



تحلیل استاتیکی و ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی مدرج تابعی با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی

محسن علیزاده¹، اکبر علی بیگللو^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی 14115-143، abeigloo@modares.ac.ir

چکیده

در این پژوهش به بررسی رفتار استاتیکی و ارتعاشات آزاد ورق‌های ساندویچی مستطیلی متشکل از هسته مدرج تابعی و رویه‌های همگن و یا رویه‌های از جنس مواد مدرج تابعی و هسته همگن پرداخته شده است. در لایه مدرج تابعی، مواد در راستای ضخامت درجه‌بندی شده‌اند و از تابعیت توزیع توانی پیروی می‌کنند. ورق با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده تحت فشار با توزیع یکنواخت بر سطح فوقانی است. اساس حل مسأله بر پایه تئوری الاستیسیته سه بعدی بنا شده است. از ترکیب معادلات تعادل، تنش-کرنش و کرنش-جابجایی معادلات فضای حالت حاکم استخراج شده است. سپس با استفاده از بسط فوریه در راستاهای طولی و عرضی ورق که شرایط تکیه‌گاهی ساده را ارضاء می‌کند، بصورت تحلیلی حل شده است. از حل حاضر می‌توان برای اعتبارسنجی و صحت‌گذاری نتایج مربوط به اعمال فرضیات مربوط به تئوری‌های دو بعدی استفاده کرد. سپس با مقایسه نتایج حاصل با نتایج مقاله‌های معتبر، صحت و دقت روش مذکور تأیید شده است. در نهایت تأثیر ضریب تابعی، نسبت ضخامت لایه‌ها، نسبت ضخامت به طول و نسبت طول به عرض در رفتار ورق ساندویچی ارائه شده است.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 21 دی 1392
پذیرش: 19 اسفند 1392
ارائه در سایت: 06 مهر 1393
کلید واژگان:
ورق مستطیلی
مواد مدرج تابعی
تحلیل استاتیکی و ارتعاشی
الاستیسیته سه بعدی

Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using three dimensional theory of elasticity

Mohsen Alizadeh, Akbar Alibeigloo*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

* P.O.B. 14114-143 Tehran, Iran, abeigloo@modres.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 11 January 2014
Accepted 10 March 2014
Available Online 28 September 2014

Keywords:
Rectangular Plate
Functionally Graded Material
Static and Free Vibration Analyses
Three Dimensional

ABSTRACT

In this study, static and free vibration behaviors of two type of sandwich plates based on the three dimensional theory of elasticity are investigated. The core layer of one type is functionally graded (FG) with the homogeneous face sheets where as in second type the core layer is isotropic with the face sheets FG material. Plate is under uniform pressure at the top surface and free from traction in the bottom surface. The effective material properties of FG layers are estimated to vary continuously through the thickness direction according to a power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. State space differential equations are obtained from equilibrium equations and constitutive relations. The obtained governing differential equations are solved by using Fourier series expansion along the in plane directions and state space technique across the thickness direction. Accuracy and exactness of the present approach is validated by comparing the numerical results with the published results. Furthermore it is possible to validate the exactness of the conventional two dimensional theories. Finally the influences of volume fraction, width-to-thickness ratios and aspect ratio on the vibration and static behaviors of plate are investigated.

1- مقدمه

رویه‌ها و هسته است که می‌تواند باعث افت شدید قابلیت اطمینان سازه شود. مواد مدرج تابعی گروه جدیدی از مواد ترکیبی ناهمگن² هستند که آرایش و نسبت ترکیب مواد و خصوصیات فیزیکی آنها به صورت پیوسته و نرم در یک یا چند راستا از مختصات سه بعدی از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌نماید. به عبارت دیگر خواص مواد مدرج تابعی از قبیل مدول یانگ، ضریب انبساط حرارتی و ضریب هدایت حرارتی طبق تابعی خاص در یک یا چند بعد تغییر

اصول کلی حاکم بر سازه‌های ساندویچی¹ با وجود تنوع بالای آنها یکسان است. این سازه‌ها از دو رویه قوی و نازک (که یک هسته ضخیم با چگالی پایین را در بر گرفته‌اند)، همراه با اتصال رویه به هسته، تشکیل شده‌اند. یکی از اصلی‌ترین نگرانی‌ها در مورد چنین ساختارهایی احتمال ترک و تورق در سطح مشترک هسته و رویه، بر اثر تمرکز تنش‌های برشی عرضی ناشی از اختلاف سختی بین

2- Nonhomogeneous

1- Sandwich Structure

Please cite this article using:

M. Alizadeh, A. Alibeigloo, Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using three dimensional theory of elasticity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 195-204, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Alizadeh, A. Alibeigloo, Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using three dimensional theory of elasticity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 195-204, 2014 (In Persian)

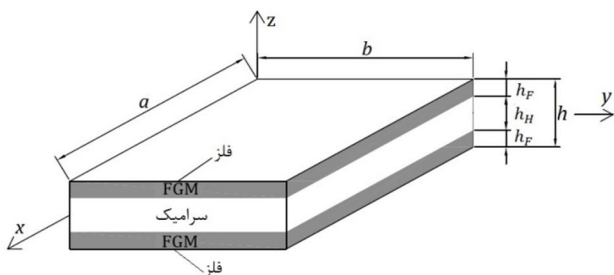
مواد مدرج تابعی با شرایط مرزی کلاسیک را با استفاده از روش مربعات تفاضلی و نرم افزار آباکوس انجام دادند. حسینی هاشمی و همکاران [11]، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم مدرج تابعی با لایه های هوشمند براساس تئوری میندلین را ارائه نمودند. حمیدی و همکاران [12]، تحلیل خمش ورق ساندویچی از جنس مواد مدرج تابعی تحت بار ترمومکانیکی را با در نظر گرفتن چهار متغیر اصلاح شده در تئوری تغییر شکل برشی انجام دادند. گلشن تاج و همکاران [13]، تحلیل استاتیکی ورق از جنس مواد مدرج تابعی روی تکیه گاه های مختلف تحت بار یکنواخت عرضی را انجام دادند. در تحقیق ایشان از تئوری دوبعدی مرتبه بالای تغییر شکل (HSDT) استفاده شده است و از ضریب تصحیح برشی صرف نظر شده است. رحیمی و همکاران [14]، با ترکیب روش های مربعات تفاضلی و فضای حالت یک حل الاستیسیته برای بررسی ارتعاشات آزاد و تأثیر بستر الاستیک در یک تیر مدج تابعی دوجهته مقید در لایه های پیژوالکتریک، ارائه کردند. نواس و همکاران [15]، تحلیل کمانش، استاتیکی و ارتعاشات آزاد ورق همگن و ورق ساندویچی را با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه بالای ورق و تکنیک مش بندی انجام دادند. آکوسی و همکاران [16]، با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی، ارتعاشات آزاد ورق مدرج تابعی که بر روی بستر الاستیک قرار دارد را بررسی کردند. ایشان در تحقیق خود از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا استفاده کردند. معادلات حاکم بر ورق با استفاده از اصل همپلتن⁴ استخراج شده اند. علی بیگلر [17]، تحلیل ترموالاستیک سه بعدی پانل استوانه ای ساندویچی با هسته از جنس مواد مدرج تابعی را ارائه کرده است.

مرور دقیق بر تحقیقات انجام شده در این زمینه نشان می دهد که تحلیل استاتیکی و ارتعاشی ورق ساندویچی بر اساس تئوری سه بعدی الاستیسیته تاکنون گزارش نشده است. در پژوهش حاضر حل تحلیلی سه بعدی برای رفتار ستاتیکی و ارتعاشی دو نوع از ورق های ساندویچی مدرج تابعی مستطیلی ارائه شده است. با ترکیبی از روش فضای حالت و سری فوریه میدان های تنش و تغییر مکان و فرکانس های طبیعی ورق محاسبه و بررسی شده اند. فرض شده است در لایه مدرج تابعی، مواد در راستای ضخامت درجه بندی و از تابعیت توزیع توانی پیروی می کنند. ورق با شرایط مرزی تکیه گاه ساده تحت فشار با توزیع یکنواخت بر سطح فوقانی می باشد.

