مجله مهندسی مکانیک مدرس، اردیبهشت 1395، دوره 16، شماره 2، ص‌ص 167-178

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل استاتیکی ورق‌های ضخیم با استفاده از یک تئوری ترکیبی پارامتری

مجتبی لزگی نظرگاه[1*]، محسن آبگل[2]، ناصر چراقی[2]

1- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار

* سبزوار، صندوق پستی 397-9617976487، m.lezgy@hsu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 13 آذر 1394

پذیرش: 22 دی 1394

ارائه در سایت: 25 بهمن 1394

کلید واژگان:

تئوری تغییرات پارامتری ترکیبی رایسنر

تنش‌های عرضی برشی و قائم

ورق‌های ضخیم

چکیده

در این مطالعه برای تحلیل خمشی ورق‌های ضخیم، براساس اصل تغییرات پارامتری ترکیبی، یک مدل المان محدود معرفی شده است. در استخراج معادلات اساسی حاکم بر رفتار ورق که برحسب مؤلفه‌های میدان‌های جابجایی و نیز مؤلفه نرمال عرضی تانسور تنش بیان شده است، از تئوری اصلاح شده تغییرات ترکیبی رایسنر استفاده شده است. مؤلفه‌های جابجایی‌های درون صفحه‌ای تئوری ورق پیشنهادی از ترکیب عبارت‌های نمایی و چند جمله‌ای تشکیل شده است. مؤلفه‌ی جابجایی عرضی ورق نیز مبتنی بر یک چند جمله‌ای درجه‌ی اول می‌باشد. جهت تعریف تغییرات مؤلفه‌ی نرمال عرضی تانسور تنش در جهت ضخامت صفحه، یک بسط مرتبه دوم بکار گرفته شده است. شرایط مرزی تنش‌های برشی و نرمال در سطوح بالا و پایین ورق به صورت کامل برآورده می‌گردد. براساس تئوری ورق ترکیبی پیشنهادی، یک المان مستطیلی هرمیتی کاملا سازگار چهار گرهی که پیوستگی از نوع C^1 را برای تمامی پارامترهای مجهول ورق تضمین می‌نماید، بکار گرفته شده است. در فرمولاسیون ترکیبی ورق پیشنهادی، یک پارامتر اختیاری دلخواه به نام ضریب تفکیک در فرمولاسیون نهایی اجزا محدود ظاهر می‌گردد. روابطی ساده برای انتخاب ضریب تفکیک ارائه شده است تا منجر به نتایجی با دقت بالا شود. مقایسه نتایج عددی بدست آمده از تحلیل خمشی ورق‌های نازک و ضخیم با نتایج حاصل از تئوری‌های سه‌بعدی الاستیسیته و نیز نتایج سایر تئوری‌های ورق موجود در ادبیات فنی، کارآیی و مؤثر بودن فرمولاسیون ترکیبی ارائه شده را اثبات می‌نماید. علاوه بر این، مدل اجزا محدود ترکیبی پیشنهادی به لحاظ محاسباتی کم‌هزینه بوده و از سرعت همگرایی بالایی نیز برخوردار می‌باشد.

Static analysis of thick plates using a mixed parametried theory

Mojtaba Lezgy-Nazargah*, Mohsen Abgol, Naser Cheraghi

Department of Civil Engineering, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran
* P.O.B. 9617976487-397 Sabzevar, Iran, m.lezgy@hsu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 04 December 2015
Accepted 12 January 2016
Available Online 14 February 2016

Keywords:
Parametrized Reissner's mixed variational theorem
Transverse shear and normal stresses
Thick plates

ABSTRACT

A finite element model has been introduced for static bending analysis of thick plates based on a mixed plate variational formulation. A refined Reissner's mixed variational theoy is employed to derive the governing equations in terms of the introduced transverse normal stress and displacement variables. The in-plane displacement components of the plate are described by a combination of polynomial and exponential terms. Concerning the transverse displacement component, a first-order polynomial is adopted. A second-order expansion is considered for the variations of the transverse normal component of the stress tensor along the thickness direction of the plate. The boundary conditions of shear and normal tractions on the top and bottom surfaces of the plate are exactly satisfied. Based on the proposed mixed plate theory, a four nodded compatible Hermitian rectangular element which ensures C^1-type continuity of all unknown parameters of the plate along in-plane directions is employed. An arbitrary free parameter, called the splitting factor, appears in the functional of the proposed variational formulation. In the numerical part of the present paper, a simple formulation has been proposed for selecting the splitting factor which leads to the results of higher precision. Comparison of present bending results for thin and thick plates with results of the three-dimensional theory of elasticity and other plate theories available in literature reveals efficiency of the proposed parametrized mixed plate theory. Moreover, the proposed model has a high convergence rate and is computationally low cost.

1- مقدمه

صفحات مستطیلی و مورب کاربرد گسترده‌ای در سازه‌های مدرن امروزی پیدا کرده‌اند. انتخاب یک مدل مکانیکی مناسب برای پیش‌بینی دقیق رفتارهای محلی و کلی سازه‌های صفحه‌ای تحت شرایط مختلف یک موضوع مهم برای طراحی دقیق چنین سازه‌هایی می‌باشد. در طول سال‌های اخیر، مدل‌های مکانیکی مختلفی برای مسائل خمش و ارتعاش آزاد سازه‌های صفحه‌ای توسط محققین توسعه داده شده است. حل معادلات دیفرانسیلی حاصل از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته، اغلب تقریب دقیقی برای تحلیل صفحات ضخیم و نازک می‌باشد. با این حال توسعه این گونه روش حل‌ها مشکل است، زیرا معادلات اساسی بدست آمده تنها برای شرایط هندسی، مرزی و بارگذاری

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
M. Lezgy-Nazargah, M. Abgol, N. Cheraghi, Static analysis of thick plates using a mixed parametried theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 2, pp. 167-178, 2016 (in Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.17.2]

خاص و ساده قابل حل می‌باشند. هزینه محاسباتی تحلیل اجزای محدود سه-بعدی سازه‌های صفحه‌ای نیز نسبتا بالا بوده و حتی در برخی شرایط خاص (نظیر وقتی که یکی از ابعاد سازه نسبت به ابعاد دیگر آن خیلی کوچکتر است) امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین محققین برای جبران این مشکل از تئوری‌های دو بعدی (2D) استفاده کردند. در تئوری‌های دوبعدی صفحات، شکل کلی تغییرات میدان‌های جابه‌جایی در راستای ضخامت از قبل تعیین می‌شود [1-3].

در زمینه‌ی تئوری‌های صفحات، تئوری ورق کلاسیک (CPT) یکی از ساده‌ترین تئوری‌ها می‌باشد که اثر تغییرشکل‌های برشی برای صفحات ضخیم را در نظر نمی‌گیرد [4]. در مراجع [5-8] مسائلی چون خمش، کمانش و ارتعاش آزاد ورق‌ها بر مبنای CPT و با استفاده از روش‌های مختلف تحلیلی و عددی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مطالعات از اثرات تنش‌های برشی عرضی چشم‌پوشی شده است. تئوری کلاسیک می‌تواند نتایج نسبتا خوبی برای تحلیل صفحات نازک که نسبت ضخامت به طول آن کمتر از 1/20 باشد ارائه دهد [9]. برای رفع اشکالات تئوری کلاسیک، تئوری تغییر شکل برشی ساده با در نظر گرفتن یک میدان جابه‌جایی هم مرتبه با تئوری کلاسیک توسط میندلین و رایزنر ارائه شد [11,10]. این محققین تئوری خود را تحت عنوان تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[1] (FSDT) ارائه نمودند. این تئوری نیز توسط محققین زیادی برای پیش‌بینی پاسخ خمشی و ارتعاش آزاد صفحات نسبتا ضخیم به کار برده شده است. به علت وجود فرض ثابت بودن تنش برشی در راستای ضخامت ورق، استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه اول مستلزم استفاده از ضریبی به نام ضریب تصحیح برشی است. از این ضریب به منظور تصحیح انرژی کرنشی مربوط به ترم‌های برشی استفاده می‌گردد. [14-12]. ردی بدون استفاده از ضریب تصحیح برشی، تئوری FSDT را جهت ارضای شرط مرزی تنش‌های برشی عرضی بر روی سطوح بالا و پایین اصلاح نمود. در این تئوری که به تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه سوم[2] (TSDT) مشهور است، میدان‌های جابجایی درون صفحه‌ای توزیعی مرتبه‌ی سوم در امتداد ضخامت دارند. تئوری ردی علیرغم ارضای شرایط مرزی تنش‌های برشی، دارای تعداد مجهولاتی برابر FSDT می‌باشد. با این وجود در مقایسه با FSDT، تئوری ردی قادر به پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار استاتیکی و دینامیکی تیرها و ورق‌های ضخیم می‌باشد [15].

