



بدست آوردن زوایای گاردان پایدار در سیستم‌های دوار و بررسی عوامل مؤثر بر پایداری سیستم

مسعود سلطان‌رضایی¹، محمدرضا قضاوی^{2*}

1- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* ghazavim@modares.ac.ir، 111-14115، صندوق پستی

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 07 اسفند 1392

پذیرش: 10 مهر 1393

ارائه در سایت: 12 مهر 1393

کلیدواژگان:

مدلسازی سیستم‌های دوار

زوایای گاردان

تحلیل پایداری

چکیده

ماشین‌آلات دوار یکی از انواع سیستم‌های مکانیکی هستند که در صنعت کاربرد زیادی دارند. نحوه اتصال محورها و نیز نوسانات مجموعه از جمله مواردی است که همواره در این سیستم‌ها مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. در این مقاله یک سیستم دوار مکانیکی مدلسازی شده است. در این مدلسازی یک سیستم شامل دو محور (شافت) انعطاف‌پذیر ناهم‌راستا که با اتصال گاردان متصل شده‌اند به صورت دو درجه آزادی و با در نظر گرفتن ارتعاشات پیچشی بررسی شده است. پایداری این مجموعه به کمک روش ماتریس مندومی تحلیل شده است. اعتبارسنجی مدلسازی به وسیله مقایسه نتایج حاصل با نتایج پژوهش‌های گذشته و نیز انواع فرکانس‌های طبیعی سیستم صورت گرفته است. پس از آن، تأثیر پارامترهای مختلف سیستم از جمله سرعت دورانی، زاویه گاردان (زاویه محورها با یکدیگر) و جنس (خواص) محورها (سختی و میرایی آن‌ها) بر پایداری مجموعه بررسی شده است. علاوه بر این شرایط و چگونگی تأثیر هر پارامتر بر سیستم مورد بحث قرار گرفته است. در انتها نمودارهای پایداری بر اساس پارامترهای مختلف سیستم ارائه شده‌اند. مشاهده می‌شود با کاهش سختی محورها و زاویه گاردان و نیز با افزایش میرایی محورها پایداری سیستم افزایش می‌یابد.

Obtaining stable cardan angles in rotating systems and investigating the effective parameters on system stability

Masoud Soltan Rezaee, Mohammad Reza Ghazavi*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

* P.O.B. 14115-111, Tehran, Iran, ghazavim@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 26 February 2014
Accepted 02 October 2014
Available Online 04 October 2014

Keywords:
Modeling of Rotating Systems
Cardan Angle
Stability Analysis

ABSTRACT

Rotating machines are one of the kinds of mechanical systems that widely used in industry. The way of connecting axis and vibration of system are among the items that are always discussed in these systems. In the paper, a mechanical rotating system is modeled. In the model, a system consisting of two flexible axes (shafts) with different rotation axis which connected through a cardan joint is investigated via two degrees of freedom model. The stability of the model is analyzed by means of a monodromy matrix technique. The model is verified by comparing the results with the results of the previous researches and different natural frequencies. Then the effects of different system parameters such as axis rotational velocity, cardan angle, shaft's properties (stiffness and damping) on the stability of system are investigated. Also manner and conditions of each parameter on the stability of system are discussed. Finally, the stability charts constructed on various system parameters is presented. It is observed that decreasing shaft stiffness and cardan joint angle due to more stability, while decreasing shaft damping has the opposite effect.

1- مقدمه

اتصال محورها استفاده می‌شود [1]. در سیستم‌های محور دوار به خصوص در مواقعی که محورها ناهم‌راستا باشند، غالباً از اتصال گاردان جهت متصل کردن محورها استفاده می‌شود. مزیت این اتصال نسبت به دیگر کوپلینگ‌ها و اتصالات بین محورها، تحمل گشتاور و نیروی محوری زیاد، کار در زاویه گاردان نسبتاً بالا، تعمیر آسان و قیمت ارزان است. البته استفاده از این اتصال مشکلاتی نیز دارد؛ ناهم‌راستایی محوری سبب می‌شود محور پیرو نوسان متناوب داشته باشد (حتی اگر سرعت محور راننده ثابت باشد) که این نوسان،

امروزه ماشین‌آلات دوار کاربرد بسیار زیادی در صنعت پیدا کرده‌اند. این ماشین‌ها هر چه دارای اجزای زیادتر یا درجات آزادی بیشتری باشند، مکانیزم پیچیده‌تری خواهند داشت و بررسی حدود کاری ایمن (نواحی پایداری) آنها اهمیت بیشتری می‌یابد. سیستم محور مجموعه‌ای است که از چند محور (شافت) متصل به هم تشکیل شده است و در آن حرکت دورانی از محور راننده به محور پیرو منتقل می‌شود. در این سیستم از انواع کوپلینگ‌ها برای

Please cite this article using:

M. Soltan Rezaee, M. R. Ghazavi, Obtaining stable cardan angles in rotating systems and investigating the effective parameters on system stability, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 163-170, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

در مقالات ذکر شده پژوهشگران به مطالعه سیستم‌هایی با دو محور پرداخته‌اند. نتایج این پژوهش‌ها در خصوص معادلات حرکت، پارامترهای حائز اهمیت، پایداری دینامیکی و روش‌های حل این نوع سیستم‌ها بیان شده است. هدف از این تحقیق تحلیل پایداری سیستم‌های مکانیکی دوار با تأکید بر ویژگی‌های اتصال گاردان و محورها (بررسی تأثیر مقدار سختی و میرایی محورها بر ناپایداری) است. علاوه بر این پایدار نمودن سیستم به وسیله تغییر جنس (خواص) محورها و در نهایت بدست آوردن مناطق پایدار و ایمن یک مجموعه دارای دو محور و یک اتصال گاردان مد نظر است. روش تحلیل پایداری در این پژوهش تکنیک مندرمی ماتریس است که می‌تواند تمام نواحی ناپایداری را پیدا کند و امروزه بیش از دیگر روش‌های حل در سیستم‌های با تحریک پارامتریک استفاده می‌شود. البته به دلیل بررسی نقطه به نقطه تمام دامنه مورد مطالعه، زمان زیادی جهت تحلیل پایداری نیاز دارد. سیستم‌های مکانیکی دوار در انواع سیستم‌های پیشرانش و خطوط انتقال حرکت مورد نیاز است. از جمله کاربردهای سیستم دوار با اتصال گاردان، استفاده از آن در خودروها و قطارها است؛ علاوه بر این در مکان‌هایی که محدودیت فیزیکی وجود دارد و نمی‌توان با یک محور از مبدا تولید حرکت به نقطه‌ای رسید که توان و گشتاور نیاز است بکار می‌رود، همزمان با طراحی و پیش از ساخت سیستم، بررسی و تحلیل نواحی ناپایداری حائز اهمیت است.