2- تشریح مسأله

1-1- هندسه مسأله

هندسه ورق های ساندویچی مورد مطالعه و موقعیت دستگاه مختصات، در شکل های 1 و 2 نشان داده شده است. طول و عرض ورق در راستای x و y به ترتیب a و b ، ضخامت کل ورق h می باشد و مبدأ دستگاه مختصات در صفحه میانی ورق قرار دارد. ورق دارای تکیه گاه های ساده بوده و تحت فشار با توزیع یکنواخت P_0 می باشد.



شکل 1 هندسه، ابعاد و موقعیت دستگاه مختصات در ورق ساندویچی نوع الف

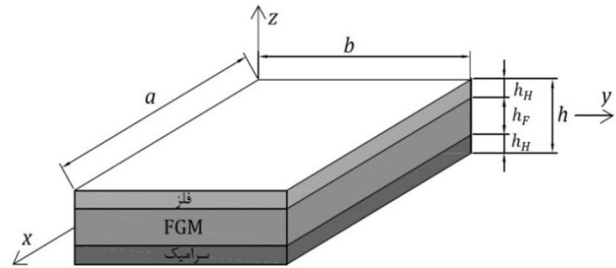
می نماید. این کار با تغییر در کسر حجمی مواد تشکیل دهنده و ریزساختار آنها ممکن خواهد بود. تحقیقات تجربی و تئوری اخیر نشان داده که به کارگیری هسته مدرج تابعی در ساختارهای ساندویچی، تنش های برشی میان دو صفحه را به شدت کاهش می دهد. بعلاوه در این حالت تنش های صفحه ای در بین لایه ها با هم برابر خواهد بود. همچنین مشکل پیدایش ترک در مواد کامپوزیتی که ناشی از تنش های پسماند و به دلیل اختلاف ضریب انبساط حرارتی بین الیاف و ماده زمینه است، در مواد مدرج تابعی به دلیل تغییر تدریجی نسبت مواد ترکیبی رفع شده است. ناکامورا و همکاران [1]، ورق از جنس مواد مدرج تابعی با لایه های پیژوالکتریک را تحت بار یکنواخت عرضی بررسی کردند. در تحقیقی که انجام دادند حل الاستیسیته سه بعدی ارائه و با حل کلاسیک مقایسه کردند، که نشان داده شد حل سه بعدی بسیار دقیق تر می باشد و این دقت در ضخامت های بالا مشهودتر است. ردی و چنگ [2]، تغییر شکل ورق از جنس مواد مدرج تابعی روی تکیه گاه ساده تحت بار مکانیکی و حرارتی را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی بررسی و تحلیل کردند. ایشان نتایج خود را با تئوری های دو بعدی مقایسه کردند که مشاهده شد با افزایش ضخامت ورق در تئوری های دوبعدی خطا افزایش می یابد و حل سه بعدی به مراتب دقیق تر می باشد.

زنکور [3]، کمانش و ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی ساخته شده از مواد مدرج تابعی را ارائه کردند. در این تحقیق حل دوبعدی خمش ورق ساندویچی بر روی تکیه گاه ساده انجام و فرض شده است که ضریب پواسون و مدول الاستیسیته در راستای ضخامت تغییرات پیوسته ای دارند. لی و همکاران [4]، با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی، ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با لایه های مدرج تابعی را بررسی کردند. در تحلیل ایشان از چند جمله ای چیبیشوف¹ و روش ریتز² استفاده نموده است. بریسجتو [5]، تحلیل استاتیکی ورق ساندویچی مدرج تابعی روی تکیه گاه ساده را با استفاده از مدل های ESL و LW ارائه کرده است. بریسجتو در تحقیق خود فرض کرده است که هسته از جنس مواد مدرج تابعی است و در راستای ضخامت با استفاده از چند جمله ای لژاندر تخمین زده شده است.

واقفی و همکاران [6]، تحلیل سه بعدی ورق نازک مدرج تابعی تحت بار استاتیکی با استفاده از روش مش بندی پتروف-گلرکین³ را انجام دادند. در تحقیقی که انجام دادند فرض شد که مدول یانگ در راستای ضخامت با تابعیت نمایی متغیر است و ضریب پواسون ثابت می باشد. عبدالعزیز و همکاران [7]، تحلیل استاتیکی ورق ساندویچی با هسته از جنس مواد مدرج تابعی را با استفاده از تئوری اصلاح شده تغییر شکل مرتبه بالای ورق انجام دادند. این تئوری دوبعدی اصلاح شده برخلاف سایر تئوری های دوبعدی تغییر شکل به جای 5 تابع متغیر، شامل 4 تابع متغیر است که باعث ساده تر شدن حل شده و در عین حال کارآمدی خود را نسبت به سایر تئوری های دوبعدی حفظ کرده است. نتراجان و مانیکم [8]، با استفاده از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل با المان های سهموی خمش و ارتعاشات ورق ساندویچی از جنس مواد مدرج تابعی را بررسی کردند. خلیلی و محمدی [9]، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با رویه های از جنس مواد مدرج تابعی که خواص مواد وابسته به دما باشند را با استفاده از تئوری مرتبه بالای اصلاح شده انجام دادند. آنها فرض کردند که تابعیت خواص مواد نسبت به دما در راستای ضخامت به صورت پیوسته طبق فرمول بندی قانون توانی متغیر است. حسینی هاشمی و خرمی [10]، تحلیل ارتعاش آزاد پوسته استوانه ای نسبتاً ضخیم ساخته شده از

1- Chebyshev
2- Ritz
3- Petrov-Galerkin

4- Hamilton's Principle



شکل 2 هندسه، ابعاد و موقعیت دستگاه مختصات در ورق ساندویچی نوع ب

در تحقیق حاضر دو نوع ورق ساندویچی به صورت زیر مد نظر می باشد: ورق ساندویچی نوع الف (شکل 1): هسته ورق همگن و رویه ها از جنس مواد مدرج تابعی می باشند. کسر حجمی سرامیک در لایه های ورق به صورت رابطه (1) تعریف می شود.

$$V_1 = \left(\frac{z - Z_1}{Z_2 - Z_1} \right)^p, \quad z \in [Z_1, Z_2]$$

$$V_2 = 1, \quad z \in [Z_2, Z_3]$$

$$V_3 = \left(\frac{z - Z_4}{Z_3 - Z_4} \right)^p, \quad z \in [Z_3, Z_4] \quad (1)$$

که در آن Z_1 مختصات سطح تحتانی، Z_2 مختصات سطح مشترک رویه پایین و هسته، Z_3 مختصات سطح مشترک هسته و رویه بالایی و Z_4 مختصات سطح فوقانی ورق در راستای Z هستند.

ورق ساندویچی نوع ب (شکل 2): هسته ورق از جنس مواد مدرج تابعی و رویه ها همگن می باشند. کسر حجمی سرامیک در لایه های ورق به صورت رابطه (2) تعریف می شود.

$$V_1 = 0, \quad z \in [Z_1, Z_2]$$

$$V_2 = \left(\frac{z - Z_2}{Z_3 - Z_2} \right)^p, \quad z \in [Z_2, Z_3]$$

$$V_3 = 1, \quad z \in [Z_3, Z_4] \quad (2)$$

2-2- روابط حاکم

روابط تنش- کرنش در یک ماده مدرج تابعی که مدول الاستیسیته E در راستای ضخامت متغیر می باشد به فرم رابطه (3) است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

که C_{ij} به صورت رابطه (4) می باشد.