پس از ردی، تئوری‌های مرتبه بالا[3]ی (HSDT) مختلف دیگری به منظور بهبود و افزایش دقت ورق‌ها توسط محققین ارائه شده است. آمبارتسومیان یک تئوری مرتبه بالا جهت پیش‌بینی رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق‌های نسبتا ضخیم پیشنهاد داد [16]. در این تئوری، شرایط مرزی تنش‌های برشی عرضی غیرصفر بر روی سطوح بالا و پایین ورق ارضا می‌شود. در تئوری ورق پیشنهادی توسط آمبارتسومیان از اثرات تنش‌های عرضی قائم صرفنظر شده است. توراچیر تئوری تغییر شکل برشی سینوسی را برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی صفحه‌های ضخیم معرفی نمود [17]. وی تغییرات تنش برشی عرضی در راستای ضخامت ورق را با استفاده از یک تابع کسینوسی مدل-سازی نمود. تئوری ورق توراچیر، شرط مرزی صفر بودن تنش برشی عرضی بر روی سطوح بالا و پایین ورق را ارضا می‌نماید. لزگی نظرگاه و همکاران [18] تئوری ورق توراچیر را تعمیم و از آن برای پیش‌بینی پاسخ ناشی از تحریک اجباری دینامیکی و خمش استاتیکی تیرهای پیزوالکتریک مدرج استفاده نمودند. کاراما و همکارانش [19] تغییرات راستای ضخامت مؤلفه‌های درون صفحه‌ای ورق‌های کامپوزیتی را با استفاده از یک تابع نمایی مدل‌سازی و از فرمولاسیون بدست آمده جهت پیش‌بینی رفتار دینامیکی سازه‌های ذکر شده استفاده نمودند. لزگی نظرگاه و همکاران [20-24] تئوری تغییر شکل برشی نمایی کاراما را تعمیم و از برای تحلیل تیرهای کامپوزیتی چند لایه و تیرهای پیزوالکتریک هوشمند، استفاده نمودند. شیمپی و پاتل براساس این فرض که جابجایی عرضی از مؤلفه‌های خمش و برش مستقل تشکیل می-شود، یک تئوری ورق اصلاح شده دو مجهولی ساده را برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق‌های ارتوتروپیک معرفی نمودند [25]. تئوری ورق ارائه شده توسط این محققین شرایط مرزی تنش برشی بر روی سطوح بالا و پایین ورق را ارضا می‌نماید. البته تئوری ارائه شده توسط شیمپی و پاتل از اثرات تنش‌ها و کرنش‌های نرمال عرضی صرفنظر می‌نماید. تای و کیم [27,26] بر مبنای تئوری ورق اصلاح شده‌ی دو مجهولی شیمپی و پاتل و با استفاده از روش حل تحلیلی لوی، به بررسی مسائل خمش و ارتعاش آزاد ورق‌ها پرداختند. تئوری ورق اصلاح شده‌ی دو مجهولی، توسط تای و چوی [28] جهت حل مسائلی چون خمش، کمانش و ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی ضخیم دارای شرایط مرزی مختلف به کار گرفته شد. لو و همکارانش [29] با لحاظ اثرات تغییر شکل‌های عرضی برشی و نرمال، یک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا را برای تحلیل صفحات ضخیم معرفی کردند. غوگال و صیاد تئوری تغییر شکل برشی و نرمال مثلثاتی را برای خمش استاتیک و تحلیل ارتعاش آزاد ورق ضخیم توسعه دادند [31,30]، مشابه تئوری ورق توراچیر [17]، غوگال و صیاد نیز تغییرات تنش برشی عرضی در راستای ضخامت ورق را با استفاده از یک تابع کسینوسی مدل‌سازی نمودند. در تئوری ارائه شده توسط این محققین اثرات تغییر شکل‌های عرضی نرمال ورق نیز در نظر گرفته شده است.

از آنجا که مؤلفه‌های درون صفحه‌ای و نرمال تانسور تنش به یکدیگر وابسته-اند، تنش‌ها و کرنش‌های نرمال نقش مهمی در تحلیل دقیق ورق‌های ضخیم ایفا می‌نمایند، خصوصا ورق‌های ضخیمی که از مواد نرم ساخته شده باشند. به دلیل اجتناب از بروز پدیده‌ی قفل شدگی ضخامت[4]، در اکثر تئوری‌های ورق مرتبه‌ی بالای ارائه شده توسط محققین، اثرات تنش‌ها و کرنش‌های قائم عرضی نادیده گرفته می‌شود [32]. در برخی از محدود تئوری‌های مرتبه‌ی بالا که اثرات انعطاف‌پذیری عرضی در فرمول‌بندی در نظر گرفته شده است، شرایط مرزی تنش قائم عرضی در سطوح بالا و پایین صفحه به صورت دقیق برآورده نمی‌شود. از این رو، در این تئوری‌ها، محاسبه‌ی مقادیر دقیق تنش-های برشی عرضی و همچنین تنش نرمال عرضی تنها با استفاده از انتگرالگیری از معادلات تعادل میسر می‌گردد. هر چند در تئوری‌های ورق مبتنی بر اصل تغییرات ترکیبی رایسنر، اثرات تنش‌های عرضی برشی و نرمال در نظر گرفته می‌شود [33]، با این وجود چنین فرمولاسیون‌هایی از نظر محاسباتی پر هزینه می‌باشند. به منظور رفع محدودیت‌های ذکر شده برای تئوری‌های ورق موجود، در مطالعه‌ی حاضر، یک تئوری ورق جدید بر اساس مفهوم اصل تغییرات پارامتری ترکیبی ارائه شده است. اصل تغییرات پارامتری ترکیبی پیشنهادی امتیازات اصل تغییرات ترکیبی راینسر [34] و همچنین اصل تغییرات ترکیبی تعمیم یافته رانگز [35-37] را به صورت هم‌زمان شامل می‌شود. در فرمولاسیون تغییرات ترکیبی پارامتری حاضر علاوه بر پارامترهای مجهول میدان‌های جابجایی، مؤلفه‌ی نرمال عرضی تانسور تنش هم به عنوان متغیر مستقل در نظر گرفته شده است. فرمولاسیون تغییرات پارامتری

1- First-order shear deformation theory
2- Third-order shear deformation theory
3- High-order shear deformation theory
4- Thickness locking

ترکیبی پیشنهادی، هر دوی انرژی کرنشی و مکمل را بطور همزمان شامل می‌شود. علاوه بر این، یک پارامتر آزاد اختیاری به نام ضریب تفکیک[1] در فرمولاسیون تغییرات پیشنهادی ظاهر می‌شود. ضریب تفکیک تأثیری بر راه حل دقیق مسئله ندارد، زیرا معادلات اولر-لاگرانژ اصل تغییرات پارامتری ترکیبی پیشنهادی جدید معادل با همان معادلات دیفرانسیل اساسی ورق می‌باشد. با این وجود، ظاهر شدن این ضریب اختیاری در فرمولاسیون تغییراتی پیشنهادی سبب ایجاد مزایایی محاسباتی در تحلیل اجزا محدود ورق‌ها می‌گردد. با استفاده از این ضریب تفکیک اختیاری می‌توان سهم انرژی کرنشی و مکمل ورق را به منظور یافتن راه حل نزدیک به راه حل دقیق تعدیل نمود. این مزیت اصل تغییرات پارامتری ترکیبی پیشنهادی با توجه به این واقعیت است که راه حل‌های تقریبی مبتنی بر اصل حداقل‌سازی انرژی پتانسیل کران پایین و راه حل‌های تقریبی مبتنی بر اصل حداقل‌سازی انرژی پتانسیل مکمل، کران بالای پاسخ واقعی یک مسأله‌ی مکانیک جامدات را تشکیل می‌دهند [38].