2- شرح مسأله

اگر ضرایب موجود در معادله دیفرانسیل حرکت سیستم دارای پارامترهای تحریک خارجی باشند در صورتی که فرکانس تحریک خارجی نسبت صحیحی از فرکانس مودهای ارتعاشی سیستم باشد، این ضرایب به صورت تحریک پارامتریک برای سیستم عمل می‌کنند و در نتیجه ناپایداری پارامتریک در سیستم بوجود می‌آید [19,20]. این نوع ناپایداری در سیستم محور کمتر بررسی شده و ناشی از کوپلینگ پیچشی اعمالی بر محور توسط اتصال یا کوپلینگ می‌باشد. در این مقاله پایداری دینامیکی یک سیستم مکانیکی دوار با اتصال گاردان بررسی شده است. برای این منظور یک مدل دو درجه آزادی شامل دو محور الاستیک پیچشی که بدون جرم و غیر هم‌محور بوده و هر کدام در یک سر به دیسکی صلب متصل گشته در نظر گرفته شده است (شکل 1). با توجه به این مدل، معادلات حرکت سیستم استخراج شده، پس از خطی کردن و بی‌بعد سازی با روش مندرمی مورد تحلیل قرار گرفته است. به منظور اعتبارسنجی مدل‌سازی نتایج حاصل از آن با نتایج پژوهش‌های گذشته و نیز انواع فرکانس‌های طبیعی سیستم مورد مقایسه قرار گرفته است. پس از آن، یک‌سری مقادیر خاص به عنوان حالت مبنا برای سیستم در نظر گرفته شده است. طی چند مرحله هر بار یکی از پارامترهای سیستم (سرعت ورودی، سختی محورها و نیز میرایی آن‌ها) تغییر می‌کند که با توجه به نتایج حالت مبنا تأثیر آن پارامتر بر سیستم، اعم از پایدار یا ناپایدار کردن سیستم و همچنین شرایط و میزان تأثیر بر پایداری دینامیکی مجموعه مشخص می‌شود. در نهایت نتایج به شکل نمودار پایداری بر حسب جفت پارامترهای مختلف سیستم مانند زاویه محورها، خواص آن‌ها و سرعت دورانی گزارش شده‌اند.

3- مدل ریاضی

در این مدل دو محور وجود دارد که محورهای راننده و پیرو نامیده شده‌اند. زاویه ناهم‌راستایی محور راننده و محور پیرو β نامیده شده است. هر محور دارای یک درجه آزادی پیچشی است که در مجموع سیستم دارای دو درجه

ارتعاشات پیچشی را از محور راننده به پیرو منتقل می‌کند و این امر می‌تواند موجب ناپایداری سیستم شود. این ناپایداری به صورت لرزش بیش از حد سیستم، خرابی یا استهلاک غیر عادی اجزای سیستم و حتی قفل شدن یا شکستن ناگهانی بخشی از مجموعه ظاهر می‌شود [2].

کترا [3] پیرامون مدلی غیر خطی مطالعه کرد و یک روش تعیین نامحدود تعمیم یافته¹ بر پایه تئوری فلوکه² به کار برد. او چندین ناحیه ناپایداری بدست آورد که از نوع تشدیدهای ترکیبی تجمیعی اساسی³ بودند. چانگ [4] دو مدل یک درجه آزادی خطی و غیر خطی را برای دست‌یابی به تقریب‌های مرتبه بالاتر مطالعه نمود. او تحلیل پایداری سیستم را به روش اغتشاشی⁴ انجام داد. آسوکتان و هوانگ [5] به بررسی یک مدل دو درجه آزادی خطی از سیستم دوار پرداختند و از یک تکنیک میانگین‌گیری برای تعیین نواحی تشدید پارامتری اولیه بهره بردند. همچنین آسوکتان و وانگ [6] مدلی مشابه [5] را به روش توان لیاپانوف⁵ بررسی نمودند. بعد از آن، آسوکتان و میهن [7] یک مدل دو درجه آزادی غیر خطی را مورد مطالعه قرار دادند و با روش عددی بعضی از رفتارهای نامنظم سیستم را بدست آوردند. دی‌اسمیت و همکاران [8,9] درباره پایداری سیستم شافت با در نظر گرفتن نقش برینگ‌ها مطالعه کردند. سختی و میرایی شافت‌ها و نیز خواص ذاتی اتصال هوک باعث بوجود آمدن نوعی از استهلاک به نام استهلاک داخلی و وجود برینگ‌ها موجب بوجود آمدن نوع دیگری از استهلاک به نام استهلاک خارجی می‌شود. آنها یک مدل دو درجه آزادی با استهلاک ویسکوز در نظر گرفتند و ناپایداری سیستم را با تئوری فلوکه بررسی کردند. مازای و همکاران [10] به مطالعه یک سیستم محور با یک اتصال هوک پرداختند و نواحی ناپایداری را به روش ماتریس مندرمی⁶ بدست آوردند. آن‌ها تأثیر وجود مستهلک‌کننده در پایداری سیستم را در مدل انعطاف‌پذیر خطی و نیز مدل صلب خطی و غیر خطی بررسی کردند [11]. همچنین در مقاله دیگری [12] کمترین مقدار استهلاک مورد نیاز سیستم را برای انتقال از ناحیه ناپایدار پارامتریک به پایدار بدست‌آوردند. آن‌ها برای این منظور یک مدل صلب بر اساس مدل سایگو [13] در نظر گرفتند و نواحی ناپایداری را به روش نامحدود هیل⁷ تخمین زدند. مازای و اسکات [14] به بررسی یک مدل دو درجه آزادی از سیستم دوار با سرعت ورودی شتابدار پرداختند. آن‌ها این مسأله را به روش مندرمی و تعیین نامحدود هیل تحلیل کردند. سپس مازای [15] به مطالعه درباره نواحی تشدید و عبور از حالت‌های ناپایدار پرداخت. او مدلی مانند [14] در نظر گرفت. مازای معادلات دیفرانسیل ناهمگن سیستم را که معادلاتی با دوره تناوب مشخص بود استخراج و به روش انرژی بررسی کرد که یک سیستم به چه میزان می‌تواند در حالت تشدید بماند، بدون آنکه به آن آسیبی وارد شود. بولوت [16] به بررسی پاسخ فرکانسی محورهای دوار به‌وسیله مدل غیر خطی در سیستم دو درجه آزادی پرداخت. سپس به همراه پارلا [17] یک مدل دو بعدی غیر خطی را خطی سازی کرده، تأثیر اینرسی دیسک‌ها را بر پایداری سیستم دوار به روش مندرمی ماتریس بررسی کرد. همچنین پارامترهای مؤثر بر پایداری دینامیکی میله‌های مخروطی در حین دوران را به روش گالرکین استخراج کرد و پایداری مجموعه را با مندرمی ماتریس ارزیابی نمود [18].