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu \quad (4)$$

که μ و λ به فرم رابطه (5) تعریف می شوند.

$$\mu = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E(z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5)$$

در لایه هایی که از جنس مواد مدرج تابعی می باشند، مدول الاستیسیته

بر اساس رابطه (6) تعریف می شود.

$$E(z) = (E_c - E_m)V_i + E_m \quad (6)$$

که E_c و E_m به ترتیب مدول الاستیسیته فلز و مدول الاستیسیته سرامیک هستند. V_i ($i=1,2,3$) کسر حجمی در لایه های مدرج تابعی ورق ساندویچی می باشد.

در لایه های همگن مدول الاستیسیته ثابت می باشد:

$$E = E_0$$

لازم به ذکر است که در لایه های مدرج تابعی و همگن ضریب پواسون ثابت فرض شده است.

روابط مربوط به تکیه گاه ساده به صورت رابطه (7) می باشد:

$$\sigma_x = \nu = w = 0 \text{ در } x = 0, a$$

$$\sigma_y = u = w = 0 \text{ در } y = 0, b \quad (7)$$

با استفاده از روابط تنش- کرنش و کرنش- تغییر مکان روابط تنش- تغییر مکان به صورت رابطه (8) حاصل می شوند:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)u_{,x} + \nu v_{,y} + \nu w_{,z}]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu u_{,x} + (1-\nu)v_{,y} + \nu w_{,z}]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu u_{,x} + \nu v_{,y} + (1-\nu)w_{,z}]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (u_{,y} + v_{,x})$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} (u_{,z} + w_{,x})$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} (v_{,z} + w_{,y}) \quad (8)$$

معادلات تعادل در غیاب نیروهای حجمی به صورت رابطه (9) هستند.

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} = 0$$

$$\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} = 0 \quad (9)$$

با اضافه کردن بخش اینرسی به معادلات تعادل، معادلات حرکت به فرم رابطه (10) خواهد شد:

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (10)$$

3- حل استاتیکی

3-1- استخراج معادلات فضای حالت

برای تحلیل استاتیکی، فرض شده است ورق تحت فشار یکنواخت عرضی بر روی سطح فوقانی قرار دارد. شرایط سطحی در سطوح بالا و پایین ورق به صورت رابطه (11) می باشد.

$$\sigma_z = -P_0, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \text{ at } z = h$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \text{ at } z = 0 \quad (11)$$

با استفاده از معادلات (8) و (9) معادلات فضای حالت به فرم رابطه (12) بدست می آید.

که Z_0 مقدار Z در سطح پائین لایه مدرج تابعی است.

با حل معادله دیفراسیل (15) برای لایه همگن رابطه (18) حاصل می شود.

$$\delta_H(z) = e^{G_H(z-Z_0)} [\delta_H(Z_0)], \quad Z_0 \leq Z \leq Z \quad (18)$$

که δ_H کمیت ها در سطح پایین لایه همگن می باشد.

2-3- پیوستگی تنش و تغییر مکان بین لایه ها و محاسبه ماتریس کلی

با اعمال پیوستگی شرایط مرزی بین لایه ها رابطه بردار δ سطح بالا و پایین محاسبه می شود که با انجام این کار ماتریس کلی بدست می آید.

3-1-2- ورق ساندویچی نوع الف

برای هر کدام از لایه ها بردار δ به صورت رابطه (19) نوشته می شود.

$$\begin{aligned} \delta_{F_1}(z) &= e^{\int_{G_{F_1}} dz} [\delta_{F_1}(Z_1)], \quad Z_1 \leq Z \leq Z_2 \\ \delta_H(z) &= e^{G_H(z-Z_2)} [\delta_H(Z_2)], \quad Z_2 \leq Z \leq Z_3 \\ \delta_{F_2}(z) &= e^{\int_{G_{F_2}} dz} [\delta_{F_2}(Z_3)], \quad Z_3 \leq Z \leq Z_4 \end{aligned} \quad (19)$$

برای پیوستگی روابط، رابطه (20) باید برقرار باشد.

$$\begin{aligned} \delta_{F_1}(Z_2) &= M_{F_1} \delta_{F_1}(Z_1) \\ \delta_H(Z_3) &= M_H \delta_H(Z_2) \\ \delta_{F_2}(Z_4) &= M_{F_2} \delta_{F_2}(Z_3) \end{aligned} \quad (20)$$

با ترکیب روابط (20) ماتریس کلی S به فرم رابطه (21) بدست می آید.

$$\delta_{F_2}(Z_4) = S \delta_{F_1}(Z_1), \quad S = M_{F_2} M_H M_{F_1} \quad (21)$$

3-2-2- ورق ساندویچی نوع ب

مانند نوع الف برای هر کدام از لایه ها بردار δ به صورت رابطه (22) نوشته می شود.

$$\begin{aligned} \delta_{H_1}(z) &= e^{G_{H_1}(z-Z_1)} [\delta_{H_1}(Z_1)], \quad Z_1 \leq Z \leq Z_2 \\ \delta_F(z) &= e^{\int_{G_F} dz} [\delta_F(Z_2)], \quad Z_2 \leq Z \leq Z_3 \\ \delta_{H_2}(z) &= e^{G_{H_2}(z-Z_3)} [\delta_{H_2}(Z_3)], \quad Z_3 \leq Z \leq Z_4 \end{aligned} \quad (22)$$

برای پیوستگی، رابطه (23) باید برقرار باشد.

$$\begin{aligned} \delta_{H_1}(Z_2) &= M_{H_1} \delta_{H_1}(Z_1) \\ \delta_F(Z_3) &= M_F \delta_F(Z_2) \\ \delta_{H_2}(Z_4) &= M_{H_2} \delta_{H_2}(Z_3) \end{aligned} \quad (23)$$

روابط M_{H_1} ، M_{H_2} و M_F در پیوست ذکر شده اند.

با ترکیب روابط (23) ماتریس کلی S به فرم رابطه (24) بدست می آید.

$$\delta_{H_2}(Z_4) = S \delta_{H_1}(Z_1), \quad S = M_{H_2} M_F M_{H_1} \quad (24)$$

3-3- اعمال شرایط مرزی سطوح بالا و پایین

با توجه به روابط (11) و (21) برای ورق ساندویچی نوع الف و یا روابط (11) و (24) برای ورق ساندویچی نوع ب، و اعمال شرایط سطوح بالا و پائین، معادله نهایی به فرم رابطه (25) بدست می آید.

$$\begin{bmatrix} -\bar{P}_{mm} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{52} & S_{53} & S_{54} \\ S_{62} & S_{63} & S_{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}(Z_1) \\ \bar{V}(Z_1) \\ \bar{W}(Z_1) \end{bmatrix} \quad (25)$$

با حل معادله (25) و بدست آوردن $\bar{U}(z_1)$ ، $\bar{V}(z_1)$ و $\bar{W}(z_1)$ و استفاده از شرایط سطح پایین، بردار $\delta(z_1)$ محاسبه شده و با استفاده از روابط (20) برای ورق ساندویچی نوع الف و (23) برای ورق ساندویچی نوع ب، $\delta(z_2)$ و $\delta(z_3)$

$$\sigma_{z,z} = -\tau_{xz} - \tau_{yz}$$

$$u_{,z} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} - w_{,x}$$

$$v_{,z} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} - w_{,y}$$

$$w_{,z} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \sigma_z - \frac{\nu}{1-\nu} u_{,x} - \frac{\nu}{1-\nu} v_{,y}$$

$$\tau_{xz,z} = -\frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z,x} - \frac{E}{1-\nu^2} u_{,xx} - \frac{E}{2(1+\nu)} u_{,yy} - \frac{E}{2(1-\nu)} v_{,xy}$$

$$\tau_{yz,z} = -\frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z,y} - \frac{E}{2(1-\nu)} u_{,xy} - \frac{E}{1-\nu^2} v_{,yy} - \frac{E}{2(1+\nu)} v_{,xx} \quad (12)$$