مؤلفه‌های جابجایی‌های درون صفحه‌ای تئوری ورق پیشنهادی از ترکیب عبارت‌های نمایی و چند جمله‌ای تشکیل شده است. برای مدل‌سازی تغییرات راستای ضخامت مؤلفه‌ی جابجایی عرضی ورق، از یک چند جمله‌ای درجه‌ی اول استفاده شده است. برای تغییرات مولفه‌ی نرمال عرضی تانسور تنش در جهت ضخامت ورق نیز از یک بسط مرتبه دوم استفاده شده است. شرایط مرزی تنش‌های عرضی برشی و نرمال در سطوح بالا و پایین ورق به صورت کامل برآورده شده و در نتیجه، نیازی به استفاده از ضریب تصحیح برشی نمی‌باشد. در مقایسه با سایر تئوری‌های ورق مشابه، فرمولاسیون ترکیبی پیشنهادی به طور قابل توجهی هزینه محاسباتی را کاهش داده و تنها دارای شش متغیر میدانی مستقل می‌باشد. براساس تئوری ورق ترکیبی پیشنهادی یک المان مستطیلی هرمیتی کاملا سازگار چهار گرهی که پیوستگی از نوع C^1 را برای تمامی پارامترهای مجهول ورق تضمین می‌نماید، استفاده شده است. ورق‌های مستطیلی با ابعاد و شرایط مرزی متفاوت، با استفاده از یک برنامه کامپیوتری که بر مبنای فرمولاسیون اجزا محدود ترکیبی ارائه شده نوشته شده است، تحلیل شده‌اند. روابطی ساده برای انتخاب ضریب تفکیک ارائه شده است تا منجر به دست یافتن نتایجی با دقت بالا شود. نتایج عددی بدست آمده از فرمولاسیون اجزا محدود پارامتری ترکیبی حاضر نشان می‌دهد که تئوری ورق پیشنهادی نتایجی دقیق با هزینه محاسباتی کم را به دست می‌دهد. مدل اجزا محدود پارامتری ترکیبی ارائه شده، بستری جدید برای به دست آوردن راه حل‌های عددی که به بسیار نزدیک به روش حل دقیق می‌باشند، ایجاد می‌نماید.

2-روابط و فرمول‌های ریاضی

2-1- هندسه و دستگاه مختصات

هندسه و دستگاه مختصات ورق مورد بررسی در این مطالعه در شکل 1 نشان داده شده است.

2-2- معادلات ساختاری

رابطه ساختاری یک ورق مونوکلینیک[2] را می‌توان به صورت رابطه (1) بیان کرد [33]:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{T_p} \\ \boldsymbol{T_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C_{pp}} & \boldsymbol{C_{pz}} \\ \boldsymbol{C_{pz}^T} & \boldsymbol{C_{zz}} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \boldsymbol{S_p} \\ \boldsymbol{S_z} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

1- Splitting factor
2- Monoclinic

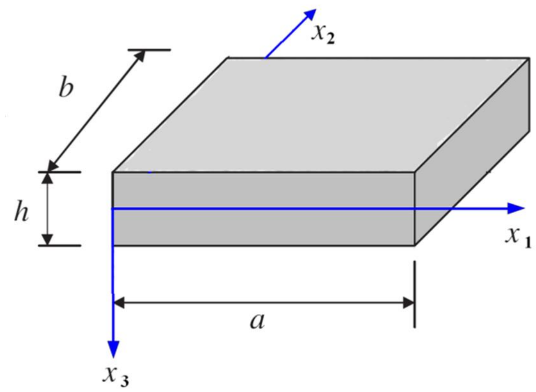


Fig. 1 Configuration and coordinate system of plates

شکل 1 شکل هندسی و دستگاه مختصات ورق

که در رابطه (1) داریم:

$$C_{pp} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix}$$

$$C_{pz}^{\mathrm{T}} = [C_{13} \quad C_{23} \quad C_{36} \quad 0 \quad 0], \qquad C_{zz} = [C_{33}]$$

$$T_p = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13}\}^{\mathrm{T}}, \qquad T_z = \{\sigma_{33}\}$$

$$S_p = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13}\}^{\mathrm{T}}, \qquad S_z = \{\varepsilon_{33}\} \qquad (2)$$

σ_{ij} و ε_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ به ترتیب مؤلفه‌های تانسور تنش و کرنش هستند. C_{kl}ها $(k,l = 1,2,\ldots,6)$ نشان‌دهنده ضرایب الاستیک ورق می‌باشند. این ضرایب الاستیک که تابعی از مدول الاستیسیته، نسبت پؤاسن و مدول برشی راستاهای مختلف ورق و نیز زاویه جهت‌گیری الیاف ورق با دستگاه مختصات انتخابی می‌باشند را می‌توان به سادگی با مراجعه به کتب مرجع نظیر [39] محاسبه نمود. در فرمولاسیون ورق پارامتری ترکیبی حاضر، توزیع متغیرهای میدان جابجایی و همچنین مؤلفه‌ی تنش نرمال عرضی (σ_{33}) از پیش تعیین شده است، لذا معادلات ساختاری را بایستی به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{Bmatrix} T_p \\ S_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{pp} & \hat{C}_{pz} \\ \hat{C}_{pz}^T & \hat{C}_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} S_p \\ T_z \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

که در معادله (3) داریم:

$$\hat{C}_{pp} = C_{pp} - C_{pz}(C_{zz})^{-1}C_{zp}, \quad \hat{C}_{pz} = C_{pz}(C_{zz})^{-1}$$
$$\hat{C}_{zp} = -(C_{zz})^{-1}C_{zp}, \quad \hat{C}_{zz} = (C_{zz})^{-1} \qquad (4)$$

2-3- فرضیات جابجایی و تنش نرمال عرضی

با الهام از تئوری ورق اصلاح شده‌ی دو مجهول شیمپی و پاتل [25]، تئوری تغییر شکل برشی آمبارتسومیان [16] و تئوری تیر اصلاح شده‌ی کاراما و همکارانش [19]، میدان جابجایی جدید (5) پیشنهاد شده است:

$$u_1(x_1,x_2,x_3) = u_0(x_1,x_2) - x_3\frac{\partial w_b}{\partial x_1} - f(x_3)\frac{\partial w_s}{\partial x_1} + x_3(a_{55}X_1 + a_{45}Y_1) + \frac{x_3^2}{2h}(a_{55}X_2 + a_{45}Y_2)$$
$$u_2(x_1,x_2,x_3) = v_0(x_1,x_2) - x_3\frac{\partial w_b}{\partial x_2} - f(x_3)\frac{\partial w_s}{\partial x_2} + x_3(a_{44}Y_1 + a_{45}X_1) + \frac{x_3^2}{2h}(a_{44}Y_2 + a_{45}X_2)$$
$$u_3(x_1,x_2,x_3) = w_b(x_1,x_2) + w_s(x_1,x_2) + x_3\Psi(x_1,x_2) \qquad (5)$$

