



تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد ایزوژئومتریک ورق‌های چندلایه کامپوزیتی پوشیده شده از پیزوالکتریک با استفاده از نظریه رایزنر- میندلین

سجاد نیکویی¹، بهروز حسنی^{2*}

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* مشهد، صندوق پستی 91775-1111، b_hassani@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 21 تیر 1396

پذیرش: 11 مهر 1396

ارائه در سایت: 27 آبان 1396

کلید واژگان:

تحلیل ایزوژئومتریک

ورق‌ها

کامپوزیت

پیزوالکتریک

چکیده

در این مقاله روش عددی جدیدی بر اساس تحلیل ایزوژئومتریک برای تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیتی چندلایه پوشیده شده با مواد هوشمند پیزوالکتریک با استفاده از نظریه رایزنر- میندلین ارائه شده و دقت و کارایی آن مورد بررسی قرار گرفته است. هدف از تحلیل ایزوژئومتریک ساده‌سازی طراحی هندسه و تحلیل مهندسی به کمک کامپیوتر با استفاده از توابعی است که به توصیف هندسه و در عین حال مجهولات می‌پردازند. در اینجا از روش ایزوژئومتریک با توابع پایه غیریکنواخت کسری بی-اسپلاین (نرین) از مرتبه‌های دو، سه و چهار برای تعریف هندسه مسئله و نیز تقریب‌زدن متغیرهای مجهول استفاده شده است. با توجه به استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول رایزنر- میندلین برای میدان جابه‌جایی، پیوستگی C^0 در اینجا کافی می‌باشد که توابع پایه نرین این پیوستگی را تأمین می‌نمایند. همچنین فرض شده است که پتانسیل الکتریکی لایه‌های پیزوالکتریک در راستای ضخامت به صورت خطی تغییر کنند. برای کاهش تأثیر پدیده قفل‌شدگی برشی در روابط سختی از روش بهبود پایداری استفاده شده است. از آنجا که بررسی کارایی و دقت روش ایزوژئومتریک در حل ورق‌های چندلایه کامپوزیتی پیزوالکتریک جزو اهداف اصلی این مقاله است، مثال‌های متعدد عددی آورده شده و با سایر منابع موجود مقایسه گردیده است. نتایج بدست آمده مؤید دقت مطلوب و کارایی روش پیشنهادی است.

Static and free vibration isogeometric analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric using Reissner–Mindlin theory

Sajjad Nikoei¹, Behrooz Hassani^{2*}

1- Department of Aerospace Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

* P.O.B. 91775-1111 Mashhad, Iran, b_hassani@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 12 July 2017

Accepted 03 October 2017

Available Online 18 November 2017

Keywords:

Isogeometric analysis

Plates

Composite

Piezoelectric

ABSTRACT

This paper presents an isogeometric analysis approach for static and free vibration analysis of laminated composite plates covered with piezoelectric layers using the Reissner–Mindlin theory. Isogeometric analysis (IGA) aims at simplifying the Computer Aided Design (CAD) and Computer Aided Engineering (CAE) by using the functions describe the geometry (CAD) and the unknown fields (Analysis). The isogeometric approach has here been employed that utilizes the Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) of quadratic, cubic and quartic orders to approximate the variables defining geometry as well as the unknown functions. Using the Reissner–Mindlin first order shear deformation theory requires the C^0 -continuity of generalized displacements and the NURBS basis functions are well suited for this purpose. The electric potential is assumed to vary linearly through the thickness for each piezoelectric sublayer. To alleviate the shear locking problem, a stabilization technique is employed in the stiffness formulation. Since study of the performance and accuracy of IGA in solving laminated composite plates is one of the main objectives of this article. Several numerical examples are presented and compared with those available in the literature. The obtained results indicate desirable accuracy and efficiency of the proposed approach.

1- مقدمه

می‌توان به جواب آن‌ها اعتماد کرد. معادله دیفرانسیل حاکم از اصول پایه مکانیک حاصل می‌شود و بایستی در یک دامنه فیزیکی با شرایط مرزی مشخص حل شود. روش‌های مختلفی از قبیل تفاضل محدود، حجم محدود، روش‌های بدون

برای تحلیل مسائل مهندسی سازه با کمک رایانه، مهم‌ترین و اولین قدم ارائه و گسترش الگوریتم‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیلی حاکم است. این حل‌ها شاید جواب دقیقی از مسئله ارائه ندهند ولی تا حد قابل قبولی

Please cite this article using:

S. Nikoei, B. Hassani, Static and free vibration isogeometric analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric using Reissner–Mindlin theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 11, pp. 181-191, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

ایزوژئومتریکی پژوهش‌هایی صورت گرفته است. شجاعی و همکاران [5] تحلیل ارتعاش آزاد و کماتش را بر روی ورق انجام دادند. کاپور [6] مطالعات خود را به تحلیل غیرخطی هندسی ورق‌های کامپوزیتی معطوف کرد. تحلیل ورق‌های ساندویچی با استفاده از نظریه مرتبه بالا توسط نگوین و همکاران [7] صورت گرفت. تای و همکاران [8] همان تحلیل، ولی این بار با استفاده از نظریه لایه‌ای^۸ را بر روی ورق‌ها انجام دادند. همچنین انصاری و همکاران [9] اثرات سطح را بر روی رفتار کماتش نانو ورق‌های از جنس مواد تابعی^۹ با استفاده از این روش بررسی کردند. انصاری و همکاران [10] در کار دیگری از تئوری گرادیان کرنش میندلین برای نانو پوسته‌های مواد تابعی بهره جستند. فرزامراد و همکاران [11] از این روش و تئوری تغییرشکل برشی شبه سه‌بعدی برای ورق‌های از جنس مواد تابعی استفاده نمودند.

در بسیاری از مجامع ملی و بین‌المللی، تحولات اساسی در راستای سازه‌های پیشرفته‌ای همچون اتومبیل‌ها، کشتی‌ها، فضاپیماها و علوم فضایی به وجود آمده است که به نام سازه‌های هوشمند^{۱۰} شناخته می‌شوند. بحث معرفی سازه‌های هوشمند بعد از دهه هفتاد میلادی بسیار داغ شد. پژوهش بر روی پیش‌بینی خواص مؤثر و پاسخ کامپوزیت‌های هوشمند می‌تواند به دو روش تحلیلی و عددی صورت گیرد. روش تحلیل مشکلات و محدودیت‌های بسیاری دارد. از این رو محققین مجبور به استفاده از روش‌های عددی مانند روش اجزای محدود کلاسیک شده‌اند. روش عددی که به تازگی مورد توجه محققین این عرصه قرار گرفته است، روش تحلیل ایزوژئومتریکی^{۱۱} است.

لیو و همکاران [12] با استفاده از نظریه مرتبه اول برشی، روش گلرکین بدون المان را برای تیرها و ورق‌های کامپوزیتی چندلایه با وصله‌های پیروالکتریک به کار برد. میلزو و اورلاندو [13] تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیتی چندلایه ضخیم هوشمند را بررسی کردند.

در این پژوهش، به بررسی کارایی و دقت روش تحلیل ایزوژئومتریکی در حل ورق‌های چندلایه کامپوزیتی پیروالکتریک^{۱۲} پرداخته شده است. استفاده از این روش، که بر مبنای توابع پایه نربز استوار است، کار را برای توصیف متغیرها و تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد سازه‌های ورقی چندلایه کامپوزیتی رایزنر- میندلین به همراه لایه‌های پیروالکتریک هموار نموده است. برای نشان دادن دقت و کارایی این روش، مثال‌های متعدد عددی آورده شده و با سایر منابع موجود مقایسه گردیده است. نتایج بدست آمده مؤید دقت مطلوب و کارایی روش پیشنهادی است.

2- سطوح نربز

برای بیان توابع پایه بی- اسپلین و نربز نیاز به بیان فضای پارامتریک است. یک سطح نربز که در جهت ξ از درجه p و در جهت η از درجه q باشد، به صورت رابطه (1) بیان می‌شود [14]:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (1)$$

که در آن $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی می‌باشد که در دو جهت تعریف شده است. همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}\}$ توابع پایه بی- اسپلین می‌باشند که بر روی بردارهای گرهی تعریف شده‌اند. اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره‌ها باشند، آن‌گاه می‌توان رابطه $m = n + p + 1$ را برای آن‌ها نوشت. به علاوه اگر در رابطه (1) تابع

شبکه، روش المان محدود و... برای حل عددی معادلات دیفرانسیل ارائه شده است که اغلب آن‌ها در حوزه مهندسی به کار گرفته شده‌اند. از بین این روش‌ها، روش المان محدود مورد توجه محققان زیادی قرار گرفت.