با توجه به شرایط مرزی (رابطه (7)) بسط های فوریه رابطه (13) برای تنش ها و تغییر مکان ها در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \bar{\sigma}_x(z) \sin(\rho_m x) \sin(\rho_n y) \\ \sigma_y &= \bar{\sigma}_y(z) \sin(\rho_m x) \sin(\rho_n y) \\ \sigma_z &= \bar{\sigma}_z(z) \sin(\rho_m x) \sin(\rho_n y) \\ \tau_{xz} &= \bar{\tau}_{xz}(z) \cos(\rho_m x) \sin(\rho_n y) \\ \tau_{yz} &= \bar{\tau}_{yz}(z) \sin(\rho_m x) \cos(\rho_n y) \\ \tau_{xy} &= \bar{\tau}_{xy}(z) \cos(\rho_m x) \cos(\rho_n y) \\ u &= \bar{U}(z) \cos(\rho_m x) \sin(\rho_n y) \\ v &= \bar{V}(z) \cos(\rho_m x) \cos(\rho_n y) \\ w &= \bar{W}(z) \sin(\rho_m x) \sin(\rho_n y) \end{aligned} \quad (13)$$

که $P_n = n\pi/b$ و $P_m = m\pi/a$ می باشد.

با جایگذاری معادلات (13) در معادلات (12)، معادلات فضای حالت (14) حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{z,z} &= \rho_m \bar{\tau}_{xz} + \rho_n \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{U}_{,z} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \bar{\tau}_{xz} - \rho_m \bar{W} \\ \bar{V}_{,z} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \bar{\tau}_{yz} - \rho_n \bar{W} \\ \bar{W}_{,z} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \bar{\sigma}_z + \frac{\nu}{1-\nu} \rho_n \bar{U} + \frac{\nu}{1-\nu} \rho_m \bar{V} \\ \bar{\tau}_{xz,z} &= -\frac{\nu \rho_m}{1-\nu} \bar{\sigma}_z + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\rho_m^2}{1-\nu} + \frac{\rho_n^2}{2} \right) \bar{U} + \frac{E \rho_m \rho_n}{2(1-\nu)} \bar{V} \\ \bar{\tau}_{yz,z} &= -\frac{\nu \rho_n}{1-\nu} \bar{\sigma}_z + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\rho_m^2}{2} + \frac{\rho_n^2}{1-\nu} \right) \bar{V} + \frac{E \rho_m \rho_n}{2(1-\nu)} \bar{U} \end{aligned} \quad (14)$$

لازم به ذکر است که در لایه مدرج تابعی، E تابع Z بوده و در لایه با مواد همگن ثابت می باشد.

دستگاه معادلات (14) را می توان به فرم ماتریسی رابطه (15) نوشت:

$$\frac{d\delta}{dz} = G\delta \quad (15)$$

که δ بردار ستونی شامل متغیرهای فضای حالت است:

$$\delta = \{ \bar{\sigma}_z \quad \bar{U}_z \quad \bar{V}_z \quad \bar{W}_z \quad \bar{\tau}_{xz} \quad \bar{\tau}_{yz} \}^T \quad (16)$$

با حل معادله دیفراسیل (15) برای لایه مدرج تابعی رابطه (17) حاصل می شود:

$$\delta_F(z) = e^{\int_{G_F} dz} [e^{-G_F(Z_0)} \delta_F(Z_0)], \quad Z_0 \leq Z \leq Z \quad (17)$$

توجه به نتایج در مقالات معتبر انجام گرفته است. نتایج برای دو نوع ورق ساندویچی الف و ب با انواع نسبت ضخامت لایه‌ها به گونه‌ای که سهم هسته در ضخامت کل ورق تغییر کند، محاسبه شده است. اگر نسبت ضخامت هسته به رویه 8 به 1 باشد ورق ساندویچی (1-8-1) و یا اگر نسبت ضخامت هسته به رویه 2 به 1 باشد ورق ساندویچی (1-2-1) نام‌گذاری شده است.

5-1- نتایج حل استاتیکی

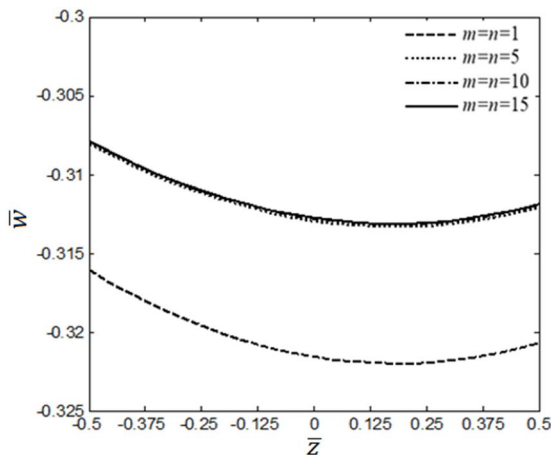
در ارائه نتایج عددی به عنوان نمونه از مواد سرامیک و فلز Al_2O_3 و Al ، با مشخصات رابطه (31) استفاده شده است.

$$E_c = 380 \text{ GPa}, \quad E_m = 70 \text{ GPa}, \quad \nu = .3$$

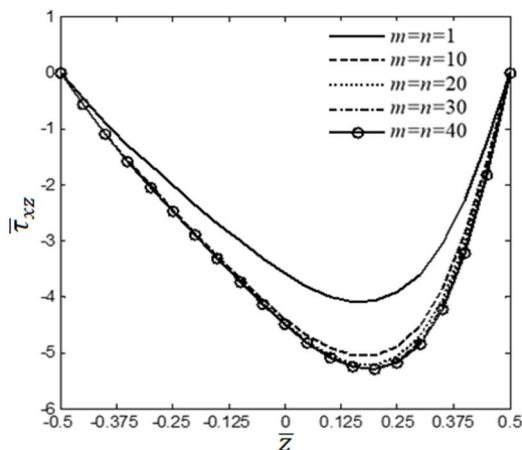
$$\bar{U}_i = \frac{U_i}{Pa}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{PK^*}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h} \quad (31)$$

که در آن $K^* = 1 \text{ GPa}$ و $P = P_0/K^*$ می‌باشد.

در حل تحلیلی که ارائه شده است، تعداد جملات سری‌های فوریه را افزایش داده تا نتیجه سری به جواب نهایی همگرا شود. در شکل 3 جایابی عرضی در نقطه $(x=a/2, y=b/2)$ و در شکل 4 تنش برشی عرضی در نقطه $(x=0, y=b/2)$ همگرایی حل تحلیلی به ازای افزایش تعداد جملات سری‌های فوریه برای یک ورق ساندویچی (1-8-1) نوع ب نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود تعداد جملات برای جایابی‌ها و تنش‌های مختلف می‌تواند متفاوت باشد، خیز نسبت به تنش قائم عرضی بسیار سریع‌تر همگرا شده است.



شکل 3 همگرایی جایابی عرضی بی‌بعد \bar{w} برای ورق ساندویچی (1-8-1) نوع ب با $L/h=10$



شکل 4 همگرایی تنش برشی عرضی بی‌بعد $\bar{\tau}_{xz}$ برای ورق ساندویچی (1-8-1) نوع ب با $L/h=10$

نیز بدست آمده و با قرار دادن در معادلات (19) و (20)، $\delta(z)$ کاملاً مشخص شده است. سپس با قرار دادن بردار $\delta(z)$ در (13) حل استاتیکی خمش ورق کامل خواهد شد.