1- Developed An Infinite Determinant Method

2- Floquet Theory

3- Principal Combination Resonance Zone of The Summation Type

4- Perturbation Method

5- Lyapunov Exponent

6- Monodromy Matrix Method

7- Hill's Infinite Method

خطی‌سازی این ضرایب با توجه به قاعده زنجیره‌ای به صورت روابط (8-11) خواهد بود:

$$\eta(\theta_1) \approx \eta_{01} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=0} \theta_1 = \eta_{01} + \frac{\partial \eta}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=0} \theta_1$$

$$= \eta_{01} + \frac{\partial \eta}{\partial \varphi_1} \Big|_{\theta_1=0} \theta_1 \quad (8)$$

$$\dot{\eta}(\theta_1) = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 = \frac{\partial \eta}{\partial \varphi_1} (\Omega_0 + \dot{\theta}_1)$$

$$\approx \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi_1} \Big|_{\theta_1=0} + \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi_1} \Big|_{\theta_1=0} \theta_1 \right) (\Omega_0 + \dot{\theta}_1) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\Omega_0} \dot{\eta}_{01} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi_1^2} \Big|_{\theta_1=0} \theta_1 \right) (\Omega_0 + \dot{\theta}_1) \quad (9)$$

$$\eta(\theta_1) = \eta_{01} + \frac{1}{\Omega_0} \dot{\eta}_{01} \theta_1 \quad (10)$$

$$\dot{\eta}(\theta_1) = \dot{\eta}_{01} + \frac{1}{\Omega_0} \dot{\eta}_{01} \dot{\theta}_1 + \frac{1}{\Omega_0} \ddot{\eta}_{01} \theta_1 \quad (11)$$

با جاگذاری معادلات (10) و (11) در معادلات (1) و (5)، معادلات حرکت کلی سیستم به شکل روابط (12،13) در می‌آیند:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 \left(\eta_{01} + \frac{1}{\Omega_0} \dot{\eta}_{01} \theta_1 \right) \dot{\theta}_2$$

$$+ k_1 \theta_1 - k_1 \left(\eta_{01} + \frac{1}{\Omega_0} \dot{\eta}_{01} \theta_1 \right) \theta_2 = 0 \quad (12)$$

$$J_2 [\ddot{\theta}_2 + (\eta_{01} + \dot{\eta}_{01} \frac{\theta_1}{\Omega_0}) \left(-\frac{c_1}{J_1} \dot{\theta}_1 + (\eta_{01} + \dot{\eta}_{01} \frac{\theta_1}{\Omega_0}) \frac{c_2}{J_1} \dot{\theta}_2 \right.$$

$$\left. - \frac{k_1}{J_1} \theta_1 + (\eta_{01} + \dot{\eta}_{01} \frac{\theta_1}{\Omega_0}) \frac{k_2}{J_1} \theta_2 \right)$$

$$+ (\dot{\eta}_{01} + \frac{\dot{\eta}_{01} \dot{\theta}_1}{\Omega_0} + \frac{\ddot{\eta}_{01} \theta_1}{\Omega_0}) (\Omega_0 + \dot{\theta}_1)] + c_2 \dot{\theta}_2 + k_2 \theta_2 = 0 \quad (13)$$

با تعریف پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (14) و نیز بی‌بعدسازی پارامترهای سیستم نسبت به اینرسی دیسک راننده و نیز سختی و میرایی پیچشی محور راننده، معادلات حرکت مجموعه به صورت بی‌بعد درآمده و در فرم برداری-ماتریسی به شکل رابطه (15) در می‌آیند:

$$\tau = \Omega_0 t, \quad \Omega = \frac{\Omega_0}{\sqrt{k_1 J_1}}, \quad \zeta = \frac{c_1}{\sqrt{k_1 J_1}} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_1'' \\ \theta_2'' \end{Bmatrix} + [E] \begin{Bmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{Bmatrix} + [P] \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\eta_{01}'(\tau) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$E_{11} = 2\zeta / \Omega$$

$$E_{12} = -2\eta_{01}(\tau) \alpha \zeta / \Omega$$

$$E_{21} = \eta_{01}'(\tau) - 2\eta_{01}(\tau) \zeta / \Omega$$

$$E_{22} = 2(\alpha \zeta / \Omega) (\eta_{01}^2(\tau) + 1/\gamma)$$

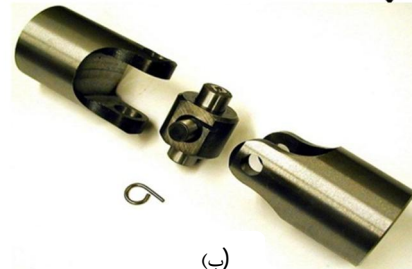
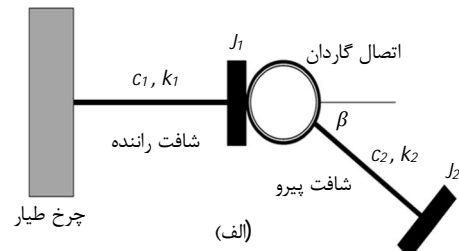
$$P_{11} = 1/\Omega^2$$

$$P_{12} = -\eta_{01}(\tau) \mu / \Omega^2$$

$$P_{21} = \eta_{01}(\tau) / \Omega^2$$

$$P_{22} = (\mu / \Omega^2) (\eta_{01}^2(\tau) + 1/\gamma)$$

E و P ماتریس‌های 2x2 هستند که به ترتیب نشان‌دهنده ماتریس میرایی و سختی سیستم دوارند.



شکل 1 الف) شماتیک یک سیستم دوار ب) اجزای یک اتصال گاردان.

آزادی بوده و حالت دوبعدی (دارای توانایی حرکت در صفحه را) دارد. هر محور دارای سختی پیچشی و استهلاک ویسکوز پیچشی است و در انتهای سمت راست به یک دیسک صلب با اینرسی دورانی متصل گشته است. در انتهای سمت چپ محور راننده یک چرخ طیار وجود دارد تا این محور با سرعت ثابت دوران کند.

معادلات ارتعاشات پیچشی سیستم از روابط (2.1) محاسبه می‌شود.

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + c_1 \dot{\theta}_1 - \eta c_2 \dot{\theta}_2 + k_1 \theta_1 - \eta k_2 \theta_2 = 0 \quad (1)$$

$$J_2 [\ddot{\theta}_2 + \dot{\Omega}_\Theta] + c_2 \dot{\theta}_2 + k_2 \theta_2 = 0 \quad (2)$$

با توجه به روابط (4,3):

$$\varphi_0 = \Omega_0 t + \theta_1 \quad (3)$$

$$\dot{\Omega}_\Theta = \frac{d}{dt} \Omega_\Theta = \frac{d}{dt} (\eta \Omega_1) = \frac{d}{dt} (\eta \varphi_0)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\eta \frac{d}{dt} (\varphi_0) \right) = \dot{\eta} \frac{d}{dt} (\Omega_0 t + \theta_1) + \eta \frac{d^2}{dt^2} (\Omega_0 t + \theta_1)$$

$$= \dot{\eta} (\Omega_0 + \dot{\theta}_1) + \eta \ddot{\theta}_1 \quad (4)$$

رابطه (2) را می‌توان به صورت رابطه (5) نوشت که نشان‌دهنده معادله حرکت پیچشی محور دوم است.

$$J_2 [\ddot{\theta}_2 + \eta \ddot{\theta}_1 + \dot{\eta} (\Omega_0 + \dot{\theta}_1)] + c_2 \dot{\theta}_2 + k_2 \theta_2 = 0 \quad (5)$$

نسبت انتقال سرعت در اتصال گاردان است و از رابطه (6) بدست می‌آید [21].

$$\eta = \frac{\Omega_\Theta}{\Omega_1} = \frac{\cos \beta}{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \varphi_0} \quad (6)$$

معادلات حرکت سیستم غیر خطی هستند. با بسط آن‌ها به وسیله سری مک‌لوران تا جملات مرتبه دوم و صرف نظر از جملات غیر خطی کوچک‌تر، با فرض کوچک بودن مقادیر ارتعاشی و عدم وجود فرکانس‌های مرتبه بالا، معادلات (1) و (5) به صورت خطی در می‌آیند [19].