در معادلات (5)، از نمادهای (6) تا (8) استفاده شده است:

$$X_1 = \frac{X^+ - X^-}{2}, \qquad Y_1 = \frac{Y^+ - Y^-}{2} \qquad (6)$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.17.2]

$$X_2 = X^+ + X^- \quad , \quad Y_2 = Y^+ + Y^- \tag{7}$$

$$f(x_3) = x_3 - x_3 e^{-2(\frac{x_3}{h})^2} \tag{8}$$

که X^+، X^- و Y^+، Y^- مؤلفه‌های مماسی تنش‌های اعمالی بر روی سطوح بالایی و پایینی ورق (z=h/2, z=-h/2) می‌باشند، $u_1(x_1,x_2,x_3)$، $u_2(x_1,x_2,x_3)$ و $u_3(x_1,x_2,x_3)$ مؤلفه‌های جابجایی‌های کلی ورق در دستگاه مختصات دکارتی انتخابی هستند، توابع $u_0(x_1,x_2)$ و $v_0(x_1,x_2)$ جابجایی‌های درون صفحه‌ای میان صفحه‌ی (صفحه‌ی مرجع) ورق را نشان می‌دهند، $w_b(x_1,x_2)$ و $w_s(x_1,x_2)$ به ترتیب مؤلفه‌های خمشی و برشی جابجایی عرضی $u_3(x_1,x_2,x_3)$ هستند، a_{ij} ثوابت نرمی الاستیک ورق و $\Psi(x_1,x_2)$ یک تابع مجهول است که باید تعیین شود. با توجه به معادله‌ی (5) به‌راحتی می‌توان دریافت که تنش‌های برشی عرضی σ_{13} و σ_{23} شرایط مرزی (9) تا (10) را بر روی سطوح بالایی و پایینی ورق برآورده می‌کنند:

$$\sigma_{13}\left(x_3 = \frac{h}{2}\right) = X^+ \quad , \quad \sigma_{23}\left(x_3 = \frac{h}{2}\right) = Y^+ \tag{9}$$

$$\sigma_{13}\left(x_3 = -\frac{h}{2}\right) = -X^- \quad , \quad \sigma_{23}\left(x_3 = -\frac{h}{2}\right) = -Y^- \tag{10}$$

بسط مرتبه‌ی دوم زیر برای تغییرات مؤلفه‌ی تنش نرمال عرضی در امتداد ضخامت ورق فرض شده است:

$$\begin{aligned}\sigma_{33}^*(x_1,x_2,x_3) &= L_1(x_3)Z^-(x_1,x_2) + L_2(x_3)\varphi(x_1,x_2)\\ &+L_3(x_3)Z^+(x_1,x_2)\end{aligned} \tag{11}$$

که در آن $Z^+(x_1,x_2)$ و $Z^-(x_1,x_2)$ به ترتیب بیانگر بارهای عرضی اعمالی بر روی سطوح پایین و بالای ورق می‌باشند، $\varphi(x_1,x_2)$ تنها پارامتر مجهول مؤلفه‌ی تنش نرمال عرضی است که باید تعیین شود. بالانویس * نشان می‌دهد که متغیر متناظر مستقیما از مدل مفروض به دست آمده است، $L_i(x_3)$، (i=1,2,3) توابع درون‌یاب لاگرانژی[1] به شرح (12) هستند:

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{2}{h^2}x_3(x_3 - \frac{h}{2}) \ , \ L_2 = \frac{4}{h^2}(\frac{h}{2} + x_3)(\frac{h}{2} - x_3)\\ L_3 &= \frac{2}{h^2}x_3(x_3 + \frac{h}{2})\end{aligned} \tag{12}$$

به راحتی می‌توان تحقیق نمود که معادله‌ی (11) شرایط مرزی تنش نرمال عرضی را در سطوح بالایی و پایینی ورق برآورده می‌کند. با توجه به معادله‌های (5) و (11) مشاهده می‌شود که تئوری ورق ترکیبی پیشنهادی فقط دارای شش پارامتر مجهول مستقل می‌باشد.

2-4- قضیه تغییرات پارامتری ترکیبی

در این بخش، یک فرمولاسیون تغییرات پارامتری ترکیبی برای حل مسائل مربوط به ورق ضخیم ساختاربندی شده است. انرژی پتانسیل کلی یک ورق را می‌توان به شکل (13) بیان کرد [37]:

$$\pi = \int_\Omega (\frac{1}{2}S_p^{\mathrm T}T_p + \frac{1}{2}S_z^{\mathrm T}T_z)\mathrm d\Omega + \int_s U^{\mathrm T}F dS + \int_\Omega U^{\mathrm T} f \mathrm d\Omega \tag{13}$$

که

$$F = \{-F_1,-F_2,-F_3\}^{\mathrm T} \ , \quad U = \{u_1,u_2,u_3\}^{\mathrm T}$$

$$f = \{-f_1,-f_2,-f_3\}^{\mathrm T}$$

Ω حجم ورق می‌باشد و S سطوح مرزی آن را نشان می‌دهد، f_i و F_i به ترتیب بیانگر مؤلفه‌های نیروهای حجمی و سطحی هستند، براساس روش ضرایب لاگرانژ پارامتری [35]، معادله‌ی (13) را می‌توان به صورت رابطه (14) بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}\pi = &\int_\Omega (\frac{1}{2}S_p^{\mathrm T}T_p + \frac{1}{2}\beta S_z^{\mathrm T}T_z + \frac{1}{2}(1-\beta)S_z^{\mathrm T}T_z)\mathrm d\Omega +\\ &\int_s U^{\mathrm T}F\mathrm dS + \int_\Omega U^{\mathrm T}f\mathrm d\Omega\end{aligned} \tag{14}$$

که β یک تابع پارامتری دلخواه در Ω می‌باشد که ضریب تفکیک نامیده می‌شود. چنانچه در بخش 2-3 نیز بدان اشاره شد، در تئوری ورق پیشنهادی مؤلفه‌ی تنش نرمال عرضی به عنوان یک متغیر مستقل و مجهول در نظر گرفته شده است. با این فرض که جابجایی‌ها و مؤلفه‌ی تنش نرمال عرضی متغیرهای از پیش معلوم هستند، معادله‌ی (14) را می‌توان به شکل متفاوت (15) بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}\pi_\beta^* = &\int_\Omega (\frac{1}{2}S_p^{\mathrm T}T_p + \frac{1}{2}\beta S_z^{\mathrm T}T_z + \frac{1}{2}(1-\beta)S_z^{*\mathrm T}T_z^*)\mathrm d\Omega +\\ &\int_s U^{\mathrm T}F\mathrm dS + \int_\Omega U^{\mathrm T}f\mathrm d\Omega\end{aligned} \tag{15}$$

که

$$T_z^* = C_{zp}S_p + C_{zz}S_z \tag{16}$$

T_z^* در روابط (15) و (16) بیانگر مؤلفه‌ی تنش نرمال عرضی است که مستقیما از مدل در نظر گرفته شده (رابطه‌ی (11)) و نه از روابط ساختاری بدست می-آید. البته تنش نرمال عرضی بدست آمده از مدل می‌بایست با تنش نرمال عرضی بدست آمده از روابط ساختاری برابر باشد (رابطه‌ی (16) را ببینید). به منظور رها شدن از این قید (رابطه‌ی (16))، ضریب لاگرانژ پارامتری λ=$\lambda(\beta)$ معرفی می‌شود که به تعریف تابع پارامتری جدید (17) منتهی می‌شود:

$$\begin{aligned}\pi^* = &\int_\Omega (\frac{1}{2}S_p^{\mathrm T}T_p + \frac{1}{2}\beta S_z^{\mathrm T}T_z + \frac{1}{2}(1-\beta)S_z^{*\mathrm T}T_z^*)\mathrm d\Omega +\\ &\int_s U^{\mathrm T}F\mathrm dS + \int_\Omega U^{\mathrm T}f\mathrm d\Omega + \int_\Omega \lambda(T_z^* - C_{zp}S_p - C_{zz}S_z)\mathrm d\Omega\end{aligned} \tag{17}$$

پس از جایگزینی روابط (1) و (3)، معادله بالا را می‌توان به شکل (18) بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}\pi^* = &\int_\Omega [(\frac{1}{2}S_p^{\mathrm T}(C_{pp}S_p + C_{pz}S_z) + \frac{1}{2}\beta S_z^{\mathrm T}(C_{zp}S_p + C_{zz}S_z) +\\ &\frac{1}{2}(1-\beta)(\hat C_{zp}S_p + \hat C_{zz}T_z^*)^{\mathrm T}T_z^*)]\mathrm d\Omega + \int_\Omega \lambda(T_z^* - C_{zp}S_p\\ &-C_{zz}S_z)\mathrm d\Omega + \int_s U^{\mathrm T}F\mathrm dS + \int_\Omega U^{\mathrm T}f\mathrm d\Omega\end{aligned} \tag{18}$$

