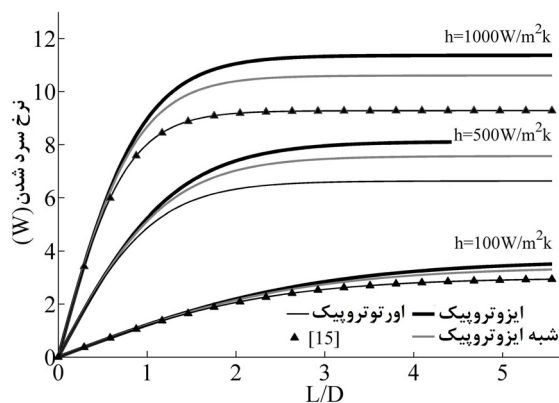
اورتوتروپیک و $h = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$

شکل ۴ کانتورهای توزیع دما در زمان‌های مختلف به ازای ضرایب جابه‌جایی و آرایش الیاف گوناگون ($K_{11} = 30 \text{ W/mK}$, $K_{22} = 20 \text{ W/mK}$)

یافت به طوری که در ضرایب جابه‌جایی پایین مانند $h = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$ تفاوت چشمگیری در نرخ انتقال حرارت از پره مشاهده نمی‌شود. از دیگر موارد قابل توجه در شکل ۶ ناچیز بودن نرخ تغییرات سرد شدن پره در نسبت L/D های بالاست به طوری که بعد از رسیدن به یک نسبت خاص L/D (مثلاً نسبت $L/D = 3$ به ازای $h = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$) دیگر افزایش طول پره تاثیری در نرخ انتقال حرارت از آن ندارد.



شکل ۵ تغییرات نرخ سرد شدن پره با نسبت هدایت برای ضرایب جابه‌جایی و آرایش الیاف مختلف
($K_{22} = 20 \text{ W/mK}$, $L = 5 \text{ cm}$, $D = 0.9 \text{ cm}$)



شکل ۶ تغییرات نرخ سرد شدن پره با نسبت طول به قطر پره برای ضرایب جابه‌جایی و آرایش الیاف مختلف
($K^* = 1.5$, $K_{22} = 20 \text{ W/mK}$, $D = 0.9 \text{ cm}$)

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت هدایتی غیردایم در پره‌های چندلایه کامپوزیتی ارائه شده است. شرایط

همان‌طور که از شکل ۴ پیداست، سطح دمایی در حالت شبه‌ایزوتروپ همیشه بین مقدار ماکزیمم مربوط به حالتی که زاویه الیاف همگی برابر 90° است و حالت مینیمم که تمامی زوایا برابر صفر فرض شده‌اند قرار دارد. همچنین تاثیر زاویه الیاف بر توزیع دما در ضرایب جابه‌جایی پایین محسوس‌تر است طوری که دمای ماکزیمم در حالت اورتوتروپ و ایزوتروپ در ضرایب 100 و $1000 \text{ W/m}^2\text{K}$ به ترتیب 5°C و 3°C اختلاف را نشان می‌دهد.

در این مقاله، از حل تحلیلی آقایان بهادر و بارکهن [۱۵] به عنوان معیاری برای سنجش درستی حل حاضر بهره برده‌ایم. آن‌ها در مقاله خود اثرات ضریب هدایت اورتوتروپیک را در یک پین‌فین تک‌لایه در حالت پایدار مورد بررسی قرار داده‌اند. حل مذکور حالت ساده‌شده‌ای از مسئله ما می‌باشد که در آن زاویه الیاف در تمامی لایه‌ها را مساوی 90° قرار داده (حالت اورتوتروپیک) و حل حالت پایدار را به‌دست آورده‌ایم.

به منظور بررسی اثرات تغییر ضرایب هدایت روی نرخ سرد شدن پره، نسبت هدایت به صورت $K^* = K_{11}/K_{22}$ تعریف شده است. شکل ۵ تغییرات نرخ سرد شدن پره با نسبت هدایت برای ضرایب جابه‌جایی و آرایش الیاف مختلف در حالت پایدار را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌کنید نرخ این تغییرات برای آرایش الیاف ایزوتروپیک به مراتب محسوس‌تر است. همچنین، هرچه نرخ انتقال حرارت از پره افزایش می‌یابد (ضرایب جابه‌جایی حرارتی بیشتر) این تغییرات نیز بیشتر می‌شود. نتایج حاصل از کار بهادر و بارکهن [۱۵] نیز در شکل ۵ نشان داده شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت این دو جواب کاملاً بر یکدیگر منطبق‌اند.