در روش المان محدود دامنه‌ی مسئله با المان‌هایی گسسته‌سازی می‌شود. هندسه‌ی هر المان تابعی از مختصات گره‌های آن و نوع توابع پایه انتخابی است. با به‌کارگیری اصل ایزوپارامتریک، توابع شکل یکسانی برای تقریب هندسه و فیزیک مسئله استفاده می‌شوند. استفاده از این نوع المان‌ها با توابع پایه چندجمله‌ای بیشترین استفاده را در کدهای تحلیلی المان محدود دارد، به طوری که واژه‌ی "المان محدود کلاسیک" به این نوع تحلیل اطلاق می‌شود. در سال‌های اخیر به علت استفاده گسترده از توابع پایه نربز در نرم‌افزارهای طراحی به کمک کامپیوتر کوشش‌هایی توسط هیوز و همکارانش صورت پذیرفت تا از این توابع در تقریب فیزیک مسئله نیز استفاده شود [1]. با جایگزینی این توابع به جای توابع کلاسیک چندجمله‌ای در تحلیل المان محدود به نوآوری‌ها و دستاوردهای زیادی منجر شد و نام "ایزوژئومتریکی" بر آن نهاده شد. هدف از تحلیل ایزوژئومتریکی ساده‌سازی طراحی هندسه و تحلیل مهندسی به کمک کامپیوتر با استفاده از توابعی است که به توصیف هندسه و در عین حال مجهولات می‌پردازند.

توانایی توابع نربز در ایجاد پیوستگی مرتبه‌ی بالاتر از صفر در مرز المان‌ها اصلی‌ترین ویژگی آن‌ها است. این ویژگی سبب تولید هندسه‌های دقیق‌تر با توابع شکل نربز می‌شود؛ در نتیجه با استفاده از روش ایزوپارامتریک^۱ می‌توان به جواب‌های دقیق‌تری برای فیزیک مسئله رسید.

پس از ارائه روش ایزوژئومتریکی تحقیقات وسیعی برای استفاده از آن در تحلیل‌های مکانیکی صورت پذیرفت. کوتزل و همکاران از آن در تحلیل ارتعاشات سازه‌ها استفاده کردند و نشان دادند استفاده از ایزوژئومتریکی خطای کمتری در تخمین فرکانس‌ها دارد [2]. بازیلو و همکاران به تحلیل ایزوژئومتریکی در برخورد سازه- سیال پرداختند [3]. حسینی و همکارانش از آن در بهینه‌سازی شکل بهره بردند [4].

کامپوزیت^۲ یا مواد مرکب ترکیب فیزیکی از دو یا چند ماده مختلف است که این مواد خصوصیات فیزیکی و شیمیایی خود را حفظ کرده و مرز مشخصی را با یکدیگر تشکیل می‌دهند. این ترکیب در مجموع و با توجه به برخی معیارها، خواص بهتری نظیر سختی، خواص گرمایی، عمر خستگی و ... را از هر یک از اجزای تشکیل‌دهنده خود را دارا می‌باشد.

چندین روش برای مدل‌سازی ورق‌های کامپوزیتی موجود است. یکی از مشهورترین این روش‌ها نظریه تک‌لایه معادل^۳ است که نظریه‌های کلاسیک^۴، تغییر شکل برشی مرتبه اول^۵ و تغییر شکل برشی مرتبه بالا^۶ را شامل می‌شود. نظریه مرتبه اول برشی ساده بود و نسبت به نظریه کلاسیک به علت شامل شدن کرنش‌های برشی عرضی، مناسب‌تر است. همچنین هزینه محاسباتی نظریه مرتبه اول از نظریه مرتبه بالاتر کمتر و به صرفه است. این نظریه که معروف به نظریه رایزنر- میندلین است در اجزای محدود نیاز به پیوستگی C^0 دارد.

بررسی ورق‌ها و پوسته‌های^۷ چندلایه به صورت تحلیلی و دقیق، چندان آسان نیست و عموماً از روش‌های عددی مانند تحلیل اجزای محدود و ایزوژئومتریکی استفاده می‌شود. در حوزه تحلیل ورق‌ها با استفاده از روش

¹ Isoparametric

² Composite

³ Equivalent Single-Layer (ESL)

⁴ Classical Laminated Plate Theory (CLT)

⁵ First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)

⁶ High-Order Shear Deformation Theory (HSDT)

⁷ Shells

⁸ Layerwise

⁹ Functionally Graded Material (FGM)

¹⁰ Smart Structures

¹¹ Isogeometric Analysis

¹² Piezoelectric

بردار کرنش های درون صفحه $\epsilon_p = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T$ از رابطه (9) حاصل می شوند:

$$\epsilon_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \epsilon_m + z\epsilon_b \quad (9)$$

بردار کرنش برشی عرضی $\epsilon_s = [\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T$ نیز با رابطه (10) بدست می آید:

$$\epsilon_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \beta_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

معادله k امین لایه اورتوتروپیک در دستگاه مختصات محلی ورق چندلایه کامپوزیتی، با استفاده از قانون هوک و فرض تنش مسطح به صورت رابطه (11) نوشته می شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{54} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (11)$$

که ثابت های خواص مواد اورتوتروپیک به صورت روابط (12) می باشند:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{44} = G_{23} \quad (12)$$

که در آن E_1 و E_2 ضرایب الاستیک در جهات اصلی مصالح، G_{ij} مدول های برشی و ν_{ij} ضرایب پواسون هستند.

کامپوزیت های چندلایه ای معمولاً از چندین لایه اورتوتروپیک با جهات الیاف مختلف ساخته می شوند. رابطه تنش-کرنش برای k امین لایه اورتوتروپیک در دستگاه مختصات کلی به صورت رابطه (13) می باشد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{54} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (13)$$

که \bar{Q}_{ij} ثابت های انتقال یافته مواد از k امین لایه به دستگاه مختصات سراسری هستند.

با توجه به قانون هوک و کرنش های خطی مطابق روابط (9) و (10) رابطه (14) حاصل می گردد:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_p \\ \epsilon_s \end{bmatrix} = c\epsilon \quad (14)$$

که σ_p و τ مؤلفه های تنش درون صفحه ای و تنش برشی و D و D^s نیز ماتریس های ثابت مواد هستند. D و مؤلفه هایش به صورت رابطه (15) و (16) خواهند بود:

$$D = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D^b \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}^b) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (16)$$

مؤلفه های D^s نیز به صورت رابطه (17) بدست می آیند:

$$D_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz \quad i, j = 4, 5 \quad (17)$$

پایه ای نسبی تکه ای را به صورت رابطه (2) تعریف شود:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l}} \quad (2)$$

رابطه (3) بدست خواهد آمد:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta)P_{i,j} \quad (3)$$

که یک سطح تولید شده با استفاده از ابزار نرئز است.

3- معادلات حاکم بر ورق های کامپوزیتی پیزوالکتریک

در این بخش، معادلات حاکم بر ورق های کامپوزیتی پیزوالکتریک و شکل ضعیف از معادلات دیفرانسیل حاکم بر اساس نظریه رایزنر- میندلین بیان می شود. فرض می شود که لایه ها کاملاً بهم چسبیده، الاستیک و اورتوتروپیک با مقدار جابه جایی و کرنش کوچک باشند. بر اساس این فرضیات، روابط خطی حاکم بر ورق های کامپوزیتی پیزوالکتریک را می توان برای تحلیل های استاتیکی و دینامیکی به کار برد.

3-1- معادلات حاکم بر پیزوالکتریک خطی

معادلات خطی حاکم بر پیزوالکتریک به صورت رابطه (4) استخراج می شود [15]:

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -e^T \\ e & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ E \end{bmatrix} \quad (4)$$

که σ و E بردارهای تنش و کرنش هستند؛ D و E بردارهای جابه جایی دی الکتریک و میدان الکتریکی هستند. c ماتریس الاستیسیته، e ماتریس ثوابت پیزوالکتریک و g ماتریس ثابت دی الکتریک است. به علاوه فرض می شود که میدان الکتریکی از تغییرات تابع پتانسیل الکتریکی بدست می آید: $E = -\nabla\psi$ (5)

3-2- شکل ضعیف

شکل ضعیف معادلات حاکم بر سازه های پیزوالکتریک با استفاده از اصل همیلتون به صورت رابطه (6) نوشته می شود [15]:

$$\delta L = 0 \quad (6)$$

که L تابع انرژی کلی است و شامل مجموع انرژی های جنبشی، کرنشی، دی الکتریک و کار خارجی است و به صورت رابطه (7) بسط داده می شود:

$$L = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}^T \dot{u} - \frac{1}{2} \sigma^T \epsilon + \frac{1}{2} D^T E + u f_s - \psi q_s \right) d\Omega + \sum u^T F_p - \sum \psi Q_p \quad (7)$$

که ρ چگالی جرم، u و \dot{u} جابه جایی مکانیکی و سرعت، ψ پتانسیل الکتریکی، f_s و Q_p نیروهای سطحی و نقطه ای مکانیکی و q_s و Q_p بارهای سطحی و نقطه ای الکتریکی هستند.

در رابطه (7) میدان جابه جایی مکانیکی u و میدان پتانسیل الکتریکی ψ توابع مجهول هستند که باید با تقریب های مناسب بدست آیند.