نکته مهمی که به منظور خطی‌سازی این معادلات باید در نظر گرفته شود، خطی‌سازی ضریب نسبت انتقال سرعت و مشتق آن در اتصال گاردان است، زیرا که متغیر و وابسته به زاویه هستند.

با توجه به رابطه (7):

$$\theta_1 = 0 \Rightarrow \eta = \eta_{01} \quad (7)$$

در این پژوهش ماتریس مندرمی به وسیله انتگرال‌گیری عددی از معادله (17) بدست آمده است و مقادیر ویژه آن محاسبه شده‌اند. روش رانج‌کو تا 2 (RK45) برای انتگرال‌گیری عددی استفاده شده و مقدار تفرانس کنترل خطا 3 مشابه مراجع گذشته [17]، 10^{-9} در نظر گرفته شده‌است.

5- بررسی صحت مدل و تحلیل صورت گرفته

به منظور بررسی صحت مدل‌سازی انجام شده و دقت روش حل بکار گرفته شده، ابتدا مسأله در یک حالت، حل شده و پس از آن نتایج با نتایج موجود در مراجع گذشته مقایسه شده است. تحلیل پایداری با در نظر گرفتن این مقادیر برای پارامترهای بی‌بعد مسأله انجام شده است (مطابق مرجع [17])

$$\zeta = 0.001, \alpha = 1, \mu = 1, \gamma = 100$$

نتایج پژوهش‌های پیشین به صورت گراف‌هایی در شکل 2- الف ارائه شده است که اثر زاویه گاردان را در نسبت سرعت‌های مختلف بر پایداری دینامیکی مجموعه نشان می‌دهند.

در مرحله بعد با در نظر گرفتن همین مقادیر، به تحلیل پایداری مدل ارائه شده در این مقاله پرداخته می‌شود تا صحت آن مورد بررسی قرار گیرد. نتایج در شکل 2- ب گزارش داده شده است.

همان‌طور که ذکر شد در بکارگیری روش مندرمی زمان زیادی برای حل مسأله صرف شده، معمولاً نتایج حل به این روش در چند قسمت ارائه می‌شود؛ چنان‌که در شکل 2 مشاهده می‌شود، در یک قسمت از شکل، نتایج بازای سرعت دورانی بی‌بعد از صفر تا چهار دهم و در قسمت دیگر شکل، نتایج بازای سرعت یک چهارم تا دو ارائه شده است.

چنان‌که از شکل 2 مشخص است، نتایج تحلیل پایداری از نظر شکل ظاهری، (عرض نواحی یعنی در راستای محور افقی و نیز مکان قله‌ها یعنی در راستای محور عمودی) انطباق خوبی داشته و تفاوت قابل توجهی وجود ندارد و بنابراین محدوده‌هایی که توسط مدل ارائه شده، ناپایدار پیش‌بینی شده‌اند، مورد تأیید دیگر مراجع نیز هستند.

لازم به توضیح است در کلیه این نمودارها محور افقی نشان دهنده نسبت سرعت دورانی محور راننده، قله‌ها بیانگر مناطق تشدید و نیز نواحی تیره رنگ نشان‌دهنده نواحی ناپایداری سیستم است.

پیش از ارائه تحلیل پایداری در قالب موارد عددی، بحثی پیرامون نواحی ناپایدار مورد انتظار، لازم به طرح است. چنان‌که مشخص است مکان حوزه‌های ناپایداری بستگی به فرکانس‌های طبیعی و ترکیبات (حاصل جمع و یا تفریق دو فرکانس) و مضارب زوج و فرد آن‌ها دارند، بنابراین می‌توان با محاسبه و تحلیل اثرات متقابل آن‌ها و مقایسه با نواحی ناپایدار بدست آمده توسط مدل ارائه شده نیز، صحت تحلیل و مدل‌سازی را مورد بررسی قرار داد. فرکانس‌های طبیعی با توجه به اثرات همساز⁴ و ترکیبی⁵، نواحی ناپایدار همساز و زیر-همساز⁶ و نیز ترکیبی تجمیعی و تفریقی بوجود می‌آوردند.

نواحی تشدید پارامتریک همساز Ω^H ، مضارب زوج و نواحی زیر-همساز Ω^S مضارب فرد فرکانس‌های طبیعی سیستم‌اند که از رابطه (23) بدست می‌آیند [17]

$$\Omega_{ik}^H = \frac{\omega_i}{2k}, \Omega_{ik}^S = \frac{\omega_i}{2k-1}; i = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

و نیز نواحی تشدید پارامتریک ترکیبی تجمیعی Ω^{C+} و ترکیبی تفریقی Ω^{C-}

معادله (15)، رابطه خطی‌سازی شده برای ارتعاشات پیچشی سیستم مورد نظر است که دوره تناوب آن π رادین است (رابطه 16).

$$\eta_{01}(\tau) = \eta_{01}(\tau + \pi) = \frac{\cos \beta}{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \tau} \quad (16)$$

4- تحلیل پایداری سیستم

معادله (15) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایبی با دوره تناوب π (یک دستگاه معادلات متیو-هیل¹) است. پایداری این دستگاه به روش مندرمی ماتریس بررسی می‌شود. این روش، تکنیکی ساده و قابل اطمینان است و برای تحلیل پایداری در سیستم‌هایی که تحریک پارامتریک دارند و در آن‌ها مقدار ضرایب هارمونیک و وابسته به زمان است مورد استفاده قرار می‌گیرد [22]. در این روش پایداری تمام نقاط در یک محدوده تعیین شده، بر اساس پارامترهای سیستم بررسی می‌شود و از این رو دقت بالایی دارد و می‌تواند تمام نقاط ناپایدار موجود در محدوده را معین نماید و بر خلاف بعضی از روش‌ها تنها به یافتن مرز ناپایداری بسنده نمی‌کند؛ البته این کار را با انجام حجم زیادی از محاسبات ریاضی انجام می‌دهد و به همین دلیل زمان نسبتاً زیادی برای پاسخ دادن نیاز دارد و هر چه دقت بالاتری مورد نظر باشد تعداد نقاط بیشتری را بررسی کرده، در نتیجه زمان بیشتری صرف می‌شود. در این روش نتایج به صورت جداول پایداری برحسب یک جفت از پارامترهای سیستم بیان می‌شود. چگونگی حل با این روش در ادامه به طور مختصر آورده شده است.