تغییرات π^* نسبت به متغیرهای مستقل آن باید صفر باشد، بعد از محاسبه‌ی معادله تغییرات $\delta\pi^* = 0$، عبارت (19) برای λ به دست خواهد آمد:

$$\lambda = -(1-\beta)(\frac{1}{2}\hat C_{zz}^{\mathrm T}T_z^* + \frac{1}{2}\hat C_{zp}S_p + \frac{1}{2}\hat C_{zz}T_z^*) \tag{19}$$

جایگزینی معادله (19) در معادله (18) تابع پارامتری (20) را به دست می‌دهد:

$$\begin{aligned}\pi^* = &\frac{1}{2}\int_\Omega [(S_p^{\mathrm T}(C_{pp}S_p + C_{pz}S_z) + \beta S_z^T(C_{zp}S_p + C_{zz}S_z) +\\ &(1-\beta)(\hat C_{zp}S_p + \hat C_{zz}T_z^*)^{\mathrm T}T_z^*)]\mathrm d\Omega - \frac{1}{2}\int_\Omega (1-\beta)\,(\frac{1}{2}\hat C_{zz}^{\mathrm T}T_z^*\\ &+\frac{1}{2}\hat C_{zp}S_p + \frac{1}{2}\hat C_{zz}T_z^*)(T_z^* - C_{zp}S_p - C_{zz}S_z)\mathrm d\Omega +\\ &\int_s U^{\mathrm T}F\mathrm dS + \int_\Omega U^{\mathrm T}f\mathrm d\Omega\end{aligned} \tag{20}$$

با استفاده از روابط ساختاری (1) و (3)، تابع پارامتری فوق را می‌توان به شکل نهایی (21) بازنویسی نمود:

1- Lagrange interpolation functions

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.17.2]

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\int_{\Omega}[S_p^{\mathrm{T}} C_{pp}S_p + \beta S_p^{\mathrm{T}} C_{pz}S_z + \beta S_z^{\mathrm{T}} C_{zp}S_p + \beta S_z^{\mathrm{T}} C_{zz}S_z]\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega}(1-\beta)(-T_z^{*\mathrm{T}}\hat{C}_{zz}^{T}T_z^{*} + 2T_z^{*\mathrm{T}}\hat{C}_{zz}C_{zp}S_p + 2T_z^{*\mathrm{T}}S_z + S_p^{T}\hat{C}_{zp}^{\mathrm{T}}C_{zp}S_p)\mathrm{d}\Omega + \int_{s}U^{\mathrm{T}}F\mathrm{d}S + \int_{\Omega}U^{\mathrm{T}}f\mathrm{d}\Omega \quad (21)$$

Π_p یک تابع پارامتری ترکیبی مناسب برای حل مسائل مربوط به ورق ضخیم می‌باشد. شایان ذکر است که مهم نیست که ضریب تفکیک β در معادله‌ی تغییراتی (21) چه مقداری داشته باشد. این ادعا را می‌توان به آسانی اثبات کرد. از میان تمام توابع قابل قبول برای متغیرهای میدانی مستقل ورق، راه حل صحیح برای مسئله‌ی مقدار مرزی، مقداری است که Π_p را ایستا می‌کند، یعنی

$$\delta\Pi_p = 0 \quad (22)$$

$$\int_{\Omega}\delta S_p^{\mathrm{T}} C_{pp}S_p\mathrm{d}\Omega + \beta\int_{\Omega}\delta S_p^{\mathrm{T}}C_{pz}S_z\mathrm{d}\Omega + \beta\int_{\Omega}\delta S_z^{\mathrm{T}}C_{zp}S_p\mathrm{d}\Omega + \beta\int_{\Omega}\delta S_z^{\mathrm{T}}C_{zz}S_z\mathrm{d}\Omega - (1-\beta)\int_{\Omega}\delta T_z^{*\mathrm{T}}\hat{C}_{zz}^{\mathrm{T}}T_z^{*}\,\mathrm{d}\Omega + (1-\beta) \times \int_{\Omega}\delta T_z^{*\mathrm{T}}\hat{C}_{zz}C_{zp}S_p\mathrm{d}\Omega + (1-\beta)\int_{\Omega}\delta S_p^{\mathrm{T}}C_{zp}^{\mathrm{T}}\hat{C}_{zz}^{\mathrm{T}}T_z^{*}\mathrm{d}\Omega + (1-\beta)\int_{\Omega}\delta T_z^{*\mathrm{T}}S_z\,\mathrm{d}\Omega + (1-\beta)\int_{\Omega}\delta S_z^{\mathrm{T}}T_z^{*}\,\mathrm{d}\Omega + (1-\beta) \times \int_{\Omega}\delta S_p^{\mathrm{T}}\hat{C}_{zp}^{\mathrm{T}}C_{zp}S_p\mathrm{d}\Omega + \int_{s}\delta U^{\mathrm{T}}F\mathrm{d}S + \int_{\Omega}\delta U^{\mathrm{T}}f\mathrm{d}\Omega = 0 \quad (23)$$

پس از گروه‌بندی عبارت‌های مربوط به متغیرهای مشابه با هم، معادله (23) به شکل (24) قابل بیان می‌باشد:

$$\int_{\Omega}\delta S_p^{\mathrm{T}}[C_{pp}S_p + \beta C_{pz}S_z + (1-\beta)C_{zp}^{\mathrm{T}}\hat{C}_{zz}^{\mathrm{T}}T_z^{*} + (1-\beta)\hat{C}_{zp}^{\mathrm{T}}C_{zp}S_P]\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega}\delta S_z^{\mathrm{T}}[\beta C_{zp} + \beta C_{zz}S_z + (1-\beta)T_z^{*}]\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega}\delta T_z^{*\mathrm{T}}[-(1-\beta)\hat{C}_{zz}^{\mathrm{T}}T_z^{*} + (1-\beta) \times \hat{C}_{zz}C_{zp}S_p + (1-\beta)S_z]\mathrm{d}\Omega + \int_{S}\delta U^{\mathrm{T}}F\mathrm{d}s + \int_{\Omega}\delta U^{\mathrm{T}}f\,\mathrm{d}\Omega = 0 \quad (24)$$

با استفاده از روابط ساختاری (1) و (3)، معادله (24) را می‌توان به‌صورت (25) بازنویسی نمود:

$$\int_{\Omega}\delta S_p^{\mathrm{T}}[C_{pp}S_p + \beta C_{pz}S_z + (1-\beta)C_{pz}S_z^{*}]\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega}\delta S_z^{\mathrm{T}}[\beta T_z + (1-\beta)T_z^{*}]\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega}\delta T_z^{*\mathrm{T}}[(1-\beta)S_z - (1-\beta)S_z^{*}]\mathrm{d}\Omega + \int_{S}\delta U^{\mathrm{T}}F\mathrm{d}s + \int_{\Omega}\delta U^{\mathrm{T}}f\,\mathrm{d}\Omega = 0 \quad (25)$$

از آنجا که δT_z^{*} یک متغیر اختیاری است، لازم است ضریب مربوط به آن صفر گردد که منجر به رابطه (26) خواهد شد:

$$S_z = S_z^{*} \quad (26)$$

با استفاده از روابط ساختاری (1) و (3)، می‌توان به‌طور ضمنی از معادله (26) نتیجه گرفت که:

$$T_z = T_z^{*} \quad (27)$$

جایگزینی معادلات قبلی (26) و (27) در معادله (25)، آن را کاهش می‌دهد به:

$$\int_{\Omega}\delta S_p^{\mathrm{T}}[C_{pp}S_p + C_{pz}S_z]\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega}\delta S_z^{\mathrm{T}}T_z\,\mathrm{d}\Omega + \int_{S}\delta U^{\mathrm{T}}F\mathrm{d}s + \int_{\Omega}\delta U^{\mathrm{T}}f\,\mathrm{d}\Omega = 0 \quad (28)$$

یا

$$\int_{\Omega}\delta S_p^{\mathrm{T}}T_p\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega}\delta S_z^{\mathrm{T}}T_z\,\mathrm{d}\Omega + \int_{S}\delta U^{\mathrm{T}}F\mathrm{d}s + \int_{\Omega}\delta U^{\mathrm{T}}f\,\mathrm{d}\Omega = 0 \quad (29)$$

معادله‌ی (29) در واقع همان شکل ماتریسی اصل کار مجازی شناخته شده برای یک جسم جامد پیوسته می‌باشد. این نشان می‌دهد که تابع پارامتری ترکیبی پیشنهادی ارائه شده در معادله‌ی (21) معادلات تعادل و شرایط مرزی ورق را برای هر مقدار دلخواه از β برآورده می‌کند. به‌عبارت‌دیگر، ضریب تفکیک β تأثیری بر راه‌حل دقیق مسئله ندارد. با این‌حال ضریب تفکیک ظاهر شده در اصل تغییراتی پیشنهادی بر نتایج اجزاء محدود تأثیر داشته و به همین دلیل در فرمولاسیون جدید گنجانده شده است. برای β=0 تابع پیشنهادی به اصل واریاسیون ترکیبی رایسنر[1] کاهش می‌یابد، در حالی که برای β=1 به اصل مینیمم انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد. سایر مقادیر β فرمولاسیون تغییراتی میانی را می‌دهند که در توسعه‌ی مدل‌های اجزا محدود با کارایی بالا جهت تحلیل سازه‌های ورق گونه مفید خواهد بود.