3-3- معادلات حاکم نظریه رایزنر- میندلین

بر اساس نظریه رایزنر- میندلین که یک نظریه مرتبه اول برشی است، میدان جابه جایی برای یک نقطه اختیاری در ورق به صورت رابطه (8) نوشته می شود:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (8)$$

4-3- تقریب‌سازی روابط ورق کامپوزیتی بر اساس نریزها

برای تقریب میدان جابه‌جایی u در روش ایزوژنومتریک از توابع پایه نریز استفاده می‌شود:

$$u^h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) q_i \quad (18)$$

که در آن $q_i = [u_i \ v_i \ w_i \ \beta_{xi} \ \beta_{yi}]^T$ بردار درجات آزادی برای نقطه کنترلی i است. کرنش‌های غشایی، خمشی و برشی با استفاده از این رابطه و تعاریف قبلی به صورت رابطه (19) نوشته می‌شوند:

$$\varepsilon_m = \sum_{i=1}^n B_i^m q_i, \varepsilon_b = \sum_{i=1}^n B_i^b q_i, \varepsilon_s = \sum_{i=1}^n B_i^s q_i \quad (19)$$

که در آن

$$B_i^m = \begin{bmatrix} R_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,y} & 0 & 0 & 0 \\ R_{i,y} & R_{i,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & R_{i,y} & R_{i,x} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

در تحلیل استاتیکی ورق کامپوزیتی رایزنر-میندلین بدون در نظر گرفتن لایه‌های پیزوالکتریک به رابطه (21) منجر می‌شود:

$$Kq = f \quad (21)$$

همچنین، برای تحلیل ارتعاش آزاد آن می‌توان نوشت:

$$(K - \omega^2 M)q = 0 \quad (22)$$

که در آن K ماتریس سختی کلی ورق،

$$K = \int_{\Omega} (B^m)^T A B^m d\Omega + \int_{\Omega} (B^m)^T B B^b d\Omega + \int_{\Omega} (B^b)^T B B^m d\Omega + \int_{\Omega} (B^b)^T D^b B^b d\Omega + \int_{\Omega} (B^s)^T D^s B^s d\Omega \quad (23)$$

f بردار نیرو،

$$f = \int_{\Omega} q_0 R d\Omega + f^b \quad (24)$$

و M ماتریس کلی جرم است

$$M = \int_{\Omega} R^T m R d\Omega \quad (25)$$

که در رابطه (25) m ماتریس جرم بوده و به صورت رابطه (26) تعریف

می‌شود:

$$m = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (26)$$

در روابط بالا ρ ، h و ω به ترتیب چگالی، ضخامت و فرکانس طبیعی هستند.

3-5- بهبود ترم برشی

قفل‌شدگی برشی یک پدیده شناخته شده در روش اجزای محدود با المانهای مرتبه پایین است. این نقص برای توابع شکل با درجات 5 و بالاتر از بین

می‌رود [16]. همانند اجزای محدود، برای توابع پایه نریز با درجات 2، 3 و 4، زمانی که ورق خیلی نازک است، قفل‌شدگی رخ می‌دهد. این اتفاق به دلیل باقی‌ماندن اثرات برشی در رابطه سختی است. برای فائق آمدن بر این مشکل، در اینجا از روش بهبود پایداری ارائه شده توسط لایلی [16] استفاده شده است. روند کار بدین صورت است که بخش برش در رابطه (17) توسط رابطه (27) تصحیح می‌شود:

$$\bar{D}^s = D^s \frac{h^2}{\beta l(h+l)} \quad (27)$$

که در آن l طول بلندترین وصله به کار رفته در مدل نریز و β یک مقدار ثابت مثبت در نظر گرفته می‌شود که از آزمایش عددی بدست می‌آید. با جایگذاری \bar{D}^s در رابطه (23) به جای D^s مقدار سختی K بهبود خواهد یافت.

3-6- روابط ورق کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک

در اینجا نوبت به بیان روابط ورق کامپوزیتی پوشیده شده با لایه‌های پیزوالکتریک رسیده است. در ابتدای امر، میدان پتانسیل الکتریکی را باید با تقریبی مناسب بیان نمود. میدان پتانسیل الکتریکی با جداسازی هر لایه پیزوالکتریک به زیرلایه‌هایی در راستای ضخامت تقریب زده می‌شود. با فرض خطی بودن تغییرات تابع پتانسیل الکتریکی در هر زیرلایه می‌توان نوشت:

$$\psi^i(z) = N_i^{\psi} \psi^i \quad (28)$$

که N_i^{ψ} بردار توابع پایه برای پتانسیل الکتریکی است که در آن $p = 1$ است. ψ^i بردار پتانسیل‌های الکتریکی سطوح بالایی و پایینی آمین زیرلایه است.

برای هر المان زیرلایه، میدان الکتریکی E که در رابطه (5) بیان شد، می‌تواند به صورت رابطه (29) بازنویسی شود:

$$E = -\nabla N_i^{\psi} \psi^i = -B_i^{\psi} \psi^i \quad (29)$$

برای انواع مواد پیزوالکتریک بررسی شده در این پژوهش، نیاز است تا ماتریس ثابت پیزوالکتریک e و ماتریس ثابت دی‌الکتریک g برای آمین لایه اورتوتروپیک در دستگاه مختصات محلی به صورت رابطه (30) بیان شود:

$$e^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \quad (30)$$

$$g^{(k)} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix}^{(k)}$$

معمولاً چندلایه‌ها از چندین لایه اورتوتروپیک با جهت الیاف مختلف ساخته شده‌اند و به تبع آن، جهت‌های مشخصه متفاوتی برای خواص دی‌الکتریک و پیزوالکتریک وجود دارد. پس ماتریس ثوابت پیزوالکتریک و دی‌الکتریک برای آمین تک‌لایه اورتوتروپیک در دستگاه مختصات کلی به صورت رابطه (31) بیان می‌شود:

$$e^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{d}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{d}_{15} & 0 & 0 \\ \bar{d}_{31} & \bar{d}_{32} & \bar{d}_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \quad (31)$$

$$g^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}_{33} \end{bmatrix}^{(k)}$$

که \bar{d}_{ij} و \bar{p}_{ij} ثابت‌های مواد انتقال‌یافته از آمین تک‌لایه است و مشابه \bar{Q}_{ij} محاسبه می‌شوند.

3-7- معادله حرکت

برای بدست آوردن معادله حرکت کافی است تا روابط (14) و (29) را در

(12) جایگذاری نمود، که در نهایت به شکل رابطه (32) در خواهد آمد:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\psi} \\ K_{\psi u} & K_{\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (32)$$

که در آن

$$K_{uu} = \int_{\Omega} B_u^T c B_u d\Omega, K_{u\psi} = \int_{\Omega} B_u^T c B_{\psi} d\Omega \\ K_{\psi\psi} = - \int_{\Omega} B_{\psi}^T p B_{\psi} d\Omega, M_{uu} = \int_{\Omega} N^T m N d\Omega \quad (33)$$

می باشد و $B_u = [B^m \ B^b \ B^s]$ نیز همان رابطه (20) است.

با جایگزین کردن سطر دوم رابطه (32) در سطر اول آن، رابطه (34)

به صورت زیر بدست می آید:

$$M\ddot{q} + (K_{uu} + K_{u\psi}K_{\psi\psi}^{-1}K_{\psi u})q = F + K_{u\psi}K_{\psi\psi}^{-1}Q \quad (34)$$

رابطه (34) معادله حاکم بر مسئله است و برای حل آن در تحلیل های

استاتیکی و ارتعاش آزاد ورق از روش عددی تحلیل ایزوژئومتریک بیان شده، استفاده می گردد.

4- نتایج عددی

در این بخش، برای ارزیابی روش ایزوژئومتریک به بررسی مثال های عددی مختلفی پیرامون ورق ها پرداخته شده است. در این مثال ها، که نتایج تحلیل های استاتیکی و ارتعاش آزاد برای ورق های ایزوتروپیک، کامپوزیتی و کامپوزیتی به همراه لایه های پیزوالکتریک است، با روش های دیگر مقایسه و دقت و پایداری تحلیل به روش ایزوژئومتریک نشان داده شده است.

4-1- ورق ایزوتروپیک

در مثال اول، به تحلیل استاتیکی ورق مربع شکل (به طول a و ضخامت h) با شرایط مرزی ساده و گیردار تحت بار یکنواخت $q_0 = 1$ پرداخته می شود. پارامترهای مواد استفاده شده برای این ورق عبارتند از: مدول یانگ $E = 1092000$ ، نسبت پواسون $\nu = 0.3$ و نسبت طول به ضخامت $a/h = 100$. این بررسی با تعداد 6، 10، 18 و 34 نقطه کنترلی در هر لایه ورق صورت گرفته است.

در این مثال از المان های درجه دو، سه و چهار نربز استفاده شده است که مقایسه این المان ها بر اساس تعداد نقاط کنترلی در هر شبکه در شکل 1 نشان داده شده است. در شکل 2 تغییرشکل نرمال شده برای مرکز ورق با تکیه گاه ساده و گیردار نشان داده شده است. نتایج این مثال با حل دقیق [17] مقایسه شده است. همان طور که مشاهده می شود المان های درجه 3 و 4 نتایج دقیق تری ارائه می دهند. همچنین در المان های مرتبه دو مقدار کمی از قفل شدگی برشی مشاهده می شود.