یک فضای حالت از سیستم به صورت رابطه (17) است:

$$u' = H(\alpha, \beta, \gamma, \mu, \tau) \times u \quad (17)$$

H یک ماتریس 4×4 با دوره تناوب π به صورت رابطه (18) است:

$$H(\alpha, \beta, \gamma, \mu, \tau) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -P & -E \end{bmatrix} \quad (18)$$

I ماتریس واحد 2×2 و 0 ماتریس صفر 2×2 است.

$$u = \{\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta'_1 \quad \theta'_2\}^T \quad (19)$$

ماتریس پایه به فرم معادله (20) نشان داده می‌شود:

$$[A(\tau)] = [\{y_1(\tau)\}, \{y_2(\tau)\}, \dots, \{y_n(\tau)\}] \quad (20)$$

که $\{y_1(\tau)\}, \{y_2(\tau)\}, \dots, \{y_n(\tau)\}$ ، n حل مستقل خطی از سیستم هستند. با n بار انتگرال‌گیری از معادله (17) از 0 تا τ با n شرط رابطه (21) با توجه به تئوری فلوکه، حل دستگاه به صورت معادله (22) است.

$$[A(0)] = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\Phi(\tau) = K(\tau)e^{M\tau} \quad (22)$$

K ماتریسی با دوره تناوب π است و M یک ماتریس ثابت که به ماتریس

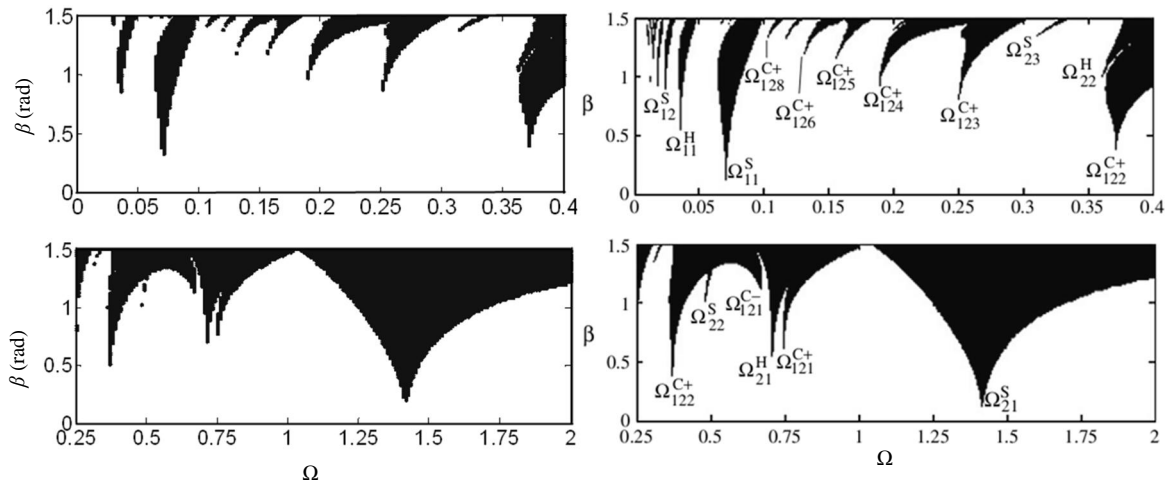
ثابت دیگر یعنی Z (ماتریس مندرمی) به صورت $M = \frac{1}{\pi} \log Z$ وابسته است. اگر معادلات خطی شده باشند آنگاه $\Phi(0) = I$ و $Z = \Phi(\pi)$ است.

مقادیر ویژه ماتریس مندرمی $\sigma_k; k = 1, 2, 3, 4$ برای تحلیل پایداری سیستم بکار می‌روند. سیستم پایدار است اگر و تنها اگر بازای تمام kها

$$\text{mod}(\sigma_k) \leq 1 \quad \text{باشد و یا} \quad \text{Re}(\sigma_k) \leq 0 \quad [22]$$

2- Runge Kutta method
3- The value of error control tolerance
4- Harmonic
5- Combination
6- Sub-harmonic

1- A set of Mathieu-Hill equations



شکل 2 اثر زاویه ناهم‌راستایی، الف) تحلیل گزارش داده شده در دیگر مراجع [17]، ب) تحلیل ارائه شده توسط مدل مقاله.

6- نتایج

در این بخش تحلیل پایداری دینامیکی سیستم در قالب موارد عددی انجام و نتایج به فرم نمودارهای پایداری بر حسب جفت پارامترهای $\beta - \Omega$ ، $\mu - \Omega$ و $\alpha - \Omega$ در μ و α های مختلف نشان داده شده است تا تأثیر تغییر این 4 پارامتر روی پایداری سیستم مورد بررسی قرار گیرد.

به منظور مشاهده میزان اثرگذاری پارامترهای سیستم بر پایداری، ابتدا یک حالت مبنا در نظر گرفته شده است و پس از آن با تغییر یک به یک پارامترهای مختلف، تأثیر آنها بررسی شده است.

در این موارد در حالت مبنا مقادیر، $\zeta = 0.001$ و $\alpha = 1$ و $\mu = 1$ فرض شده و بررسی پایداری دینامیکی مجموعه بازای تغییر پارامتر β (زاویه گاردان) بین صفر تا یک و نیم رادیان انجام می‌شود. در بررسی پایداری، فاصله نقاط 0/01 و یا کمتر از آن در نظر گرفته شده تا نتایج با دقت لازم بدست آیند.

در خصوص مکان قله باید گفت این تشدید به علت عوامل خارجی نیست بلکه زمانی بروز می‌کند که فرکانس تحریکی که گاردان به تناوب در سیستم ایجاد می‌کند ضریب (همساز و زیر-همساز) یا ترکیبی از دو مود ارتعاشی پایه باشد.

در ادامه نمودار اثر زاویه گاردان (میزان ناهم‌راستایی) و نسبت سرعت دوران محور راننده بررسی شده است (شکل 3). این نمودار به عنوان نمودار مبنا (نموداری که نواحی ناپایداری دیگر نمودارها با آن مقایسه می‌شود تا تأثیر تغییر هر پارامتر بر پایداری مشخص شود) در نظر گرفته شده است.

چنان‌که در شکل 3 مشاهده می‌شود هر چه پارامتر β (زاویه گاردان) بیشتر می‌شود، مناطق تیره رنگ که نشان‌دهنده نواحی ناپایداری است گسترش یافته، غالباً عریض‌تر می‌شوند؛ البته در زوایای گاردان زیاد نیز نواحی پایدار وجود دارد.

همچنین با افزایش سرعت دورانی بی‌بعد، غالباً نواحی ناپایدار چه از لحاظ عرض و چه از لحاظ مکان قله‌ها (سرعت‌هایی که بازای آنها تشدید رخ می‌دهد) رشد می‌کنند (قله‌ها در زوایای گاردان کمتری مشاهده می‌شوند)؛ البته در سرعت‌های بالا هم مناطق پایدار دیده می‌شوند و لزوماً با افزایش سرعت دوران، سیستم ناپایدار نمی‌شود.