2-5- مدل اجزا محدود

براساس اصل تغییرات پارامتری ترکیبی پیشنهادی در بخش 2-4 و میدان‌های جابجایی و تنش نرمال عرضی تشریح شده در بخش 2-3، یک مدل اجزا محدود برای تحلیل استاتیکی ورق‌ها ارائه شده است. برای این منظور، یک المان مستطیلی هرمیتی کاملا سازگار چهار گرهی [40] که پیوستگی از نوع $\boldsymbol{C^1}$ را برای تمامی پارامترهای مجهول ورق در مرز بین دو المان برآورده می‌کند، به کار گرفته شده است. با توجه به روابط (5) و (11)، مؤلفه‌های جابجایی و عبارت تنش نرمال عرضی را می‌توان به شکل‌های ماتریسی (30) نوشت:

$$u = A_u u_u \quad (\text{30-الف})$$

$$\sigma = A_\sigma u_\sigma \quad (\text{30-ب})$$

که:

$$\sigma = [\sigma_{33}],\quad u_\sigma = [Z^{-}\varphi\, Z^{+}]^{\mathrm{T}},\ \ u = [u_1\, u_2\, u_3]^{\mathrm{T}},$$

$$A_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_3\frac{\partial}{\partial x_1} & -f(x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & (x_3\frac{a_{55}}{2} + x_3^2\frac{a_{55}}{2h}) & (-x_3\frac{a_{55}}{2} + x_3^2\frac{a_{55}}{2h}) & (x_3\frac{a_{45}}{2} + x_3^2\frac{a_{45}}{2h}) & (-x_3\frac{a_{45}}{2} + x_3^2\frac{a_{45}}{2h}) \\ 0 & 1 & -x_3\frac{\partial}{\partial x_2} & -f(x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & (x_3\frac{a_{45}}{2} + x_3^2\frac{a_{45}}{2h}) & (-x_3\frac{a_{45}}{2} + x_3^2\frac{a_{45}}{2h}) & (x_3\frac{a_{44}}{2} + x_3^2\frac{a_{44}}{2h}) & (-x_3\frac{a_{44}}{2} + x_3^2\frac{a_{44}}{2h}) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_\sigma = [L_1(x_3)\quad L_2(x_3)\quad L_3(x_3)],$$

$$u_u = [u_0\quad v_0\quad w_b\quad w_s\quad \psi\quad X^{+}\quad X^{-}\quad Y^{+}\quad Y^{-}]^{\mathrm{T}} \quad (31)$$

بردار پارامترهای مجهول میدان جابجایی (u_u) و همچنین بردار متغیرهای میدانی مجهول تنش نرمال عرضی (u_σ) را می‌توان به‌صورت (32) برحسب بردار متغیرهای گرهی u_u^e و u_σ^e نوشت:

$$u_u = N_u u_u^e \quad (\text{32-الف})$$

$$u_\sigma = N_\sigma u_\sigma^e \quad (\text{32-ب})$$

که:

1- Reissner Mixed Variational Theorem

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.17.2]

$$N_u=\begin{bmatrix} N&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&N&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&N&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&N&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&N&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&N&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&N&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&N&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&N \end{bmatrix}$$

$$N_\sigma=\begin{bmatrix} N&0&0\\ 0&N&0\\ 0&0&N \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$u_u^e=\{u_{u1}^e\ u_{u2}^e\ u_{u3}^e\ u_{u4}^e\ u_{u5}^e\ u_{u6}^e\ u_{u7}^e\ u_{u8}^e\ u_{u9}^e\}^{\mathrm{T}}$$

$$u_\sigma^e=\{u_{\sigma1}^e\ u_{\sigma2}^e\ u_{\sigma3}^e\} \tag{34}$$

در رابطه (33):

$$N_{ij}=\langle H_{0i}(\xi)H_{0j}(\eta)\ H_{1i}(\xi)H_{0j}(\eta)\ H_{0i}(\xi)H_{1j}(\eta)\ H_{1i}(\xi)H_{1j}(\eta)\rangle$$

$$N=\langle N_{11}\quad N_{21}\quad N_{12}\quad N_{22}\rangle \tag{35}$$

که در آن i و j به ترتیب شماره گره در جهت‌های ζ و η هستند، (1 یا 2)، ζ، و η مختصات محلی هستند که در جهت x_1 و x_2 ورق انتخاب شده‌اند، $H_{\alpha k}(\chi)$ $(\chi=\eta,\zeta;\ k=1,2;\ \alpha=0,1)$ توابع شکل هرمیتی هستند:

$$H_{01}(\chi)=\frac{1}{4}(1-\chi)^2(2+\chi)\ ,\ H_{02}(\chi)=\frac{1}{4}(2-\chi)(1+\chi)^2\ ,$$

$$H_{11}(\chi)=\frac{l_\chi}{8}(1-\chi)^2(1+\chi)\ ,\ H_{12}(\chi)=\frac{l_\chi}{8}(1-\chi)(1+\chi)^2 \tag{36}$$

l_χ نشان‌دهنده طول المان در جهت χ می‌باشد، u_{um}^e $(m=1,2,\dots,9)$ و $u_{\sigma n}^e$ $(n=1,2,3)$ بردار مقادیر گره‌ایی المان هستند که شامل متغیرهای میدانی ورق و مشتقات آن‌ها می‌باشد، برای مثال:

$$u_{u2}^e=\langle(\hat{v}_0)_1\quad(\hat{v}_{0,\xi})_1\quad(\hat{v}_{0,\eta})_1\quad(\hat{v}_{0,\xi\eta})_1\ \dots\ (\hat{v}_0)_4\quad(\hat{v}_{0,\xi})_4\quad(\hat{v}_{0,\eta})_4\quad(\hat{v}_{0,\xi\eta})_4\rangle^T \tag{37}$$

با استفاده از معادلات (32-الف) و (32-ب)، روابط (30-الف) و (30-ب) را می‌توان به صورت (38) نوشت:

$$u=A_uu_u=A_uN_uu_u^e=\mathcal{R}_uu_u^e \tag{38-الف}$$

$$\sigma=A_\sigma u_\sigma=A_\sigma N_\sigma u_\sigma^e=\mathcal{R}_\sigma u_\sigma^e \tag{38-ب}$$

با استفاده از روابط کرنش- تغییر شکل، بردارهای کرنش S^p و S^z می‌توانند به‌صورت (39) بیان شوند:

$$S_p=D_pu \tag{39-الف}$$

$$S_z=D_zu \tag{39-ب}$$

که ماتریس‌های دیفرانسیل بصورت (40) تعریف می‌شوند:

$$D_p=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}&0&0\\ 0&\frac{\partial}{\partial x_2}&0\\ \frac{\partial}{\partial x_2}&\frac{\partial}{\partial x_1}&0\\ 0&\frac{\partial}{\partial x_3}&\frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}&0&\frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix},\ D_z=\begin{bmatrix}0&0&\frac{\partial}{\partial x_3}\end{bmatrix} \tag{40}$$