در مثال دوم، عملکرد المان ها را هنگامی که ورق خیلی نازک می شود، مورد بررسی قرار می گیرد. به صورت نظری با افزایش نسبت طول به ضخامت (a/h) اثرات برش کاهش پیدا کرده و جواب های نظریه رایزنر- میندلین به روش کیرشهف نزدیک می شود. در شکل 3 تغییر شکل مرکز ورق با تغییر نسبت a/h نشان داده شده است. در اینجا هم از روش انتگرال کامل و هم از بهبود پایداری استفاده شده است. همان طور که مشاهده می شود المان های نربز زمانی که ورق نازک می شود ($a/h \geq 100$) دچار قفل شدگی برشی می شوند که برای رفع آن از روش بهبود پایداری استفاده شده است.

در مثال سوم، عملکرد روش پیشنهاد شده را برای تحلیل استاتیکی ورق های ایزوتروپیک مورد بررسی قرار گرفته است. در اینجا ورق مربعی با طول a ، ضخامت h و شرایط مرزی ساده تحت بارگذاری یکنواخت در نظر

گرفته می شود. نسبت طول به عرض را ($a/b = 1$) فرض می شود. برای نسبت طول به ضخامت از مقادیر 10، 50، 100 استفاده می شود. همانند مثال های قبل، در این مثال نیز از مواد ایزوتروپیک استفاده می شود. ورق مربعی مورد نظر با استفاده از 35 نقطه کنترلی برای هر لایه مدول شده است. در ادامه این مثال به بررسی جابه جایی عرضی و گشتاور خمشی، که به صورت رابطه (35) بی بعد شده اند، پرداخته خواهد شد:

$$\bar{w} = (100Eh^3)w(a/2, b/2, 0)/q_0 a^4 \\ \bar{\sigma}_{xx} = h^2 \sigma_{xx}(a/2, b/2, h/2)/q_0 a^2 \quad (35)$$

نتایج حاصل از این روش با نتایج روش تای [18] که یک حل ایزوژئومتریک با توابع نربز مرتبه 4 و تغییر شکل برشی مرتبه بالا است و نیز حل دقیق [19] مقایسه شده است. همان طور که از جدول 1 مشاهده می شود، نتایج حاصل از این روش، علی رغم استفاده از نظریه مرتبه پایین تر، از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

در مثال چهارم، تحلیل ارتعاش آزاد ورق دایره ای گیردار ایزوتروپیک بررسی شده است. فرکانس طبیعی بی بعد شده این ورق به صورت $\bar{\omega} = \omega R^2 \sqrt{\rho h/D}$ است که در آن $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ سختی پیچشی است. هندسه ورق دایروی در شکل 4 نمایش داده شده است. خواص ماده استفاده شده در این تحلیل عبارتند از: مدول یانگ $E = 1$ ، مدول برشی $G = E/2(1+\nu)$ نسبت پواسون $\nu = 0.3$ و چگالی $\rho = 1$ است. این ورق با 19×19 نقطه کنترلی مدول سازی شده است. در اینجا به بررسی ورق نازک و ضخیم با نسبت شعاع بر ضخامت $R/h = 10, 100$ پرداخته می شود. نتایج حاصل از روش نربز با دو شبکه بندی مختلف با روش بدون مش که توسط فریرا و همکاران [20]، نتایج روش تای [18] و حل دقیق [21] مقایسه شده است. چهار فرکانس اول ورق دایروی ایزوتروپیک گیردار در جدول 2 نشان داده شده است. نتایج بدست آمده از روش حاضر تطابق خیلی خوبی با سایر روش ها دارد. همچنین شش شکل مود اول ورق دایروی ضخیم گیردار با المان مرتبه 3 در شکل 5 نمایش داده شده است.

4-2- ورق کامپوزیتی

در مثال پنجم، به تحلیل استاتیکی ورق مربعی چندلایه [0 90 90 0] تحت بار سینوسی q و شرایط مرزی ساده پرداخته خواهد شد (شکل 6). نسبت طول به عرض این ورق $a/b = 1$ و نسبت طول به ضخامت برابر با $a/h = 4, 10, 100$ است. این ورق با 34×34 نقطه کنترلی مدول شده است. ماده مرکب استفاده شده در این مثال به صورت رابطه (36) است:

$$E_1 = 25E_2; G_{12} = G_{13} = 0.5E_2; G_{23} = 0.2E_2; \\ \nu_{13} = 0.25 \quad (36)$$

نتایج حاصل از این مثال، در جدول 3 با نتایج حاصل از روش نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالای پیشنهادی ردی [22]، نتایج روش تای [23] و پژوهش ارائه شده توسط فریرا [24] که بر اساس روش کالوکیشن مرتبه بالا است مقایسه شده است. روش ارائه شده در اینجا تطابق قابل قبولی با سایر مقالات ارائه شده در این زمینه دارد.

جابه جایی مرکزی و تنش های بی بعد شده ورق مربعی چهار لایه [0 90 90 0] به صورت رابطه (37) بدست می آید:

$$\bar{w} = (100E_2h^3)w(a/2, b/2, 0)/q_0 a^4 \\ \bar{\sigma}_{xx} = h^2 \sigma_{xx}(a/2, b/2, h/2)/q_0 a^2 \\ \bar{\sigma}_{yy} = h^2 \sigma_{yy}(a/2, b/2, h/4)/q_0 a^2 \\ \bar{\sigma}_{xy} = h^2 \sigma_{xy}(0, 0, h/2)/q_0 a^2 \\ \bar{\sigma}_{xz} = h \sigma_{xz}(0, b/2, 0)/q_0 a \quad (37)$$

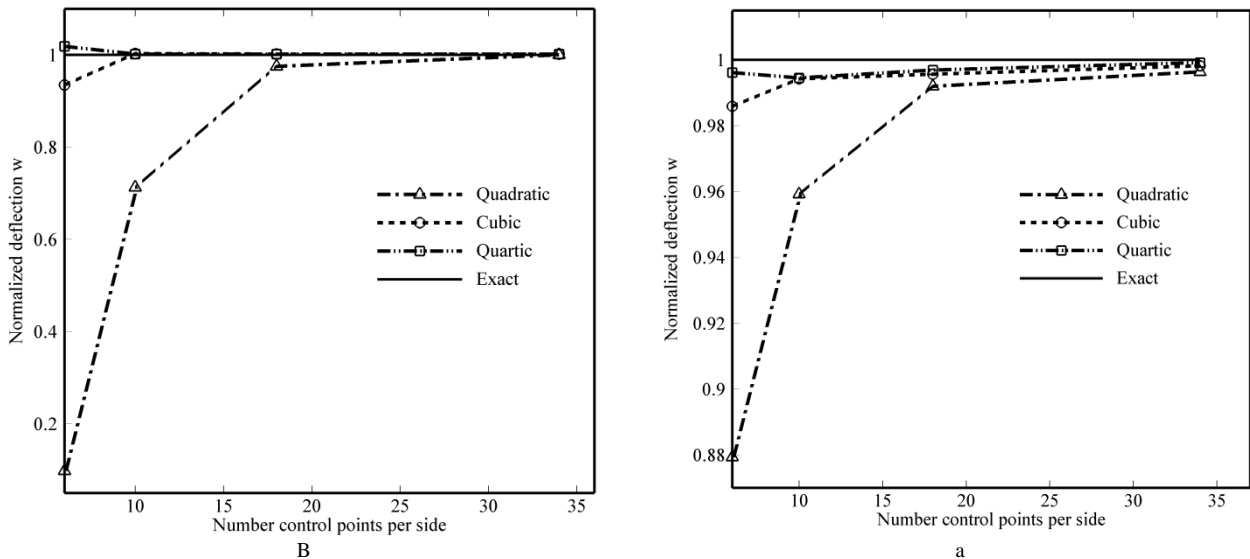


Fig. 1 Normalized deflection of isotropic plate subjected to uniform distributed load (a) Simply supported plate (b) Clamped plate

شکل 1 تغییر شکل بی بعد ورق ایزوتروپیک تحت بارگذاری یکنواخت با شرایط مرزی (a) ساده (b) گیردار

همانند مثال قبل است با این تفاوت که $E_1/E_2 = 10, 20, 30, 40$ می باشد. فرکانس بی بعد شده ورق مربعی چهارلایه $[0 \ 90 \ 90 \ 0]$ با استفاده از رابطه $\bar{\omega} = (\omega a^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$ بدست می آید.