در خصوص زاویه گاردان لازم به ذکر است به علت آنکه با افزایش مقدار

به ترتیب مضارب ترکیبات تجمیعی و تفاضلی فرکانس‌های طبیعی‌اند (رابطه 24):

$$\Omega_{12k}^{C\pm} = \frac{\omega_2 \pm \omega_1}{2k}; k = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

با فرض $\beta = 0$ (هم‌راستایی محورها)، $\zeta = 0$ (صرف نظر از میرایی) و $\Omega = 1$ در معادله حرکت (15)، فرکانس‌های طبیعی سیستم از رابطه (25) بدست می‌آیند:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\left(1 + \mu \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \right) \pm \sqrt{\left(1 + \mu \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \right)^2 - 4\mu \left(\frac{1}{\gamma} \right)} \right)} \quad (25)$$

با فرض مقادیر $\alpha = \mu = 1, \gamma = 100$ ، مقدار فرکانس‌های طبیعی از رابطه (26) محاسبه می‌شود:

$$\omega_1 = 0.072, \omega_2 = 1.422 \text{ rad/sec} \quad (26)$$

نواحی تشدید پارامتریک همساز و زیر-همساز و همچنین ترکیبی محاسبه شده تا مرتبه دوم ($k = 1, 2$)، به ترتیب از معادلات (24, 23) و با در نظر گرفتن فرکانس‌های طبیعی در معادله (26) محاسبه شده‌اند و در جدول 1 و 2 به تفکیک آمده است.

چنان‌که از مقایسه اعداد جداول 1 و 2 با مکان قله شکل 2 مشخص می‌شود، نواحی ناپایدار پیش‌بینی شده توسط مدل با نتایج بدست آمده از معادلات تشدید پارامتریک از لحاظ مکان قله‌ها هماهنگی داشته که این تطابق نیز، صحت معادلات ریاضی مدل و تحلیل پایداری انجام شده را تصدیق می‌کند.

جدول 1 نواحی ناپایدار همساز و زیر-همساز

Ω^S	Ω^H	
0/072	0/035	Ω_{11}
0/024	0/018	Ω_{12}
1/422	0/712	Ω_{21}
0/474	0/356	Ω_{22}

جدول 2 نواحی ناپایدار ترکیبی تجمیعی و ترکیبی تفریقی

Ω^C	$\Omega^{C\pm}$	
0/675	0/747	Ω_{121}
0/338	0/373	Ω_{122}

در شکل 5 نیز تحلیل ناپایداری بر اساس میرایی محورها انجام شده است و در آن، محور عمودی نسبت میرایی است. این نمودار نشان می‌دهد با افزایش میرایی محور پیرو، تغییر خاصی در نواحی تیره مشاهده نمی‌شود، البته کمی عرض آنها کمتر می‌شود که این مطلب با پایدارتر شدن سیستم همزمان با افزایش نسبت میرایی آن تطابق دارد.

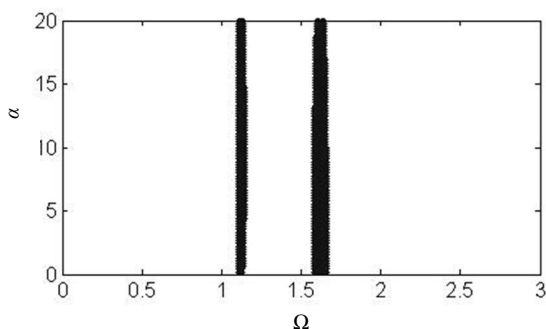
همچنین مشاهده می‌شود نواحی پایدار مورب نبوده، عمودی هستند که این امر با عدم تغییر مکان قله‌ها (و یا به تعبیری فرکانس‌های طبیعی سیستم) در اثر تغییر ضریب میرایی مطابق است؛ به عبارت دیگر با تغییر این ضریب، نواحی ناپایدار در همان سرعت‌های پیشین رخ می‌دهند (چنان‌که در شکل 4 در مقایسه با 3 مشاهده شد).

سپس تأثیر تغییر پارامتر μ (نسبت ضریب سختی محور پیرو به محور راننده) بر پایداری سیستم بررسی شده است. در شکل 6 تحلیل ناپایداری بر اساس نسبت سختی محورها انجام شده است و در آن نسبت ضریب میرایی در مقایسه با شکل 3 (مینا) بیست برابر شده است.

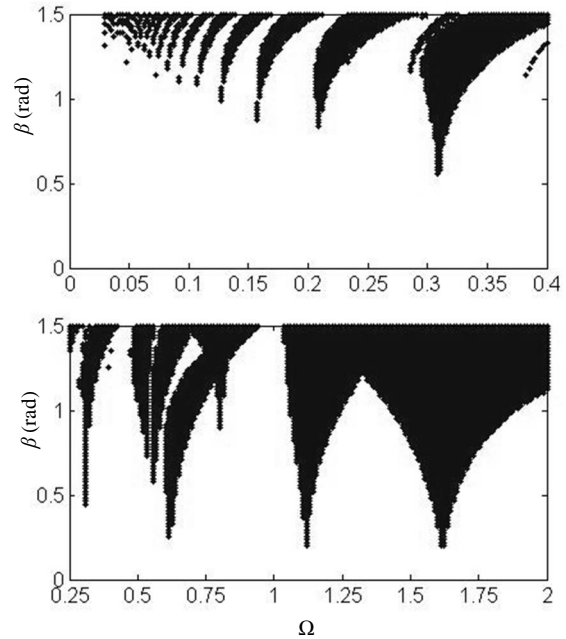
با مقایسه شکل‌های 3 و 6 مشخص می‌شود در اثر افزایش نسبت سختی محورها (افزایش سختی محور پیرو نسبت به راننده)، مکان قله‌ها تغییر می‌کند و یا به عبارت دیگر فرکانس‌های طبیعی سیستم تغییر می‌کنند. همچنین این نمودار نشان می‌دهد هر چه سرعت نسبی بیشتر باشد، با افزایش نسبت سختی، نواحی ناپایداری عریض‌تر می‌شوند و سیستم به سمت ناپایداری پیش می‌رود. این امر در حدی است که حتی بعضی قله‌ها در سرعت‌های نسبی بالاتر از دو رخ می‌دهند و اساساً شکل مناطق ناپایدار تغییر کرده است.

در شکل 7 تحلیل ناپایداری بر اساس نسبت سختی محورها انجام شده است. این نمودار نشان می‌دهد هر چه سرعت نسبی دوران بیشتر باشد، با افزایش نسبت سختی، نواحی ناپایداری عریض‌تر می‌شوند و سیستم به سمت ناپایداری پیش می‌رود.