4- حل ارتعاشی

شرایط سطحی در این تحلیل به صورت رابطه (26) است.

$$z=0, h, \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (26)$$

بسط‌های فوریه رابطه (27) شرایط تکیه‌گاه‌های ساده را ارضا می‌کند.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \bar{\sigma}_x(z) \sin(p_m x) \sin(p_n y) e^{i\omega t} \\ \sigma_y &= \bar{\sigma}_y(z) \sin(p_m x) \sin(p_n y) e^{i\omega t} \\ \sigma_z &= \bar{\sigma}_z(z) \sin(p_m x) \sin(p_n y) e^{i\omega t} \\ \tau_{xz} &= \bar{\tau}_{xz}(z) \cos(p_m x) \sin(p_n y) e^{i\omega t} \\ \tau_{yz} &= \bar{\tau}_{yz}(z) \sin(p_m x) \cos(p_n y) e^{i\omega t} \\ \tau_{xy} &= \bar{\tau}_{xy}(z) \cos(p_m x) \cos(p_n y) e^{i\omega t} \\ u &= \bar{U}(z) \cos(p_m x) \sin(p_n y) e^{i\omega t} \\ v &= \bar{V}(z) \cos(p_m x) \cos(p_n y) e^{i\omega t} \\ w &= \bar{W}(z) \sin(p_m x) \sin(p_n y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (27)$$

در روابط فوق ω فرکانس طبیعی ورق و t زمان است. با اعمال روابط (27) در روابط (8) و (10)، معادلات فضای حالت به فرم رابطه (28) بدست آمده‌اند.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{z,z} &= p_m \bar{\tau}_{xz} + p_n \bar{\tau}_{yz} - \rho \omega^2 \bar{W} \\ \bar{U}_z &= \frac{2(1+\nu)}{E} \bar{\tau}_{xz} - p_m \bar{W} \\ \bar{V}_{,z} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \bar{\tau}_{yz} - p_n \bar{W} \\ \bar{W}_{,z} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \bar{\sigma}_z + \frac{\nu}{1-\nu} p_n \bar{U} + \frac{\nu}{1-\nu} p_m \bar{V} \\ \bar{\tau}_{xz,z} &= -\frac{\nu p_m}{1-\nu} \bar{\sigma}_z + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{p_m^2}{1-\nu} + \frac{p_n^2}{2} \right) \bar{U} + \frac{E p_m p_n}{2(1-\nu)} \bar{V} \\ &\quad - \rho \omega^2 \bar{U} \\ \bar{\tau}_{yz,z} &= -\frac{\nu p_n}{1-\nu} \bar{\sigma}_z + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{p_m^2}{2} + \frac{p_n^2}{1-\nu} \right) \bar{V} + \frac{E p_m p_n}{2(1-\nu)} \bar{U} \\ &\quad - \rho \omega^2 \bar{V} \end{aligned} \quad (28)$$

با انجام روند حل مانند آن چه در حل استاتیکی توضیح داده شد، و نهایتاً اعمال شرایط سطحی (26) رابطه رابطه (29) بدست آمده است.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{52} & S_{53} & S_{54} \\ S_{62} & S_{63} & S_{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}(z_1) \\ \bar{V}(z_1) \\ \bar{W}(z_1) \end{bmatrix} \quad (29)$$

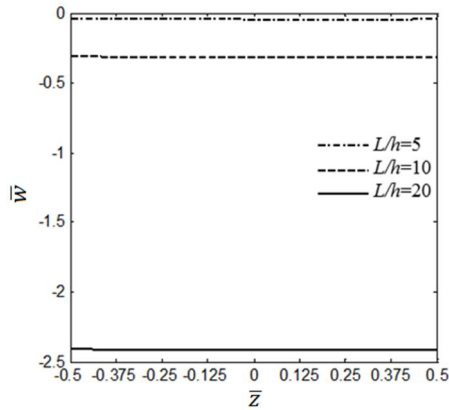
شرط وجود جواب غیر صفر برای دستگاه معادلات همکن فوق صفر بودن دترمینان ضرایب است:

$$|S| = 0 \quad (30)$$

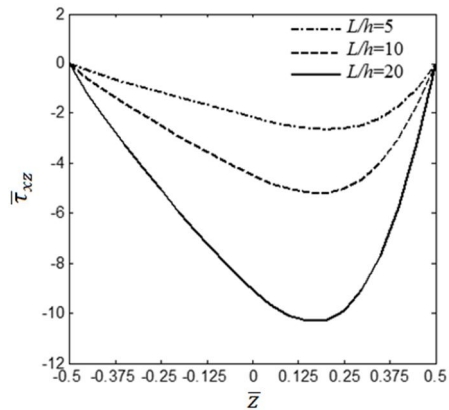
از حل معادله (30) فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی تعیین می‌شود.

5- نتایج عددی و بحث

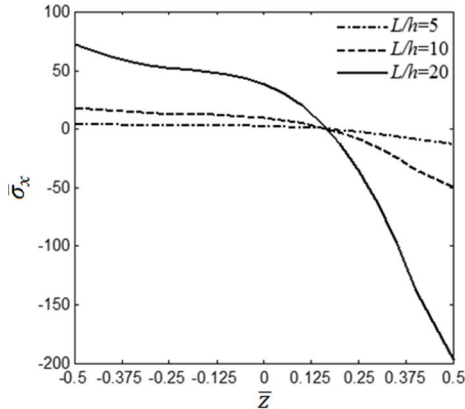
برای نشان دادن صحت و دقت محاسبات، در این بخش نتایج عددی در قالب نمودار و جدول برای مسائل و جنس‌های مختلف ارائه شده است. نتایج شامل دو بخش استاتیکی و ارتعاشی می‌باشد، که در هر دو حل اعتبارسنجی با



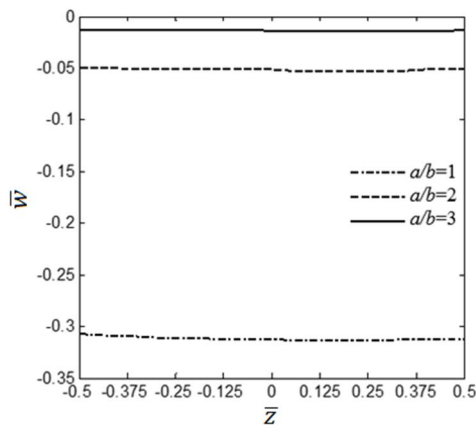
شکل 6 نمودار تغییرات \bar{W} به ازای انواع نسبت طول به ضخامت L/h