در مثال هشتم، همانند مثال چهارم، به بررسی ورق دایروی گیردار می پردازد با این تفاوت که صفحه مورد بحث کامپوزیتی است و از چهارلایه $[\theta - \theta - \theta - \theta]$ با زاویه های $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ مورد مطالعه قرار می گیرند. هندسه ورق دایره ای مورد بحث در شکل 4 نمایش داده شده است. ماده مرکب استفاده شده در این مثال، همانند مثال ششم (رابطه (38)) است. فرکانس بی بعد شده ورق مربعی چهار لایه $[\theta - \theta - \theta - \theta]$ به صورت رابطه $\bar{\omega} = (\omega D^2/h)\sqrt{\rho/E_2}$ بدست می آید.

جدول 1 تنش و جابه جایی بی بعد ورق ایزوتروپیک تحت بارگذاری یکنواخت و شرایط مرزی ساده

Table 1 A non-dimensional stress and deflection of isotropic plate under uniform load and simply supported boundary conditions

$\bar{\sigma}_{xx}$	\bar{w}	روش	a/h
0.2779	4.8085	مرجع [18]	10
0.2762	4.7910	مرجع [19]	
0.2773	4.7853	مرتبه 2	
0.2773	4.7857	مرتبه 3	
0.2773	4.7857	مرتبه 4	50
0.2763	4.5959	مرجع [18]	
0.2762	4.5770	مرجع [19]	
0.2763	4.5715	مرتبه 2	
0.2763	4.5803	مرتبه 3	100
0.2763	4.5826	مرتبه 4	
0.2763	4.5892	مرجع [18]	
0.2762	4.5720	مرجع [19]	
0.2761	4.5826	مرتبه 2	100
0.2763	4.5926	مرتبه 3	
0.2764	4.5971	مرتبه 4	

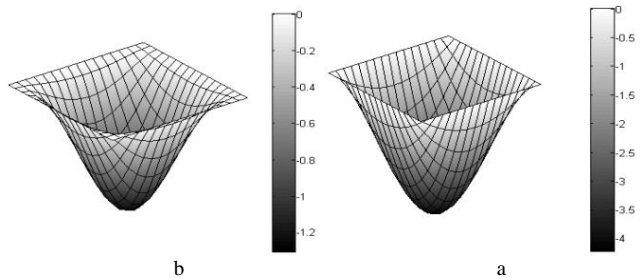


Fig. 2 Non-dimensional deflection of isotropic square plate subjected to uniform distributed load (a) Simply supported plate (b) Clamped plate

شکل 2 تغییر شکل بی بعد ورق مربعی ایزوتروپیک تحت بارگذاری یکنواخت با شرایط مرزی (a) ساده (b) گیردار

در مثال ششم، به بررسی ورق مربع سه لایه $[0 \ 90 \ 0]$ با شرایط مرزی گیردار و با نسبت $E_1/E_2 = 40$ پرداخته می شود. فرکانس های بی بعد ورق با استفاده از رابطه $\bar{\omega} = (\omega b^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D_0}$ بی بعد شده که در این رابطه $D_0 = E_2 h^3/12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$ است.

نسبت طول به عرض $a/b = 1$ و نسبت عرض به ضخامت برابر با $b/h = 5, 10, 100$ است. این ورق با 18×18 نقطه کنترلی مدل شده است. ماده مرکب استفاده شده در این مثال به صورت رابطه (38) است.

$$E_1 = 40E_2; G_{12} = G_{13} = 0.6E_2; G_{23} = 0.5E_2; \nu_{13} = 0.25; \rho = 1 \quad (38)$$

نتایج حاصل از روش حاضر با روش لیو [25] که بر اساس روش تغییر شکل برشی مرتبه اول، فریرا [24] و روش تای [23] مقایسه و در جدول 4 آمده است. در ادامه شش شکل مود اول ورق گیردار سه لایه $[0 \ 90 \ 0]$ با $b/h = 10$ در شکل 7 با استفاده از المان مرتبه 3 نمایش داده شده است.

در مثال هفتم، ارتعاش آزاد ورق مربعی چهارلایه $[0 \ 90 \ 90 \ 0]$ با شرایط مرزی ساده بررسی شده است. این در حالی است که ضخامت تمامی لایه ها را با هم برابر فرض می کنیم. نسبت طول به ضخامت $a/h = 5$ در نظر گرفته می شود. فرکانس اول نرمال شده در جدول 5 نمایش داده شده است. نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از حل دقیق با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا [26]، روش ایزوتروپیک تای با المان مرتبه 4 [23] و فریرا [24] مقایسه شده است. ماده مرکب استفاده شده در این مثال،

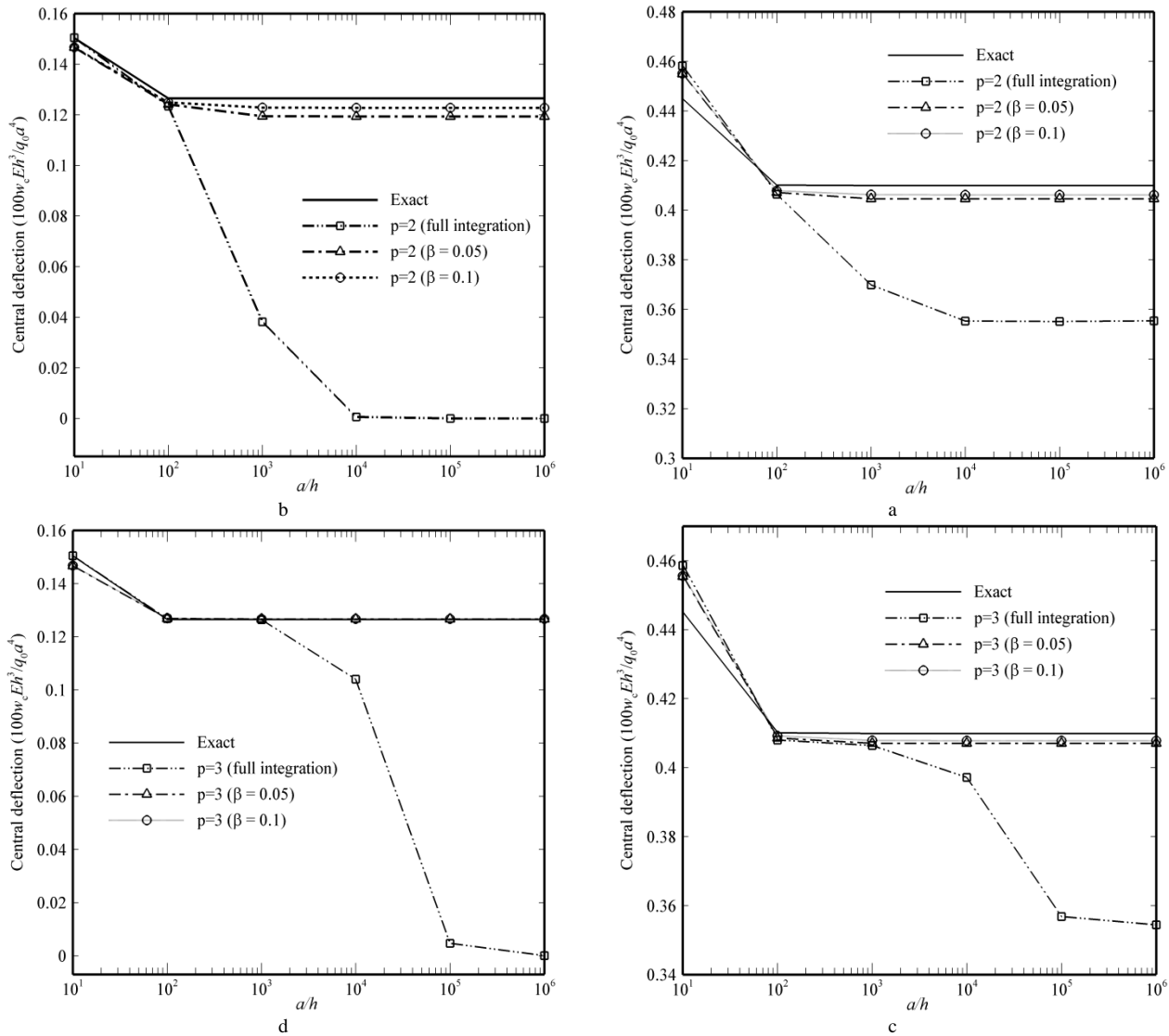


Fig. 3 Performance of present element with various a/h ratios of isotropic plates with various BCs (a) supported plate with $p=2$ (b) Clamped plate with $p=2$ (c) supported plate with $p=3$ (d) Clamped plate with $p=3$

شکل 3 عملکرد المان‌ها نسبت به تغییر a/h با شرایط مرزی مختلف در ورق ایزوتروپیک (a) ورق با تکیه‌گاه ساده و $p=2$ (b) ورق با تکیه‌گاه گیردار و $p=2$ (c) ورق با تکیه‌گاه ساده و $p=3$ (d) ورق با تکیه‌گاه گیردار و $p=3$

همان‌طور که از جدول 6 مشخص است نتایج حاصل از روش حاضر بسیار نزدیک به نتایج مراجع مربوطه است.