همچنین مشاهده می‌شود نواحی ناپایدار این شکل به صورت مایل هستند، در صورتی که در شکل 5 عمودی بودند. بنابراین تغییر نسبت میرایی تأثیری بر فرکانس مودهای ارتعاشی ندارد ولی تغییر نسبت سختی محورها (شکل 7)، باعث تغییر فرکانس مودهای ارتعاشی سیستم می‌شود. مایل بودن مناطق تیره شکل 7 بیانگر آن است که با تغییر سختی، سرعت‌های دورانی که بازی آن تشدید پارامتریک رخ می‌دهد تغییر می‌کند. همچنین عریض‌تر شدن این نواحی با افزایش نسبت سختی و نیز میل آنها به سمت سرعت‌های نسبی بالاتر به خصوص در سرعت‌های دورانی بالا، نشان‌دهنده افزایش ناپایداری در سرعت‌های دورانی بالای سیستم و کشیده شدن مناطق ناپایدار به سرعت‌های نسبی بیش از دو می‌باشد (چنان‌که در شکل 6 نسبت به شکل 3 مشاهده شد).



شکل 5 اثر ضریب میرایی بر پایداری

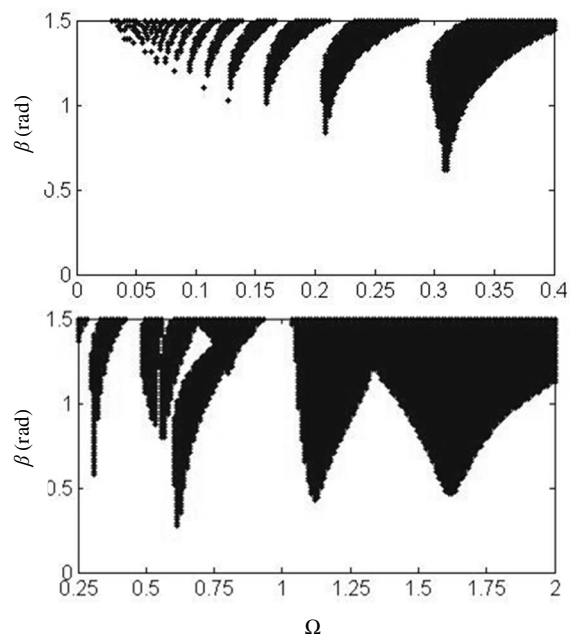


شکل 3 اثر زاویه گاردان و سرعت بر پایداری

آن از صفر (اگر $\beta=0$ باشند، هیچ تحریک پارامتریکی در سیستم وجود ندارد) به سمت $\pi/2$ (گاردان در این زاویه قفل می‌شود و توانایی حرکتش را از دست می‌دهد) نواحی ناپایداری گسترش می‌یابند، در عمل معمولاً زاویه گاردان از سی درجه بیشتر در نظر گرفته نمی‌شود.

سپس تأثیر تغییر پارامتر α (نسبت ضریب میرایی محور پیرو به محور راننده) بر پایداری سیستم بررسی شده است، در شکل 4 نسبت ضریب میرایی در مقایسه با شکل 3، بیست برابر شده است.

با مقایسه شکل‌های 3 و 4 مشخص می‌شود با افزایش نسبت میرایی، نواحی ناپایداری کمی کاهش می‌یابند (این امر در سرعت‌های دورانی بالاتر واضح‌تر است). این نمودار همچنین مشخص می‌کند تغییر نسبت میرایی محورها تأثیر چندانی بر فرکانس‌های طبیعی ندارد؛ زیرا مکان قله‌ها در مقایسه با حالت مینا (شکل 3) تغییری نکرده‌اند.



شکل 4 اثر زاویه گاردان و ضریب میرایی بر پایداری

پارامترهای β (زاویه گاردان)، μ (نسبت ضریب سختی محورها)، α (نسبت ضریب میرایی محورها) و Ω (نسبت سرعت محور) اثرات قابل توجهی روی پایداری دینامیکی سیستم دارند.

با افزایش زاویه گاردان نواحی ناپایداری سیستم محور در محدوده عملی که کاربرد بیشتری در طراحی‌ها دارد افزایش می‌یابد.

با افزایش نسبت ضریب سختی محورها، نواحی ناپایداری افزایش می‌یابد؛ یعنی هر چه ضریب سختی محور پیرو بیشتر از محور راننده باشد، محدوده‌های ناپایداری سیستم بیشتر می‌شود. این امر با افزایش نسبت سرعت مشخص‌تر می‌شود. همچنین تغییر نسبت ضریب سختی محورها باعث تغییر فرکانس‌های طبیعی سیستم و در نتیجه جابجایی مکان‌های وقوع تشدید پارامتریک می‌شود. بنابراین با تغییر نسبت ضریب سختی محورها می‌توان دامنه ناپایداری سیستم را کاهش داد و باعث خروج بعضی نواحی از وضعیت ناپایدار شد.

با افزایش نسبت ضریب میرایی محورها نواحی ناپایداری کمی کاهش می‌یابد و هر چه ضریب میرایی محور پیرو بیشتر از راننده باشد محدوده‌های ناپایداری سیستم کمتر می‌شود. این امر در سرعت‌های نسبی بالاتر مشهودتر است.

افزایش سرعت محور عموماً موجب افزایش ناپایداری می‌شود ولی بسته به مقدار فرکانس‌های طبیعی سیستم، می‌تواند موجب ناپایداری در بعضی سرعت‌های پایین شود؛ سرعت‌هایی که بازای آن‌ها حرکت سیستم نزدیک به مضارب یا ترکیبات فرکانس‌های طبیعی آن انجام می‌شود.

8- فهرست علائم

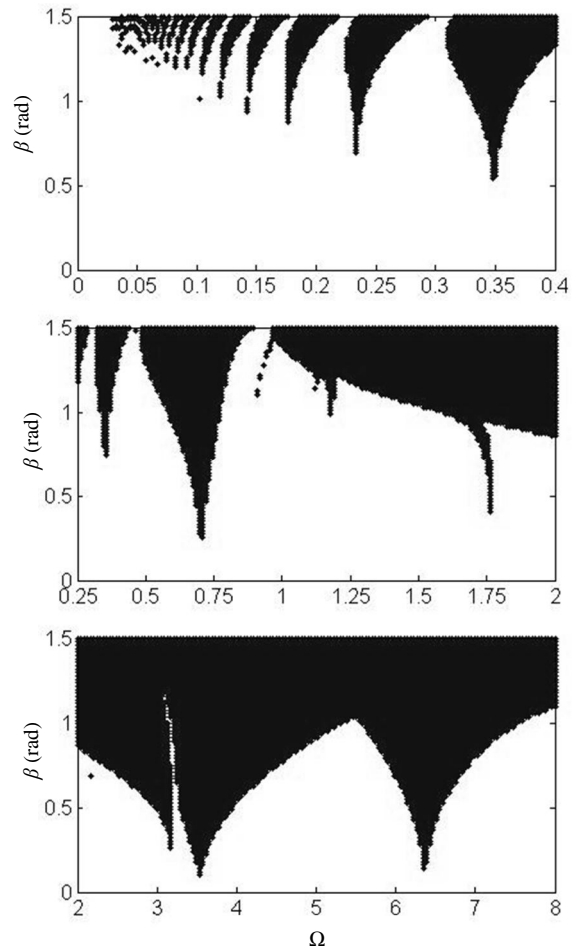
c	استهلاک ویسکوز پیچشی محور ($\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$)
E	ماتریس میرایی
J	اینرسی دورانی دیسک (kgm^2)
k	سختی پیچشی محور ($\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$)
P	ماتریس سختی