شکل 7 نمودار تغییرات $\bar{\tau}_{xz}$ به ازای انواع نسبت طول به ضخامت L/h

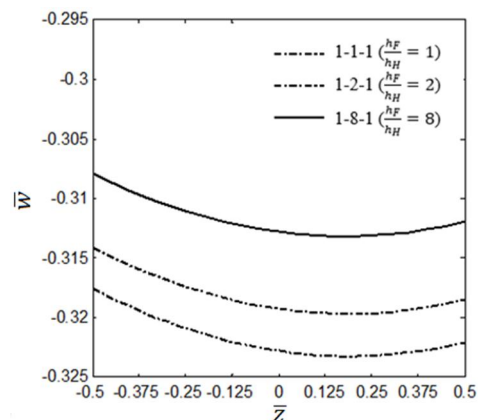


شکل 8 نمودار تغییرات $\bar{\sigma}_x$ به ازای انواع نسبت طول به ضخامت L/h

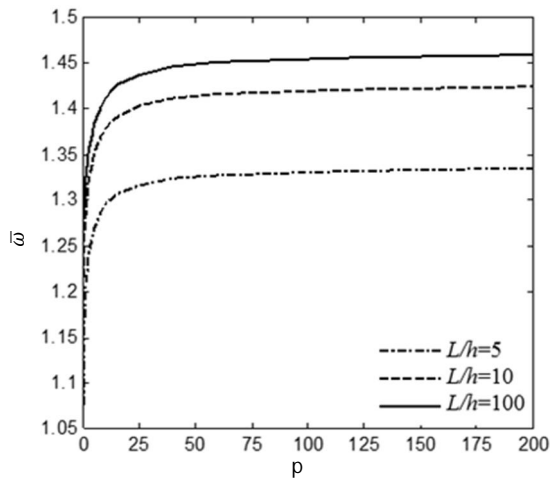


شکل 9 نمودار تغییرات \bar{W} به ازای انواع نسبت طول به عرض a/b

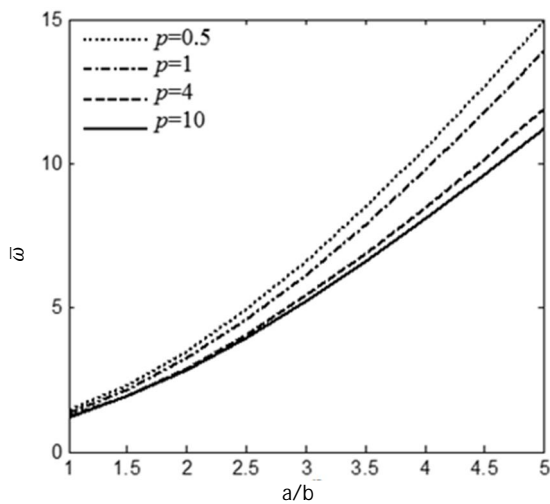
برای بررسی صحت حل ارائه شده، شرایط مسأله‌ای که در مراجع [5] و [15] آمده است، در نظر گرفته و نتایج تحقیق حاضر با نتایج مقالات مذکور مقایسه شده است. یک ورق ساندویچی (1-8-1) با هسته از جنس مواد مدرج تابعی و رویه‌های همگن (نوع ب) که در سطح فوقانی خود تحت یک نیروی عرضی سینوسی قرار گرفته، در نظر گرفته شده است. جدول 1 تغییرات جابجایی عرضی بی‌بعد در نقطه مرکزی سطح میانی ورق ($x=a/2, y=b/2, z=h/2$) و تنش برشی عرضی بی‌بعد در نقطه با مختصات ($x=a/2, y=b/2, z=h/6$) را نشان می‌دهد. مقایسه نتایج همخوانی خوبی را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که تفاوت نتایج، به خاطر نوع تئوری مورد استفاده در مراجع مذکور می‌باشد. شکل 5 تغییرات جابجایی عرضی بی‌بعد برحسب ضخامت بی‌بعدرا نشان می‌دهد. فرض شده است ورق ساندویچی نوع ب با شاخص توان ($P=2$) و نسبت طول به ضخامت ($L/h=10$) است و تحت بار یکنواخت عرضی در سطح فوقانی می‌باشد. مشاهده می‌شود با افزایش سهم هسته در ضخامت کل ورق، میزان خیز ورق کاهش می‌یابد. در شکل 6 توزیع جابجایی بی‌بعد عرضی برای ورق‌های نازک و ضخیم آمده است. ملاحظه می‌شود که هرچه ورق نازک‌تر می‌شود، تغییرات جابجایی در راستای Z مقادیر بزرگ‌تری را نشان می‌دهد و رشد چشمگیری را دارد. توزیع تنش برشی عرضی برای نسبت طول به ضخامت‌های مختلف ورق در شکل 7 دیده می‌شود. از این نمودار پیداست هرچه نسبت طول به ضخامت بیشتر باشد، تنش برشی بیشتری به ورق وارد می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود در همه منحنی‌ها تنش برشی در ابتدا و انتها صفر است (ارضای شرایط سطحی) و بیشترین تنش برشی به سمت سطح بالا متمایل شده است، این به خاطر نوع توزیع مواد در لایه مدرج تابعی است. شکل 8 نیز به وضوح نشان می‌دهد که تغییرات تنش نرمال طولی در نزدیکی سطح بالا نسبت به سطح پایین بیشتر می‌باشد. همچنین دیده می‌شود که تأثیر نسبت طول به ضخامت در این توزیع در ورق‌های ضخیم بیشتر از ورق‌های نازک می‌باشد. شکل 9 اثر نسبت منظر در خیز جانبی ورق را نشان می‌دهد. بطوری که دیده می‌شود در حالت مربعی خیز عرضی دارای بیشترین مقدار بوده و با افزایش نسبت طول به عرض ورق، خیز عرضی کاهش می‌یابد. در شکل‌های 10 و 11 کاملاً مشخص است که با افزایش نسبت طول به عرض، تنش برشی و تنش نرمال طولی کاهش می‌یابد. در شکل 12 تغییرات جابجایی عرضی تنش و تغییر مکان ورق ساندویچی نوع الف برحسب ضخامت برای شاخص‌های توانی مختلف رسم شده است. ملاحظه می‌شود در اثر افزایش مقدار شاخص توان جابجایی عرضی بی‌بعد کاهش می‌یابد.



شکل 5 نمودار تغییرات \bar{W} برای نسبت ضخامت‌های مختلف ورق ساندویچی نوع ب به ازای $L/h=10$ و $p=2$



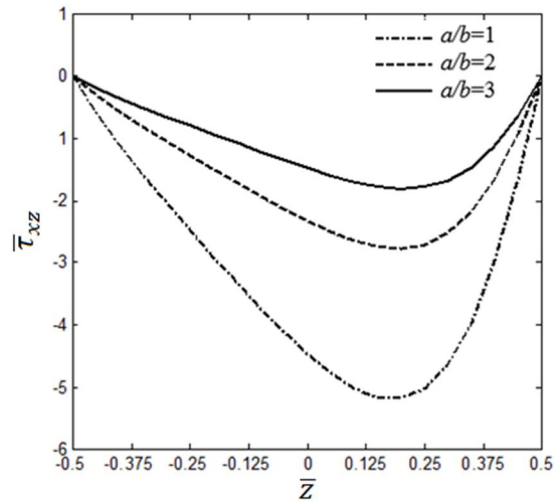
شکل 13 منحنی تغییرات $\bar{\omega}$ بر حسب شاخص‌های توانی برای انواع نسبت طول به ضخامت



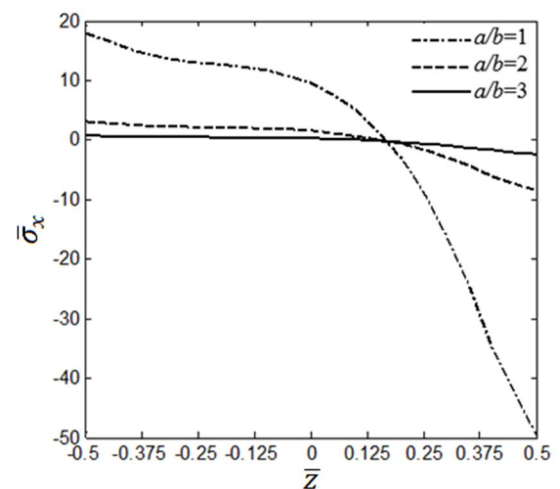
شکل 14 نمودار تغییرات $\bar{\omega}$ بر حسب نسبت طول به عرض به ازای شاخص‌های توانی مختلف

دو نوع ورق ساندویچی و یک ورق تک‌لایه از جنس مواد مدرج تابعی در نظر گرفته که دارای ابعاد $(a \times b \times h)$ می‌باشند. هر کدام از ورق‌ها به صورت جداگانه تحلیل شده‌اند.