3-4- ورق کامپوزیتی دارای پیزوالکتریک

در مثال نهم، نوبت به تحلیل استاتیکی ورق مربعی کامپوزیتی پیزوالکتریک ($20\text{cm} \times 20\text{cm}$) تحت بارگذاری یکنواخت $q_0 = 100 \text{ N/m}^2$ رسیده است که شمایی از آن در شکل 8 نشان داده شده است. ورق مورد نظر به دو پیزوالکتریک سرامیکی در هر دو طرف بالا و پایین محدود می‌شود. این ورق شامل چهار لایه کامپوزیتی و دو لایه پیزوالکتریک است. ساختار بندی کامپوزیتی این ورق شامل $[\text{pie}/-\theta/\theta]_s$ و $[\text{pie}/-\theta/\theta]_{as}$ است. ضخامت هر لایه کامپوزیتی 1mm و ضخامت هر لایه پیزوالکتریک $\delta = 0.1\text{mm}$ است. ورق به ترتیب از مواد پیزوالکتریکی و کامپوزیتی T300/979 و PZT-G1195N ساخته شده و خواص آن‌ها در جدول 7 آمده است.

در جدول 8 جابه‌جایی مرکزی ورق کامپوزیتی پیزوالکتریکی تحت

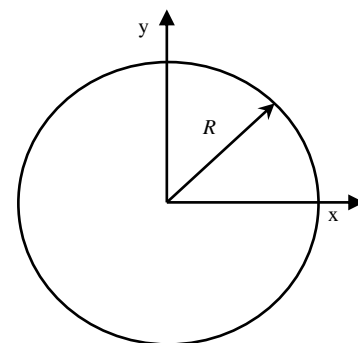


Fig. 4 Geometry of a circular isotropic plate

شکل 4 هندسه ورق دایروی ایزوتروپیک

در جدول 6 پنج فرکانس اول ورق دایروی با نسبت قطر به ضخامت $D/h = 10$ نمایش و با دو روش المان MISQ20 مرجع [27] که از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده کرده و همچنین، با روش اختلاف حداقل مربعات [28] که از همان نظریه استفاده نموده، مقایسه شده است.

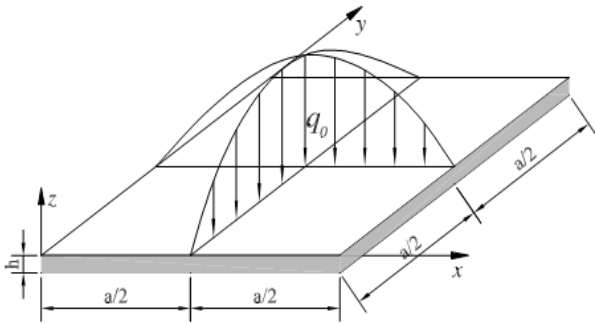


Fig. 6 Geometry of a square laminated plate under sinusoidal distributed load [18]

شکل 6 هندسه ورق چندلایه تحت بازگذاری سینوسی [18]

جدول 3 جابه‌جایی و تنش بی‌بعد ورق مربعی چندلایه [0 90 90 0] با شرایط مرزی ساده و بازگذاری سینوسی

Table 3 The normalized stress and displacement of a simply supported [0 90 90 0] square laminated plate under sinusoidal load

$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	\bar{w}	روش	a/h
0.2109	0.0450	0.6463	0.6806	1.8939	مرجع [22]	4
0.1399	0.0308	0.5758	0.4055	1.7164	مرجع [23]	
0.2686	0.0461	0.5764	0.4059	1.7095	مرجع [24]	
0.1514	0.0363	0.5859	0.3916	1.7084	مرتبۀ 2	
0.1519	0.0364	0.5862	0.3918	1.7119	مرتبۀ 3	10
0.1515	0.0364	0.5862	0.3917	1.7147	مرتبۀ 4	
0.2697	0.0273	0.3974	0.5589	0.7149	مرجع [22]	
0.1669	0.0242	0.3610	0.4983	0.6654	مرجع [23]	100
0.3181	0.0241	0.3614	0.4989	0.6627	مرجع [24]	
0.3160	0.0241	0.3616	0.5003	0.6642	مرتبۀ 2	
0.3137	0.0241	0.3615	0.5005	0.6655	مرتبۀ 3	
0.3153	0.0241	0.3617	0.5004	0.6666	مرتبۀ 4	100
0.2948	0.0217	0.2769	0.5507	0.4343	مرجع [22]	
0.1907	0.0213	0.2702	0.5376	0.4354	مرجع [23]	
0.3390	0.0213	0.2704	0.5381	0.4335	مرجع [24]	
0.1863	0.0211	0.2714	0.5363	0.4318	مرتبۀ 2	100
0.1874	0.0211	0.2712	0.5361	0.4327	مرتبۀ 3	
0.0211	0.0211	0.2714	0.5364	0.4334	مرتبۀ 4	

فرکانس‌های طبیعی ورق کامپوزیتی پیزوالکتریک پرداخته شده است. ورق مورد بررسی در این قسمت یک 5 لایه کامپوزیتی-پیزوالکتریک است که به صورت [pie/0/90/0/pie] لایه‌چینی شده است. این ورق با تیکه‌گاه ساده و نسبت ضخامت به طول $h/a = 1/50$ برای هر لایه کامپوزیتی و استفاده از ماده Gr/Ep مدل‌سازی شده است. برای لایه‌های پیزوالکتریک از جنس PZT-4 و ضخامت $0.1h$ برای هر دو لایه بالایی و پایینی استفاده شده است.

در جدول 9 فرکانس اول بی‌بعد ورق کامپوزیتی پیزوالکتریک با شبکه‌بندی 8×8 و المان‌های مرتبۀ 2، 3، 4 آمده است. فرکانس اول بی‌بعد شده از رابطه $\bar{\omega} = \omega_1 a^2 / (1000 h \sqrt{\rho})$ بدست می‌آید. فرکانس حاصل از روش حاضر با مراجع [31,30,15] مقایسه و همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج حاصل از دقت قابل قبولی برخوردار هستند.

بارگذاری یکنواخت و بدون ولتاژ ورودی با تیکه‌گاه ساده آمده است. این نتایج تطابق قابل قبولی با مراجع [29,15] دارند.

در مثال دهم، به بررسی دقت و تأثیر تحلیل ایزوژئومتریک بر روی

جدول 2 فرکانس‌های بی‌بعد ورق دایروی گیردار ایزوتروپیک ($\bar{\omega} = \omega R^2 \sqrt{\rho h/D}$)

Table 2 A non-dimensional frequency parameter $\bar{\omega} = \omega R^2 \sqrt{\rho h/D}$ of an isotropic clamped circular plate

R/h	روش	شبکه کنترلی	مودها			
			4	3	2	1
10	مرتبۀ 2	11×11	37.302	32.809	20.572	10.013
		19×19	36.511	32.231	20.188	9.943
	مرتبۀ 3	11×11	36.632	32.341	20.197	9.944
		19×19	36.511	32.231	20.188	9.943
100	مرتبۀ 4	11×11	36.521	32.239	20.188	9.943
		19×19	36.511	32.231	20.188	9.943
	مرجع [20]	-	36.665	32.353	20.194	9.931
		مرجع [18]	-	36.511	32.231	20.188
100	مرتبۀ 2	11×11	42.213	37.249	24.249	13.824
		19×19	39.813	34.868	21.257	10.213
	مرتبۀ 3	11×11	42.027	36.761	22.006	10.263
		19×19	39.734	34.847	21.248	10.213
100	مرتبۀ 4	11×11	40.364	34.995	21.281	10.214
		19×19	39.733	34.846	21.248	10.213
	مرجع [20]	-	40.290	35.255	21.448	10.266
	مرجع [18]	-	39.734	34.847	21.248	10.213
مرجع [21]	-	39.622	34.980	21.268	10.231	

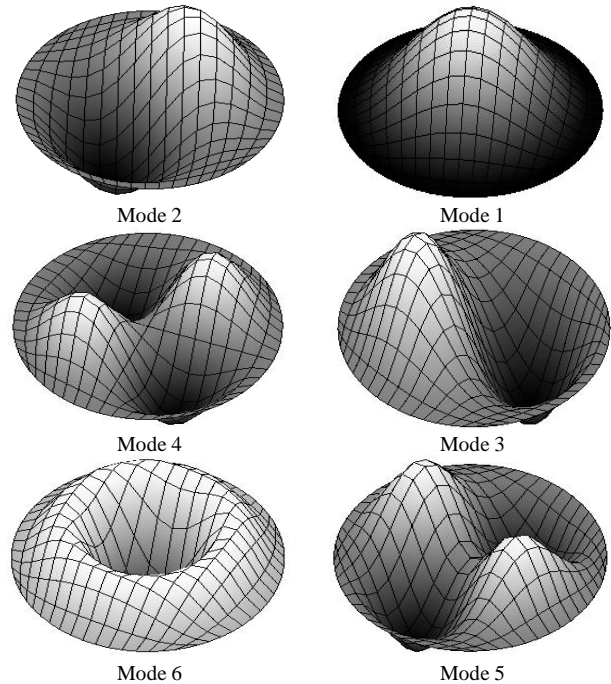


Fig. 5 The first six mode shapes of an isotropic clamped circular thick plate using the cubic element

شکل 5 شش شکل مود اول ورق دایروی ایزوتروپیک گیردار ضخیم با استفاده از المان مرتبۀ سه

برای المان های مرتبه پایین اتفاق می افتد، روش بهبود پایداری پیشنهاد شد که نتایج حاصل از آن، در مقایسه با نظریه های مرتبه بالاتر، بسیار مناسب ارزیابی شد.