علائم یونانی

α	نسبت استهلاک ویسکوز پیچشی محور پیرو به راننده
β	زاویه اتصال گاردان (rad)
γ	نسبت اینرسی دورانی دیسک محور پیرو به راننده
ζ	پارامتر بی‌بعد
η	نسبت انتقال سرعت در اتصال گاردان
η_{01}	نسبت انتقال سرعت در اتصال گاردان در زاویه پیچش صفر
θ	زاویه پیچشی محور (rad)
μ	نسبت سختی پیچشی محور پیرو به راننده
τ	زاویه چرخ طیار (rad)
φ_0	مقدار دوران انتهای محور (rad)
ω	فرکانس طبیعی (rad/s)
Ω	سرعت دورانی بی‌بعد
Ω_1	سرعت ورودی به اتصال گاردان (rads^{-1})
Ω_0	سرعت خروجی از اتصال گاردان (rads^{-1})
Ω_0	سرعت ورودی به محور راننده (rads^{-1})

زیرنویس‌ها

I	ورودی
Θ	خروجی

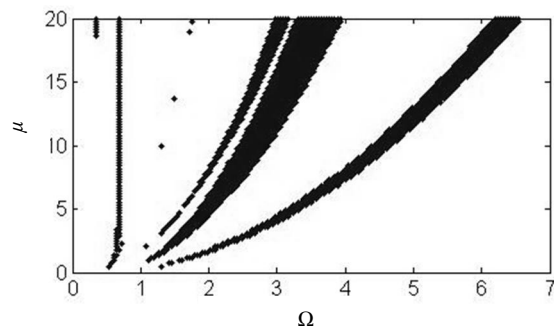


شکل 6 اثر زاویه گاردان و ضریب سختی بر پایداری

اینکه در شکل‌های 3 و 6، قسمت‌های اول نمودار مشابه است به علت آن است که در سرعت‌های دورانی پایین، نواحی تیره رنگ تقریباً عمودی‌اند (چنان‌که در شکل 7 مشاهده می‌شود).

7- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، حرکت یک سیستم دوار به صورت دو بعدی (صفحه‌ای) مدل‌سازی شده است. پایداری دینامیکی این مجموعه به روش مندرمی ماتریس بررسی و نواحی ناپایداری بر اساس پارامترهای مختلف سیستم نشان داده شده است. مسأله مورد مطالعه در این پژوهش بررسی اثر زاویه گاردان بر پایداری سیستم در زوایای مختلف، همچنین تجزیه و تحلیل تأثیر خواص محورها بر پایداری مجموعه بوده است.



شکل 7 اثر ضریب سختی بر پایداری

9- مراجع

- [1] J. Piotrowski, *Shaft Alignment Handbook*, Third ed, pp. 142-153, New York: CRC Press, 2010.
- [2] J.A. Collins, H. Busby, G. Staab, *Mechanical Design of Machine Elements and Machines*, Second ed, pp. 360-365, New York: John Wiley & Sons, 2013.
- [3] T. Kotera, *Instability of torsional vibrations of a system with a cardan joint*, PhD Thesis, Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe, 1990.
- [4] S.I. Chang, Torsional Instabilities And Non-linear Oscillation of a System Incorporating a Hooke's Joint, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 229, No. 4, pp. 993 – 1002, 2000.
- [5] S.F. Asokanathan, M.C. Hwang, Torsional Instabilities in a System Incorporating a Hooke's Joint, *Trans. ASME*, Vol. 118, pp. 368–374, 1996.
- [6] S.F. Asokanathan, X.H. Wang, Characterization of Torsional Instabilities in a Hooke's Joint Driven System via Maximal Lyapunov Exponents, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 194, No. 1, pp. 83–91, 1996.
- [7] S.F. Asokanathan, P.A. Meehan, Non-linear Vibration of Torsional System Driven by a Hooke's Joint, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 233, No. 2, pp. 297 – 310, 2000.
- [8] H.A. DeSmidt, K.W. Wang, E.C. Smith, Coupled Torsion-Lateral Stability of a Shaft-Disk System Drive Through a Universal Joint, *J. Applied Mechanics*, Vol. 69, No. 3, pp. 261-273, 2002.
- [9] H. A. DeSmidt, K. W. Wang, E. C. Smith, Stability of a Segmented Supercritical Driveline with Non-Constant Velocity Couplings Subjected to Misalignment and Torque, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 277, pp. 895–918, 2004.
- [10] A.J. Mazzei, A. Argento, R. A. Scott, Dynamic Stability of a rotating Shaft Driven Through a Universal Joint, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 222, No. 19, pp. 19-47, 1999.
- [11] A.J. Mazzei, R.A. Scott, Principal Parametric Resonance Zones of a Rotating Rigid Shaft Driven Through a Universal Joint, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 244, No. 3, pp. 555-562, 2001.
- [12] A.J. Mazzei, R.A. Scott, Effects of internal viscous damping on the stability of a rotating shaft driven through a universal joint, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 265, No. 1, pp. 863-885, 2003.
- [13] M. Saigo, Transverse Vibration Of A Rotor System Driven by a Cardan Joint, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 95, No. 1, pp. 9-18, 1984.
- [14] A.J. Mazzei, R.A. Scott, Accelerating through Resonance of a Universal Joint Driveline, *Proceedings of the XXV International Modal Analysis Conference, Orlando*, paper 29, 2007.
- [15] A. Mazzei, Passage through Resonance in a Universal Joint Driveline System, *J. Vibrat. Control*, Vol. 17, No. 5, pp. 667-677, 2011.
- [16] G. Bulut, On Nonlinear Vibrations of a Rotating Beam, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 322, No. 1, pp. 314-335, 2009.
- [17] G. Bulut, Z. Parlar, Dynamic Stability of a Shaft System Connected Through a Hooke's Joint, *J. Mechanism and Machine Theory*, Vol. 46, pp. 1689– 1695, 2011.
- [18] G. Bulut, Effect of Taper Ratio on Parametric Stability of a Rotating Tapered Beam, *J. European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 37, pp. 344– 350, 2013.
- [19] A. H. Nayfeh, P. F. Pai, *Linear & Nonlinear Structural Mechanics*, pp. 267-283, Toronto: Wiley, 2004.
- [20] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, pp. 283-330, Singapore: Wiley, 1995.
- [21] H.C. Seher-Thoss, F. Schmelz, E. Aucktor, *Universal Joints and Driveshafts: Analysis, Design, Applications*, Second ed., pp. 5-9, New York: Springer-Verlag, 2006.
- [22] L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics*, pp. 263-292, New York: McGraw-Hill, 1970.