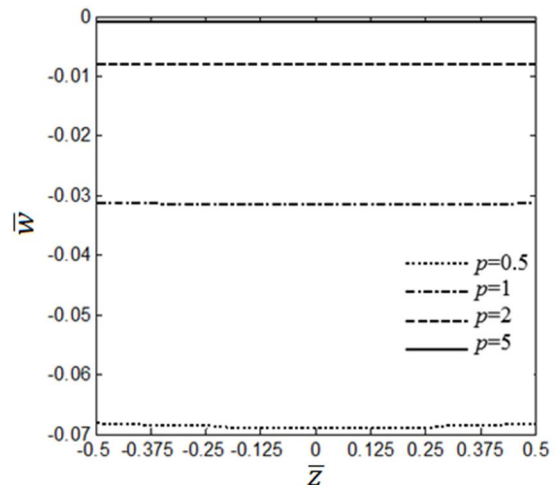
جدول‌های 2 و 3 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد به ترتیب برای یک ورق تک‌لایه همگن و یک ورق مدرج تابعی را نشان می‌دهد. نتایج موجود در این جدول‌ها به ازای مقادیر مختلف L/h و p نشان داده شده‌اند. در جدول‌های 4 و 5 فرکانس طبیعی برای دو نوع ورق ساندویچی ارائه شده است. می‌توان مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حل تحلیلی و نتایج مقالات مذکور را داشت. نتایج ارائه شده، مطابقت بسیار خوبی بین نتایج پژوهش حاضر و نتایج مقالات را نشان می‌دهد. در شکل 13 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب شاخص توان و نسبت (L/h) برای ورق ساندویچی نوع ب را می‌توان دید. با افزایش شاخص توان فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد، در مقادیر کم آن تغییرات فرکانس طبیعی بسیار شدید می‌باشد و تقریباً از مقدار $p=10$ با افزایش p فرکانس طبیعی تغییرات بسیار اندکی دارد. مشاهده می‌شود با افزایش (L/h) فرکانس طبیعی ورق افزایش یافته است. شکل 14 اثر نسبت طول به عرض ورق را در فرکانس پایه نشان می‌دهد. از این نمودار پیداست که با افزایش نسبت طول به عرض فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش چشمگیری دارد. ورق مربعی کمترین فرکانس طبیعی را دارد و با باریک‌تر شدن ورق، فرکانس افزایش می‌یابد.



شکل 10 نمودار تغییرات $\bar{\tau}_{xz}$ به ازای انواع نسبت طول به عرض a/b



شکل 11 نمودار تغییرات $\bar{\sigma}_x$ به ازای انواع نسبت طول به عرض a/b



شکل 12 نمودار تغییرات $\bar{\omega}$ به ازای شاخص‌های توانی مختلف

2-5- نتایج حل ارتعاشی

در ابتدا به بررسی صحت حل ارائه شده برای ارتعاشات آزاد پرداخته و اعتبار سنجی انجام شده است. برای این منظور شرایط مسأله‌ای که در مقالات [4]، [8]، [16] و [18] آمده است در نظر گرفته و نتایج عددی تحقیق حاضر با نتایج مقالات مذکور مقایسه شده است.

6- نتیجه گیری

ساندویچی نوع ب، میزان خیز ورق کاهش می یابد و همین طور تنش کمتری را نیز متحمل می شود. هرچه نسبت طول به ضخامت ورق افزایش یابد، تنش و خیز افزایش یافته و ورق دامنه تغییرات تنش های نرمال و برشی و جابجایی طولی بیشتری را خواهد داشت. هرچه ورق در تکیه گاه سفت تر یا به عبارتی محدودتر باشد فرکانس طبیعی بیشتری را متحمل خواهد شد. با افزایش (L/h) و نازکتر شدن یا افزایش نسبت طول به عرض ورق، فرکانس طبیعی افزایش یافته خواهد یافت.

در این پژوهش به بررسی رفتار استاتیکی و ارتعاشات آزاد ورق های ساندویچی مستطیلی متشکل از هسته مدرج تابعی و رویه های همگن و یا رویه های از جنس مواد مدرج تابعی و هسته همگن پرداخته شده است. در لایه مدرج تابعی، مواد در راستای ضخامت درجه بندی شده اند و از تابعیت توزیع توانی پیروی می کنند. ورق با شرایط تکیه گاهی ساده تحت فشار با توزیع یکنواخت بر سطح فوقانی می باشد. با افزایش سهم هسته در ضخامت کل ورق

جدول 1 تغییرات جابجایی عرضی بی بعد \bar{w} و تنش برشی عرضی بی بعد $\bar{\tau}_{xz}$ در مرکز ورق ساندویچی (1-8-1) نوع ب تحت بار سینوسی

P	L/h	$\bar{\tau}_{xz}(h/6)$			$\bar{w}(0)$		
		4	10	100	4	10	100
0	حل حاضر	0/2375	0/2382	0/2384	0/4201	0/3684	0/3579
	منبع [15]	0/2208	0/2227	0/2228	0/4447	0/3711	0/3568
0/5	حل حاضر	0/2565	0/2564	0/2564	0/5744	0/5128	0/5002
	منبع [15]	0/2246	0/2581	0/2585	0/6168	0/5277	0/5058
1	حل حاضر	0/2612	0/2604	0/2602	0/6967	0/6218	0/6065
	منبع [15]	0/2745	0/2789	0/2795	0/7417	0/6305	0/6092
	منبع [5]	0/2613	0/2605	0/2603	0/7628	0/6324	0/6072
4	حل حاضر	0/2396	0/2397	0/2397	0/9958	0/8172	0/7804
	منبع [15]	0/2696	0/2747	0/2753	1/0371	0/8199	0/7784
	منبع [5]	0/2429	0/2431	0/2432	1/0934	0/8321	0/7797
10	حل حاضر	0/2269	0/2297	0/2303	1/1231	0/8629	0/8098
	منبع [15]	0/1995	0/2034	0/2039	1/1752	0/8645	0/8050
	منبع [5]	0/2150	0/2174	0/2179	1/2232	0/8753	0/8077

جدول 2 هفت مود اول فرکانس طبیعی بی بعد برای ورق تک لایه ایزوتروپ

L/h	روش حل	مود							
		1,1	2,1	1,2	2,2	3,1	1,3	3,2	2,3
1000	حل حاضر	19/7391	49/3476	49/3476	78/9557	98/6943	98/6943	128/3019	128/3019
	منبع [16]	19/7391	49/3476	49/3476	78/9557	98/6943	98/6943	128/3020	128/3020
100	حل حاضر	19/7323	49/3049	49/3049	78/8465	98/5238	98/5238	128/0141	128/0141
	منبع [16]	19/7322	49/3045	49/3045	78/8456	98/5223	98/5223	128/0120	128/0120
10	حل حاضر	19/0901	45/6193	45/6193	70/1041	85/4875	85/4875	107/3698	107/3698
	منبع [16]	19/0850	45/5957	45/5957	70/0595	85/4315	85/4315	107/3040	107/3040
5	حل حاضر	17/5260	38/4827	38/4827	55/7871	66/9960	66/9960	79/8704	79/8704
	منبع [16]	17/5149	38/4722	38/4722	55/8358	66/1207	66/1207	80/1637	80/1637

جدول 3 فرکانس طبیعی بی بعد برای ورق تک لایه مدرج تابعی (Al/Al_2O_3)

L/h	p	روش حل	مود				
			1	2	3	4	5
10	0	حل حاضر	5/7769	13/8050	13/8050	19/4833	19/4833
		منبع [18]	5/779	13/81	13/81	19/48	19/48
1	1	حل حاضر	4/4277	10/6307	10/6307	16/2008	16/2008
		منبع [18]	4/428	10/63	10/63	16/20	16/20
5	5	حل حاضر	3/7665	8/9159	8/9159	12/6303	12/6303
		منبع [18]	3/774	8/931	8/931	12/64	12/64
5	0	حل حاضر	5/3036	9/7417	9/7417	11/6454	11/6454
		منبع [18]	5/304	9/742	9/742	11/65	11/65
1	1	حل حاضر	4/1004	8/0887	8/0887	9/1097	9/1097
		منبع [18]	4/100	8/089	8/089	9/108	9/108
5	5	حل حاضر	3/4004	6/2927	6/2927	7/3348	7/3348
		منبع [18]	3/405	6/296	6/296	7/344	7/344