با استفاده از معادلات (38-الف) و (38-ب)، بردارهای کرنش S^p و S^z را می‌توان به صورت (41) نوشت:

$$S_p=D_pu=D_p\mathcal{R}_uu_u^e \tag{41-الف}$$

$$S_z=D_zu=D_z\mathcal{R}_uu_u^e \tag{41-ب}$$

با جایگزینی روابط (38-الف)، (38-ب)، (41-الف) و (41-ب) در رابطه (21)، معادله‌ی دینامیکی[1] (42) از اصل همیلتون به دست می‌آید:

$$M\ddot{a}(t)+Ka(t)=P(t) \tag{42}$$

که در آن M ماتریس جرم کل و K ماتریس سختی کل شامل ضریب تفکیک می‌باشد. a بردار مجهول کل، که شامل مقادیر گرهی مؤلفه‌های جابجایی و تنش نرمال عرضی است و P بردار نیروی کل می‌باشد. این ماتریس‌ها به ترتیب بصورت (43) تعریف می‌شوند:

$$K=\sum_e K^e\ ,M=\sum_e M^e\ ,P=\sum_e P^e\ ,a=\sum_e a^e \tag{43}$$

ماتریس جرم المان M^e به صورت (44) تعریف می‌شود:

$$M^e=\begin{bmatrix}M_{uu}^e&0\\0&0\end{bmatrix}\quad,\quad M_{uu}^e=\int_{\Omega^e}[\mathcal{R}_u^T\ p\mathcal{R}_u]\,\mathrm{d}\Omega \tag{44}$$

ماتریس سختی المان نیز به صورت (45) تعریف می‌شود:

$$K^e=\begin{bmatrix}K_{uu}^e&K_{\sigma u}^{e\ \mathrm{T}}\\K_{\sigma u}^e&K_{\sigma\sigma}^e\end{bmatrix} \tag{45}$$

که در آن K_{uu}^e ماتریس سختی المان، $K_{\sigma\sigma}^e$ ماتریس نرمی و $K_{u\sigma}^e$ ماتریس کوپلینگ بوده و به صورت (46) تعریف می‌شوند:

$$K_{uu}^e=\int_{\Omega^e}[\mathcal{R}_u^{\mathrm{T}}D_p^{\mathrm{T}}C_{pp}D_p\mathcal{R}_u+\beta\mathcal{R}_u^{\mathrm{T}}D_p^{\mathrm{T}}C_{pz}D_z\mathcal{R}_u+\beta\mathcal{R}_u^{\mathrm{T}}D_z^{\mathrm{T}}C_{zp}D_p\mathcal{R}_u+\mathcal{R}_u^{\mathrm{T}}D_z^{\mathrm{T}}C_{zz}D_z\mathcal{R}_u+(1-\beta)\mathcal{R}_u^{\mathrm{T}}D_p^{\mathrm{T}}\hat{C}_{zp}^{\mathrm{T}}C_{zp}D_p\mathcal{R}_u]\mathrm{d}\Omega,$$

$$K_{\sigma\sigma}^e=\int_{\Omega^e}\left[-(1-\beta)\mathcal{R}_\sigma^{\mathrm{T}}\hat{C}_{zz}^{\mathrm{T}}\mathcal{R}_\sigma\right]\mathrm{d}\Omega,$$

$$K_{\sigma u}^e=\int_{\Omega^e}\left[(1-\beta)\mathcal{R}_\sigma^{\mathrm{T}}\hat{C}_{zz}C_{zp}D_p\mathcal{R}_u+(1-\beta)\mathcal{R}_\sigma^{\mathrm{T}}D_z\mathcal{R}_u\right]\mathrm{d}\Omega \tag{46}$$

بردار مجهولات المان a^e نیز به صورت (47) تعریف می‌شود:

$$a^e=\begin{Bmatrix}\hat{a}_u\\\hat{a}_\sigma\end{Bmatrix} \tag{47}$$

که $\hat{a}_u$ و $\hat{a}_\sigma$ به ترتیب مقادیر گرهی مؤلفه‌های جابجایی و تنش نرمال عرضی هستند. علاوه بر این داریم:

$$P^e=\begin{bmatrix}P_u^e\\P_\sigma^e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\int_{S^e}\mathcal{R}_u^{\mathrm{T}}F\mathrm{d}s+\int_{\Omega^e}\mathcal{R}_u^{\mathrm{T}}f\mathrm{d}\Omega\\0\end{bmatrix} \tag{48}$$

3- بحث و بررسی نتایج

در این قسمت، تحلیل استاتیکی ورق‌های دارای پارامترهای هندسی و شرایط مرزی مختلف به منظور بررسی دقت و کارایی فرمولاسیون ترکیبی ورق ارائه شده، انجام شده است. نتایج فرمول‌بندی حاضر با نتایج تئوری‌های منتشر شده قبلی که توسط سایر محققین ارائه شده است، مقایسه شده‌اند. علاوه بر این، دقت نسبی المان حاضر همچنین از طریق مقایسه‌ی مستقیم با حل دقیق الاستیسیته‌ی سه‌بعدی یا حل سه‌بعدی اجزا محدود که با استفاده از نرم‌افزار آباکوس[2] به دست آمده نیز ارزیابی شده است. قابل ذکر است که کلیه نتایج حاضر با یک برنامه‌ی نوشته شده در نرم‌افزار متلب بر اساس مدل اجزا محدود پارامتری ترکیبی پیشنهادی، استخراج شده‌اند.

3-1- مثال 1

در این مثال تحلیل خمشی برخی ورق‌های ایزوتروپیک با مقادیر متفاوت نسبت ابعاد، نسبت ضخامت و انواع ترکیب‌های شرایط مرزی و بارگذاری مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نسبت پؤاسون برای تمام ورق‌ها برابر با 0.3 فرض شده

1- Dynamic equation of motion
2- Abaqus

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.17.2]

است. در ارائه‌ی نتایج عددی در این بخش، از بی‌بعد سازی‌های (49) استفاده شده است:

$$\bar{\sigma}_{ii} = \frac{h^2}{qa^2}\sigma_{ii}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right), \quad \bar{\sigma}_{12} = \frac{h^2}{qa^2}\sigma_{12}\left(0{,}0,\frac{h}{2}\right)$$
$$\bar{w} = \frac{Eh^3}{qa^4}u_3\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right), \quad \bar{\sigma}_{13} = \frac{\sigma_{13}}{qa}\left(0,\frac{b}{2},x_3\right)$$
$$\bar{u} = \frac{Eh}{qa}u_1\left(0,\frac{b}{2},x_3\right),$$
$$w = \frac{100Eh^3}{12qa^4(1-\vartheta^2)}u_3\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right) \quad (49)$$

3-1-1- مطالعه همگرایی

در ابتدا همگرایی مدل اجزا محدود پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، یک ورق مربعی شکل که به صورت ساده در چهار لبه خود مقید شده، با استفاده از مدل اجزا محدود پارامتری ترکیبی حاضر و در نظر گرفتن تعداد المان‌های مختلف، مورد تحلیل قرار گرفته است. هندسه و تعداد المان‌های مورد استفاده در شکل 2 نشان داده شده است. نسبت طول به ضخامت (a/h) برابر با 5 فرض شده و یک بار گسترده یکنواخت با شدت q به سطح فوقانی ورق اعمال شده است. نتایج آزمایش همگرایی تعداد المان‌ها[1] نیز در جدول 1 نشان داده شده است. در محاسبه‌ی نتایج این جدول، مقدار ضریب تفکیک برابر با صفر در نظر گرفته شده است ($\beta=0$).

با توجه به جدول 1 مشاهده می‌شود که سرعت همگرایی مدل المان محدود ترکیبی پیشنهادی بسیار بالاست. تنها 2× 2 المان برای پیش‌بینی جابجایی عرضی ورق کافی است. جزبندی با 8 × 8 المان نتایج همگرا شده‌ای را برای هر دوی مؤلفه‌های تنش درون صفحه‌ای و جابجایی ارائه می‌دهند. نتایج جدول 1 نشان می‌دهد که مش با شبکه‌بندی 8 × 8 برای مدل‌سازی یک ورق ضخیم جهت تحلیل خمش استاتیکی کافی است. با توجه به نتایج جدول 1 ، تمامی نتایج ذکر شده در ادامه‌ی این بخش با استفاده از یک جزبندی 8 × 8 محاسبه شده‌اند مگر اینکه خلاف آن ذکر شده باشد.