شکل ۶ تاثیرات تغییر طول پره روی نرخ سرد شدن آن (در حالت پایدار) را در ضرایب جابه‌جایی و آرایش الیاف مختلف نشان می‌دهد. تغییرات طول پره به صورت تغییرات نسبت L/D و با فرض ثابت بودن قطر پره اعمال شده است. در اینجا نیز نتایج با مقاله بهادر و بارکهن [۱۵] مقایسه شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت سازگاری کامل بین این دو حل دیده می‌شود (البته نتایج در مرجع [۱۵] فقط به ازای ضرایب جابه‌جایی 100 و $1000 \text{ W/m}^2\text{K}$ گزارش شده است). همان‌طور که از شکل ۶ مشخص است با افزایش ضریب جابه‌جایی اثر آرایش الیاف بر نرخ سرد شدن افزایش خواهد

ϕ	دمای اصلاح شده، $T - T_i$	مرزی به کار گرفته شده در سطح پره کلی بوده که می تواند به
λ	مقادیر ویژه	تمامی انواع شرایط مرزی خطی، نوع اول، دوم و یا سوم ساده
θ	زاویه انحراف بین محورهای مختصات	شود. از جمله مهم ترین نتایج به دست آمده از حل حاضر
ϑ	قطب های تابع فوریه دما	می توان به موارد ذیر اشاره کرد:
ρ	چگالی	• به دلیل حالت کلی شرایط مرزی گرمایی در نظر گرفته شده،
F	تبدیل فوریه	حل حاضر می تواند در بسیاری از کاربردهای عملی برای
$\pounds$	تبدیل لاپلاس	محاسبه توزیع دما و تنش های حرارتی مفید واقع شود.
$\pounds^{-1}$	تبدیل لاپلاس معکوس	• با توجه به تحلیلی و دقیق بودن حل حاضر، از نتایج حاصله
		می توان به عنوان معیاری برای سنجش حل های عددی و
		تقریبی بهره جست.
		• نرخ انتقال حرارت از پره در حالت هایی که زاویه الیاف صفر و
		90° است به ترتیب ماکزیمم و مینیمم است و در سایر
		حالت ها نرخ سرد شدن بین این دو حالت حدی قرار دارد.

۶- فهرست علائم

b, a	ضرایب دلخواه معادله (۱۱-۴)
b_n, a_n	ضرایب سری فوریه دما در معادله ۳۰
c	عدد ثابت مختلط
c_p	ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت
g, f	توابع دلخواه
I	تابع بسل اصلاح شده نوع اول
K	تابع بسل اصلاح شده نوع دوم
K^*	نسبت هدایت پره K_{11}/K_{22}
k_{ij}	ضرایب هدایت اصلی (W/m K)
$\bar{k}_{ij}$	ضرایب هدایت فرعی (W/m K)
L	طول پره (m)
m_l	معرف $\cos \theta$
n_l	معرف $\sin \theta$
q	نرخ انتقال حرارت (W)
z, φ, r	محورهای مختصات قطبی
r_{n_l}	شعاع پره (m)
s	فرکانس (1/s)
T_i	دمای اولیه (K)
T_∞	دمای محیط (K)

۷- منابع

- [1] Corlay C., Advani S. G., "Temperature Distribution in a Thin Composite Plate Exposed to a Concentrated Heat Source", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 50 No. 4, 2007, pp. 2883-2894.
- [2] Iyengar V., "Transient Thermal Conduction in Rectangular Fiber Reinforced Composite Laminates", *Adv. Compos. Mater.*, Vol. 4, No. 4, 1995, pp. 327-342.
- [3] Sunao S., Takashi I., "Numerical Analysis of Heat Conduction Effect Corresponding to Infrared Stress Measurements in Multilamina CFRP Plates", *Adv. Compos. Mater.*, Vol. 8, No. 3, 1999, pp. 269-279.
- [4] Guo T. et al., "Temperature Distribution of Thick Thermo Set Composites", *J. Model. Simul. Mater. Sci. Eng.*, Vol. 12, No. 2, 2004, pp. 443-452.
- [5] Chatterjee J., Henry D. P., Ma F., Banerjee P. K., "An Efficient BEM Formulation for 3-Dimensional Steady-State Heat Conduction Analysis of Composites", *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 51, 2008, pp. 1439-1452.
- [6] Yvonnet J., He Q. C., Toulemonde C., "Numerical Modeling of the Effective Conductivities of Composites with Arbitrarily Shaped Inclusions and Highly Conducting Interface", *Composites Science and Technology*, Vol. 68, No. 13, 2008, pp. 2818-2825.
- [7] Argyris J., Tenek L., Oberg F., "A Multilayer Composite Triangular Element for Steady-State