جدول 4 مود اول فرکانس طبيعي بي بعد، ورق ساندويچي نوع الف از جنس (Al/Al₂O₃)

L/h	p	1-1-1				1-2-1			2-2-1		
		0	0/5	1	5	0/5	1	5	0/5	1	5
5	حل حاضر	1/6737	1/4126	1/2682	0/9866	1/4699	1/3534	1/1177	1/4459	1/3143	1/0545
	منبع [4]	1/6774	1/4219	1/2778	0/9886	1/4696	1/3536	1/1192	1/4455	1/3144	1/05566
	منبع [8]	1/6771	1/4218	1/2777	0/9980	1/4694	1/3534	1/1190	1/4454	1/3143	1/0561
10	حل حاضر	1/8097	1/5101	1/3439	1/0335	1/5773	1/4415	1/1752	1/5499	1/3977	1/1093
	منبع [4]	1/8269	1/5214	1/3553	1/0453	1/5767	1/4414	1/1757	1/5493	1/3976	1/1093
	منبع [8]	1/8268	1/5213	1/3552	1/0455	1/5768	1/4415	1/1757	1/5494	1/3977	1/1100
100	حل حاضر	1/8694	1/5483	1/3731	1/0511	1/6198	1/4757	1/1969	1/591	1/4301	1/1301
	منبع [4]	1/8884	1/5605	1/3852	1/0511	1/6192	1/4756	1/1970	1/5904	1/4300	1/1303
	منبع [8]	1/8883	1/5605	1/3851	1/0631	1/6192	1/4756	1/1970	1/5904	1/4299	1/1302

جدول 5 مود اول فرکانس طبيعي بي بعد، ورق ساندويچي نوع ب از جنس (Al/Al₂O₃)

L/h	p	1-1-1				1-2-1			2-2-1		
		0	0/5	1	5	0/5	1	5	0/5	1	5
5	حل حاضر	1/0832	1/1479	1/1687	1/2192	1/1645	1/1939	1/2656	1/2017	1/2413	1/3307
	منبع [8]	1/0893	1/1511	1/1701	1/2162	1/1663	1/1952	1/2712	1/2031	1/2421	1/3312
10	حل حاضر	1/2065	1/2396	1/2539	1/2991	1/2163	1/2803	1/3511	1/2861	1/3236	1/4182
	منبع [8]	1/2087	1/2392	1/2526	1/2935	1/2598	1/2806	1/3513	1/2865	1/3238	1/4180
100	حل حاضر	1/2615	1/2774	1/2884	1/3306	1/2796	1/315	1/3831	1/3200	1/3560	1/4523
	منبع [8]	1/2616	1/2751	1/2854	1/3239	1/2796	1/3148	1/3825	1/3198	1/3559	1/4519

- پيوست

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_m & \rho_n \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_m & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_n & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \\ \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} & \frac{\nu\rho_m}{1-\nu} & \frac{\nu\rho_n}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu\rho_m}{1-\nu} & \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\rho_m^2}{1-\nu} + \frac{\rho_n^2}{2} \right) & \frac{E\rho_m\rho_n}{2(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu\rho_n}{1-\nu} & \frac{E\rho_m\rho_n}{2(1-\nu)} & \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\rho_m^2}{2} + \frac{\rho_n^2}{1-\nu} \right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{H_1} = \exp \left[\int_{z_1}^{z_2} G_H dz \right], M_F = \exp \left[\int_{z_2}^{z_3} G_F dz \right], M_{H_2} = \exp \left[\int_{z_3}^{z_4} G_H dz \right], M_{F_1} = \exp \left[\int_{z_1}^{z_2} G_F dz \right], M_H = \exp \left[\int_{z_2}^{z_3} G_H dz \right], M_{F_2} = \exp \left[\int_{z_3}^{z_4} G_F dz \right]$$

[6] R. Vaghefi, G. H. Baradaran, and H. Koohkan, Three-dimensional static analysis of thick functionally graded plates by using meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 34, No. 6, pp. 564–573, Jun. 2010.

[7] H. H. Abdelaziz, H. A. Atmane, I. Mechab, L. Boumia, A. Tounsi, and A. B. E. Abbas, Static Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates Using an Efficient and Simple Refined Theory, *Chin. Journal Aeronaut.*, Vol. 24, No. 4, pp. 434–448, Aug. 2011.

[8] S. Natarajan and G. Manickam, Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 57, pp. 32–42, Sep. 2012.

[9] S. M. R. Khalili and Y. Mohammadi, Free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets and temperature-dependent material properties: A new approach, *European Journal of Mechanics A Solids*, Vol. 35, pp. 61–74, Sep. 2012.

[10] Sh. Hosseini-Hashemi, H.Akhavan, M.Fadaee, Exact closed-form free vibration analysis of moderately thick rectangular functionally graded plates with two bonded piezoelectric layers, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 3, pp. 57–74, Oct. 2011 (In Persian).

- مراجع

[1] Y. Watanabe, Y. Nakamura, Y. Fukui, and K. Nakanishi, A magnetic-functionally graded material manufactured with deformation-induced martensitic transformation, *Journal of Material and Science. Lett.*, Vol. 12, No. 5, pp. 326–328, Mar. 1993.

[2] J. Reddy and Z. Q. Cheng, Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *European Journal of Mechanics A Solids*, Vol. 20, No. 5, pp. 841–855, Sep. 2001.

[3] A. M. Zenkour, A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2—Buckling and free vibration, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, No. 18–19, pp. 5243–5258, Sep. 2005.

[4] Q. Li, V. P. Lu, and K. P. Kou, Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 311, No. 1–2, pp. 498–515, Mar. 2008.

[5] S. Brischetto, Classical and mixed advanced models for sandwich plates embedding functionally graded cores, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 4, No. 1, pp. 13–33, 2009.

- [15] A. M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C. M. C. Roque, R. M. N. Jorge, and C. M. M. Soares, Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 44, No. 1, pp. 657–674, Jan. 2013.
- [16] S. S. Akavci, An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation, *Composite Structures*, Vol. 108, pp. 667–676, Feb. 2014.
- [17] A. Alibeigloo, Three-dimensional thermo-elasticity solution of sandwich cylindrical panel with functionally graded core, *Composite Structures*, Vol. 107, pp. 458–468, Jan. 2014.
- [18] G. Jin, Z. Su, S. Shi, T. Ye, and S. Gao, Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions, *Composite Structures*, Vol. 108, pp. 565–577, Feb. 2014.
- [11] Sh. Hosseini-Hashemi, K. Khorami, Analysis of Free Vibrations of Moderately Thick Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials Using Differential Quadrature Method, *Modares Mechanical Engineering* Vol. 11, No. 2, pp. 93–106, Sep. 2011 (In Persian).
- [12] A. Hamidi, M. Zidi, M. S. A. Houari, and A. Tounsi, A new four variable refined plate theory for bending response of functionally graded sandwich plates under thermomechanical loading, *Composites Part B: Engineering*, Apr. 2012.
- [13] M. N. A. Gulshan Taj, A. Chakrabarti, and A. H. Sheikh, Analysis of functionally graded plates using higher order shear deformation theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 18–19, pp. 8484–8494, Oct. 2013.
- [14] GH. Rahimi, H. Toorani, M.S. Gazor, Analysis vibrations of two-direction functionally graded beam with integrated piezoelectric layers on resting elastic foundation using differential quadrature, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 9, pp. 58–68, Oct. 2013 (In Persian).