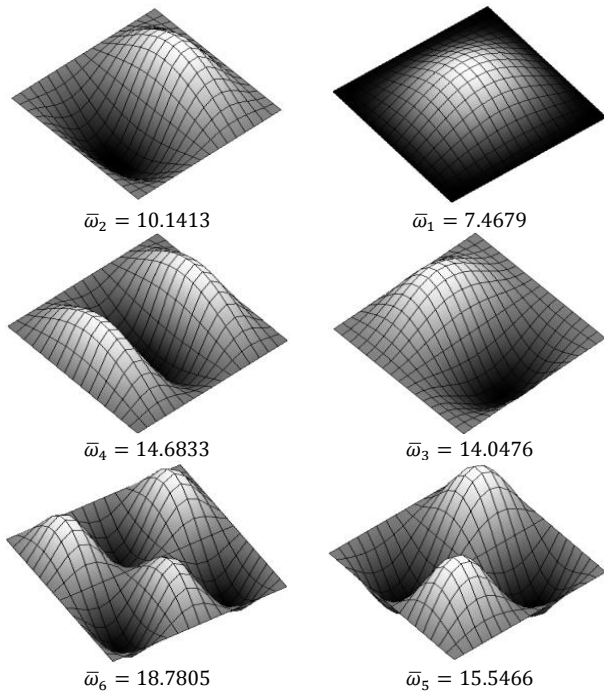


Fig. 7 The first six mode shapes of a [0 90 0] clamped laminated plate with $b/h = 10$ and $a/b = 1$ using the cubic element

شکل 7 شش شکل مود اول صفحه مربعی سه لایه [0 90 0] گیردار با استفاده از المان مرتبه سه ($b/h = 10$ و $a/b = 1$)

جدول 5 فرکانس اول بی بعد ورق مربعی ($a/b = 1$) چندلایه [0 90 90 0] با شرایط مرزی ساده

Table 5 A non-dimensional frequency of a [0 90 90 0] simply supported laminated square plate ($a/b = 1$)

E_1/E_2				تعداد نقاط کنترلی در هر لبه	روش
40	30	20	10		
13.9596	13.6379	13.1468	12.2487	9	مرجع [24]
10.8117	10.2889	9.5375	8.2794	17	
10.8130	10.2902	9.5388	8.2807	9	مرجع [23]
10.8121	10.2892	9.5378	8.2797	13	
10.8118	10.2890	9.5376	8.2790	17	
10.8540	10.3260	9.5671	8.2982	9	مرجع [26]
9.9573	9.5432	9.0134	8.2955	9	مرتبه 2
9.9492	9.5343	9.0033	8.2823	13	
9.9488	9.5338	9.0027	8.2815	17	
10.8141	10.2945	9.5330	8.2819	9	مرتبه 3
10.8139	10.2942	9.5327	8.2815	13	
10.8139	10.2942	9.5327	8.2811	17	
10.8139	10.2942	9.5328	8.2815	9	مرتبه 4
10.8139	10.2942	9.5327	8.2815	13	
10.8138	10.2942	9.5327	8.2815	17	

جدول 4 پنج فرکانس اول بی بعد ورق مربعی ($a/b = 1$) چندلایه [0 90 0] با شرایط مرزی گیردار

Table 4 A non-dimensional frequency of a [0 90 0] clamped laminated square plate ($a/b = 1$)

b/h	روش	مودها				
		5	4	3	2	1
5	مرجع [23]	9.7403	9.1862	7.7000	6.6433	4.4471
	مرجع [25]	9.7380	9.1850	7.7000	6.6420	4.4470
	مرجع [24]	9.7393	9.1851	7.6996	6.6422	4.4466
	مرتبه 2	10.1438	8.9477	7.7277	6.2660	4.4506
10	مرتبه 3	10.1433	8.9463	7.7276	6.2657	4.4505
	مرتبه 4	10.1433	8.9462	7.7276	6.2657	4.4505
	مرجع [23]	15.8121	15.4463	13.9149	10.4016	7.4133
	مرجع [25]	15.8060	15.4290	13.9130	10.3930	7.4110
	مرجع [24]	15.8061	15.4403	13.9128	10.3944	7.4106
	مرتبه 2	15.5480	14.6899	14.0481	10.1428	7.4681
	مرتبه 3	15.5467	14.6834	14.0476	10.1413	7.4679
	مرتبه 4	15.5466	14.6833	14.0476	10.1413	7.4679
	مرجع [23]	38.1465	36.9392	25.1828	17.7822	14.6003
	مرجع [25]	39.1570	35.5320	24.5110	17.6140	14.6660
100	مرجع [24]	39.5489	37.8851	25.1868	17.5426	14.4455
	مرتبه 2	38.0275	37.4776	25.0073	17.5647	14.4855
	مرتبه 3	37.9448	35.1706	24.2662	17.4073	14.4626
	مرتبه 4	37.9445	35.1296	24.2597	17.4068	14.4626

5- نتایج

در این مقاله تحلیل های استاتیکی و ارتعاش آزاد با استفاده از روش ایزوژئومتریک بر روی ورق های ایزوتروپیک، کامپوزیت و کامپوزیت- پیژوالکتریک با شکل های گوناگون و با استفاده از نظریه رایزنر- میندلین انجام شد. یکی از فواید استفاده از روش ایزوژئومتریک، راحتی افزایش مرتبه توابع پایه نسبت به اجزای محدود کلاسیک است. همان طور که دیده شد، با استفاده از توابع پایه مرتبه 2، 3 و 4 همگرایی بسیار خوبی در پاسخ ها (جابه جایی، تنش و فرکانس طبیعی) مشاهده می شود. همچنین مشاهده شد که با افزایش تعداد نقاط کنترلی، که در روش ایزوژئومتریک به راحتی صورت می گیرد، در هر لبه ورق روند همگرایی به پاسخ بسیار مناسب صورت پذیرفت. از فواید دیگر این روش، توصیف دقیق هندسه است که در مسائل خاص، نظیر صفحه مدور، این توانایی نشان داده شد. در استفاده از توابع پایه نرئز در نظریه رایزنر- میندلین پیوستگی C^0 کفایت می نماید که این خود سهولت در محاسبات و کاهش هزینه های محاسباتی را سبب می شود. در پژوهش حاضر برای جلوگیری از قفل شدگی برشی، که با نازک شدن ورق

جدول 8 تغییر شکل مرکزی ورق کامپوزیتی پیزوالکتریکی تحت بارگذاری یکنواخت و تکیه گاه ساده ($\times 10^{-4}$ m)

Table 8 Central control point/node deflection of the simply supported piezoelectric composite plate subjected to uniform load ($\times 10^{-4}$ m)

مرتبته 3	مرتبته 2	مرجع [29]	مرجع [15]	طرح لایه ها
-0.6345	-0.6343	-0.6326	-0.6343	$[pie/-45/45]_s$
-0.6204	-0.6202	-0.6323	-0.6217	$[pie/-45/45]_{as}$
-0.6582	-0.6576	-0.6688	-0.6593	$[pie/-30/30]_{as}$
-0.7402	-0.7387	-0.7442	-0.7422	$[pie/-15/15]_{as}$

جدول 9 فرکانس اول بی بعد ورق کامپوزیتی پیزوالکتریکی با $[pie/0/90/0/pie]$ تکیه گاه ساده

Table 9 Dimensionless first natural frequency of the simply supported square piezoelectric composite plate $[pie/0/90/0/pie]$

فرکانس بی بعد	درجات آزادی	شبکه بندی	روش
235.100	720	8×8	مرجع [15]
234.533	2208	12×12	مرجع [30]
245.941	-	-	مرجع [31]
235.887	500	8×8	مرتبته 2
235.866	605	8×8	مرتبته 3
235.865	720	8×8	مرتبته 4