- Approach", *Computers and Chemical Engineering*, Vol. 26, No. 3, 2002, pp. 1621-1632.
- [17] Kayhani, M.H., Shariati, M., Norouzi, M., Karimi Demneh, M.; "Exact solution of conductive heat transfer in cylindrical composite laminate", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, 2009, pp 83-94.
- [18] Kayhani M. H., Norouzi M., Amiri Delouei A., "A General Analytical Solution for Heat Conduction in Cylindrical Multilayer Composite Laminates", *Int. J. Thermal Science*, Vol. 52, 2012, pp. 73-82.
- [19] Hassan N., Thompson J. E., Batra R. C., Hulcher A. B., Song X., Loos A. C., "A Heat Transfer Analysis of the Fiber Placement Composite Manufacturing Process", *Journal of REINFORCED PLASTICS AND COMPOSITES*, Vol. 24, No. 8, 2005, pp. 869-888.
- [20] Newnham P., Abrate S., "Finite Element Analysis of Heat Transfer in Anisotropic Solids: Application to Manufacturing Problems", *Journal of Reinforced Composites and Plastics*, Vol. 12, No. 1, 1993, pp. 854-864.
- [21] Ozisik M. N., *Heat Conduction*, Second Ed., New York, Wiley, 1993.
- [22] Fung, Y. C., *Foundation of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- [23] Powers, J. M., "On the Necessity of Positive Semi-Definite Conductivity and Onsager Reciprocity in Modeling Heat Conduction in Anisotropic Media", *J. Heat Transf. Trans. Asme*, Vol. 126, No. 5, 2004, pp. 670-675.
- [24] Herakovich C. T., *Mechanics of Fibrous Composites*, New York, Wiley, 1998.
- [25] Halpin J. C., *Primer on Composite Materials Analysis*, Boca Raton, CRC Press, 1992.
- [26] Myint, T., Debnath L., *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Boston, Birkhauser, 2007.
- [27] Bronshtein I. N., Semendyayev K. A., Musiol G., Muehlig H., *Hand book of mathematic*, Berlin, Springer, 1998, pp. 124.
- Conduction/Convection/Radiation Heat Transfer in Complex Shells", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 120, 1995, pp. 271-301.
- [8] Ma C. C., Chang S. W., "Analytical Exact Solutions of Heat Conduction Problems for Anisotropic Multilayered Media", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, No. 9, 2004, pp. 1643-1655.
- [9] Hsieh M. H., Ma C. C., "Analytical Investigations for Heat Conduction Problems in Anisotropic Thin-Layer Media with Embedded Heat Sources", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, No. 20, 2002, pp. 4117-4132.
- [10] Oseloka O., "Heat Conduction in Composite Media: A Boundary Integral Approach", *Journal of Computers & Chemical Engineering*, Vol. 26, No. 1, 2002, pp. 1621-1632.
- [11] Sun Y., Wichman I. S., "On Transient Heat Conduction in a One-Dimensional Composite Slab", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, 2004, pp 1555-1559.
- [12] Lu X., Tervola P., Viljanen M., "Transient Analytical Solution to Heat Conduction in Multi-Dimensional Composite Cylinder Slab", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, 2006, pp. 1107-1114.
- [13] Haji-Sheikh A., Beck J. V., Agonater D., "Steady-State Heat Conduction in Multi-Layer Bodies", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 5, 2003, pp. 2363-2379.
- [14] Singh S., Jain P. K., Uddin R., "Analytical Solution to Transient Heat Conduction in Polar Coordinates with Multiple Layers in Radial Direction", *Int. J. Thermal Sciences*, Vol. 47, 2008, pp. 261-273.
- [15] Bahadur R., Bar-Cohen A., "Orthotropic Thermal Conductivity Effect on Cylindrical Pin Fin Heat Transfer", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, No. 2, 2007, pp. 1155-1162.
- [16] Onyejekwe O. O., "Heat Conduction in Composite Media: a Boundary Integral