6- مراجع

- [1] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, No. 39-41, pp. 4135-4195, 2005.
- [2] J. A. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs, T. J. R. Hughes, Isogeometric analysis of structural vibrations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, No. 41-43, pp. 5257-5296, 2006.
- [3] Y. Bazilevs, V. M. Calo, T. J. R. Hughes, Y. Zhang, Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations, *Computational Mechanics*, Vol. 43, No. 1, pp. 3-37, 2008.
- [4] B. Hassani, S. M. Tavakkoli, N. Z. Moghadam, Application of isogeometric analysis in structural shape optimization, *Scientia Iranica*, Vol. 18, No. 4, pp. 846-852, 2011.
- [5] S. Shojaaee, V. Valizadeh, E. Izadpanah, T. Bui, T.V. Vu, Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using the NURBS-based isogeometric finite element method, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 5, pp. 1677-1693, 2012.
- [6] H. Kapoor, R. Kapania, Geometrically nonlinear NURBS isogeometric finite element analysis of laminated composite plates, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 12, pp. 3434-3447, 2012.
- [7] H. Nguyen-Xuan, C. H. Thai, T. Nguyen-Thoi, Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 55, No. 67, pp. 558-574, 2013.
- [8] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, H. Nguyen-Xuan, Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a layerwise deformation theory, *Composite Structures*, Vol. 104, No. 20, pp. 196-214, 2013.
- [9] R. Ansari, A. Norouzzadeh, Nonlocal and surface effects on the buckling behavior of functionally graded nanoplates: An isogeometric analysis, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 84, No. 12, pp. 84-97, 2016.
- [10] R. Ansari, R. Gholami, A. Norouzzadeh, Size-dependent thermo-mechanical vibration and instability of conveying fluid functionally graded nanoshells based on Mindlin's strain gradient theory, *Thin-Walled Structures*, Vol. 105, No. 15, pp. 172-184, 2016.
- [11] S. Amir Farzam-Rad, B. Hassani, A. Karamodin, Isogeometric analysis of functionally graded plates using a new quasi-3D shear deformation theory based on physical neutral surface, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 108, No. 15, pp. 174-189, 2017.
- [12] K. M. Liew, H. K. Lim, M. J. Tan, X. Q. He, Analysis of laminated composite beams and plates with piezoelectric patches using the element-free Galerkin method, *Computational Mechanics*, Vol. 29, No. 6, pp. 486-497, 2002.
- [13] A. Milazzo, C. Orlando, An equivalent single-layer approach for free vibration analysis of smart laminated thick composite plates, *Smart Materials and Structures*, Vol. 21, No. 7, pp. 075031, 2012.
- [14] L. Piegler, W. Tiller, *The NURBS book*, Second Edition, pp. 47-116, New York, Springer-Verlag, 1997.
- [15] P. Phung-Van, L. D. Lorenzis, C. H. Thai, M. A. Wahab, H. Nguyen-Xuan, Analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators using higher-order shear deformation theory and isogeometric finite elements, *Computational Materials Science*, Vol. 96, Part B, No. 14,

جدول 6 پنج فرکانس اول بی بعد ورق گیردار دایروی چندلایه $[\theta - \theta - \theta - \theta]$

Table 6 A non-dimensional frequency parameter of a circular four layer $[\theta - \theta - \theta - \theta]$ clamped laminated plate

θ	روش	مودها				
		5	4	3	2	1
0	مرجع [27]	50.756	42.805	41.726	29.768	22.123
	مرجع [28]	50.309	42.635	41.101	29.651	22.211
	مرتبته 2	52.580	42.150	41.246	28.510	22.118
	مرتبته 3	50.412	42.094	41.192	28.379	22.100
15	مرتبته 4	50.066	42.092	41.186	28.373	22.099
	مرجع [27]	53.468	44.318	43.635	31.568	22.698
	مرجع [28]	52.872	43.469	43.350	31.455	22.774
	مرتبته 2	54.911	43.401	41.427	30.453	22.745
30	مرتبته 3	53.079	43.355	40.856	30.339	22.731
	مرتبته 4	52.795	43.353	40.807	30.334	22.731
	مرجع [27]	57.478	52.028	44.189	36.399	24.046
	مرجع [28]	56.315	51.074	43.968	36.153	24.071
45	مرتبته 2	55.635	49.310	44.174	35.245	24.108
	مرتبته 3	55.497	48.954	44.134	35.176	24.100
	مرتبته 4	55.490	48.929	44.133	35.174	24.099
	مرجع [27]	56.967	56.759	43.607	39.181	24.752
45	مرجع [28]	57.945	57.907	43.817	39.441	24.766
	مرتبته 2	56.257	54.940	44.038	38.041	24.821
	مرتبته 3	56.030	54.803	43.993	37.997	24.814
	مرتبته 4	56.019	54.796	43.992	37.996	24.814

جدول 7 جدول خواص مواد پیزوالکتریکی و کامپوزیت

Table 7 Material properties of piezoelectric and composite materials

Gr/Ep	T300/979	PZT-G1195N	PZT-4	خواص
خواص الاستیک				
132.38	150	63	81.3	(GPa) E_{11}
10.76	9	63	81.3	(GPa) E_{22}
10.76	9	63	64.5	(GPa) E_{33}
3.61	7.1	24.2	30.6	(GPa) G_{12}
5.65	7.1	24.2	25.6	(GPa) G_{13}
5.65	2.5	24.2	25.6	(GPa) G_{23}
0.24	0.3	0.3	0.33	ν_{12}
0.24	0.3	0.3	0.43	ν_{23}
0.49	0.3	0.3	0.43	ν_{13}
چگالی جرم				
1578	1600	7600	7600	(kg/m ³) ρ
ضرایب پیزوالکتریکی				
-	-	2.54e-10	-1.22e-10	(m/V) d_{31}
-	-	2.54e-10	-1.22e-10	(m/V) d_{32}
-	-	-	-	(m/V) d_{15}
خواص الکتریکی				
-	-	15.3e-9	1475	(F/m) p_{11}
-	-	15.3e-9	1475	(F/m) p_{22}
-	-	15.0e-9	1300	(F/m) p_{33}

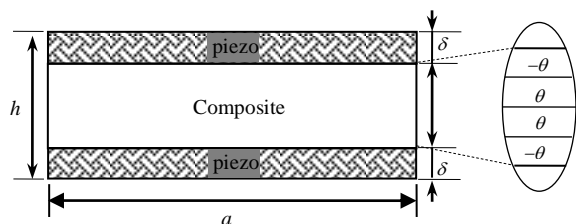


Fig. 8 Scheme square piezoelectric composite plate model

شکل 8 نمایی از ورق مربعی کامپوزیتی پیزوالکتریکی مدل شده

- method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory, *Composite Structures*, Vol. 89, No. 3, pp. 424–432, 2009.
- [25] K. Liew, Solving the vibration of thick symmetric laminates by Reissner/Mindlin plate theory and the P-Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 198, No. 3, pp. 343–360, 1996.
- [26] A. Kdheir, Analysis of symmetric cross-ply elastic plates using a higher-order theory, part II: buckling and free vibration, *Composite Structures*, Vol. 9, No. 4, pp. 259–277, 1988.
- [27] H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, T. Tran-Cong, Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 313, No. 1-2, pp. 205–223, 2008.
- [28] K. Liew, Y. Q. Huang, J. N. Reddy, Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 19, pp. 2203–2222, 2003.
- [29] P. Phung-Van, T. Nguyen-Thoi, T. Le-Dinh, H. Nguyen-Xuan, Static and free vibration analyses and dynamic control of composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators by the cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3), *Smart Materials and Structures*, Vol. 22, No. 9, pp. 095026, 2013.
- [30] D. A. Saravanos, P. R. Heyliger, D. A. Hopkins, Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 3, pp. 359–378, 1997.
- [31] P. Heyliger, D. A. Saravanos, Exact free-vibration analysis of laminated plates with embedded piezoelectric layers, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 98, No. 3, pp. 1547-1557, 1995.
- pp. 495-505, 2015.
- [16] M. Lyly, R. Stenberg, T. Vihinen, A stable bilinear element for Reissner-Mindlin plate model, *Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 110, No. 3, pp. 343–357, 1993.
- [17] R. L. Taylor, F. Auricchio, Linked interpolation for Reissner-Mindlin plate elements. Part II– A simple triangle, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, No. 18, pp. 3057–3066, 1993.
- [18] H. Thai Chien, H. Nguyen-Xuan, SPA. Bordas, N. Nguyen-Thanh, T. Rabczuk, Isogeometric analysis of laminated composite plates using the higher-order shear deformation theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 22, No. 6, pp. 451-469, 2012.
- [19] G. Akhras, M. S. Cheung, W. Li, Finite strip analysis for anisotropic laminated composite plates using higher-order deformation theory, *Computers and Structures*, Vol. 52, No. 3, pp. 471–477, 1994.
- [20] A. J. M. Ferreira, C. M. C. Roque, A. M. A. Neves, R. M. N. Jorge, C. M. M. Soares, K. M. Liew, Buckling and vibration analysis of isotropic and laminated plates by radial basis functions, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 42, No. 3, pp. 592–606, 2011.
- [21] K. Liew, C. M. Wang, Y. Xiang, S. Kitipornchai, *Vibration of Mindlin plates*, pp. 5-26, Amsterdam, Elsevier, 1998.
- [22] J. N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, No. 4, pp. 745–752, 1984.
- [23] H. Thai Chien, H. Nguyen-Xuan, N. Nguyen-Thanh, T. H. Le, T. Nguyen-Thoi, T. Rabczuk, Static, free vibration, and buckling analysis of laminated composite Reissner-Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 91, No. 6, pp. 571–603, 2012.
- [24] A. J. M. Ferreira, L. M. S. Castro, S. Bertoluzza, A high order collocation