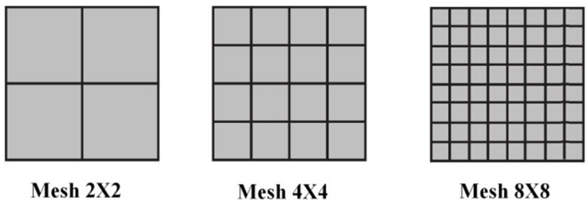


Fig. 2 The meshes used for numerical evaluations

شکل 2 جزبندی مورد استفاده برای ارزیابی عددی

جدول 1 نتایج همگرایی برای ورق مربعی شکل با تکیه‌گاه ساده(a/h=5)

Table 1 Convergence study for the simply supported square plate; a/h=5

		تعداد المان					
ABAQUS	8×8	خطا %	4×4	خطا %	2×2	خطا %	
0.0525	0.0523	0.38	0.0524	0.19	0.0530	1.13	$\bar{w}$
0.2987	0.3089	3.41	0.3151	5.49	0.3628	13.15	$\bar{\sigma}_{11}$
0.2987	0.3089	3.41	0.3151	5.49	0.3628	13.15	$\bar{\sigma}_{22}$
0.2025	0.1991	1.68	0.2009	0.79	0.2048	1.90	$\bar{\sigma}_{12}$

1- Mesh convergence study

3-1-2- حالت بار 1

در این قسمت، تحلیل ورق‌های با تکیه‌گاه ساده و نسبت ضخامت a/h=5، تحت اثر بار گسترده یکنواخت انجام شده است. تنش‌ها و جابجایی‌های بدون بعد به دست آمده از مدل اجزا محدود پارامتری ترکیبی حاضر، در جدول 2 برای ورق‌های دارای نسبت ابعاد b/a=1 و b/a=2، با فرض دو مقدار 0 و 1 برای β آورده شده‌اند. نتایج مدل پیشنهادی حاضر مطابق جدول 2 با نتایج تئوری ورق اصلاح‌شده‌ی تای و چوی [28] و نتایج ارائه شده توسط ردی [41] بر اساس تئوری‌های CPT ، FSDT و TSDT مقایسه شده‌اند. همچنین به منظور ارزیابی دقت و صحت تئوری‌های مختلف، نتایج اجزا محدود سه-بعدی همگرا شده به دست آمده از آباکوس با استفاده از 9000 [30 (طول) × 30 (عرض) × 10 (ضخامت)] المان مکعبی 20 گرهی، در جدول 2 ارائه شده است. در شکل 3 نمایی از ورق (a/h=5 ،b/a=1) مدل‌سازی شده در نرم افزار آباکوس به همراه جزبندی آن آورده شده است.

توزیع مؤلفه‌های تنش و جابجایی در راستای ضخامت ورق ایزوتروپیک در شکل 4 نشان داده شده است. در این شکل‌ها، تنش برشی عرضی به صورت مستقیم از روابط ساختاری محاسبه شده است. می‌توان مشاهده کرد که نتایج عددی به دست آمده از مدل المان محدود ترکیبی حاضر با β=0، نه تنها تطابق عالی با نتایج آباکوس دارند، بلکه دقیق‌تر از نتایج سایر تئوری‌های ورق مشابه می‌باشد. حداکثر درصد خطا در پیش‌بینی جابجایی عرضی و تنش‌های درون صفحه‌ای حدود 5% می‌باشد. همان‌طور که از جدول 2 مشاهده می‌شود مدل المان محدود ترکیبی حاضر با β=1 نتایجی ارائه می‌دهد که دقت کمتری دارند. برای β=1، فرمولاسیون ترکیبی ورق حاضر به یک تئوری ورق مبتنی بر جابجایی با پنج پارامتر مجهول کاهش پیدا می‌کند؛ بنابراین، شرایط مرزی برای مؤلفه‌ی تنش عرضی نرمال در سطوح بالا و پایین ورق برآورده نشده و منجر به افزایش خطای فرمولاسیون در پیش‌بینی پاسخ‌های خمش استاتیکی می‌شود.

جابجایی‌های بی‌بعد برای ورق‌های دارای شرایط مرزی متفاوت (b=2a) تحت بار گسترده یکنواخت در جدول 3 با نتایج اجزا محدود سه بعدی همگرا شده آباکوس، نتایج تئوری ورق اصلاح شده‌ی تای و چوی [28] و نیز نتایج گزارش شده توسط زنکور[2] [13] بر اساس FSDT مقایسه شده‌اند. یک نماد چهار حرفی برای تشریح شرایط مرزی لبه‌های ورق‌ها استفاده شده است. برای مثال، SCFC نشان می‌دهد که ورق در x_1=0 به صورت ساده، در $x_1=a$

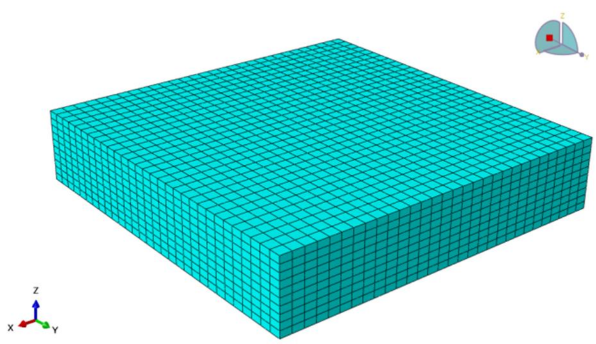


Fig. 3 The plate modeled in ABAQUS software with the meshes used for numerical analysis

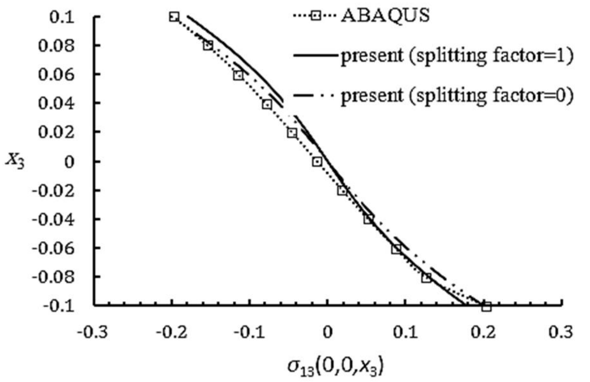
شکل 3 ورق مدلسازی شده در نرم افزار آباکوس به همراه جزبندی مورد استفاده در تحلیل عددی

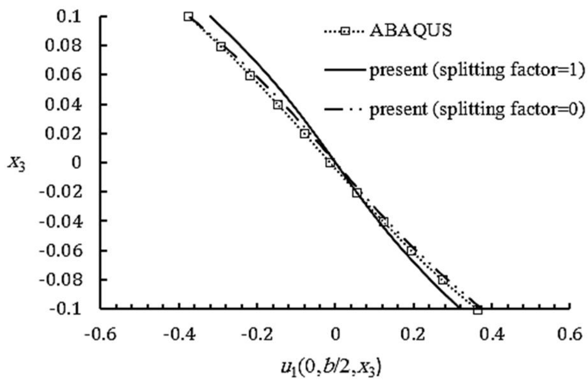
2- Zenkour

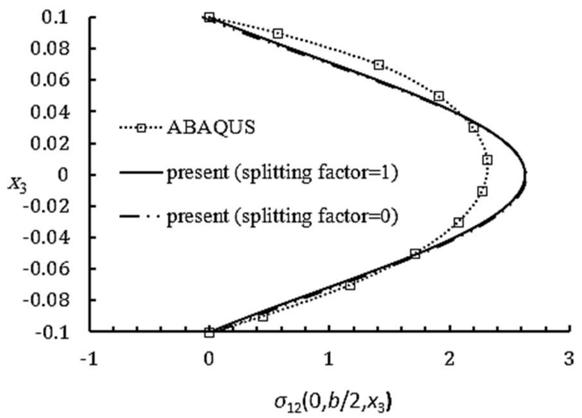
جدول 2 تنش‌ها و جابجایی بدون بعد ورق با تکیه‌گاه ساده تحت بار گسترده یکنواخت

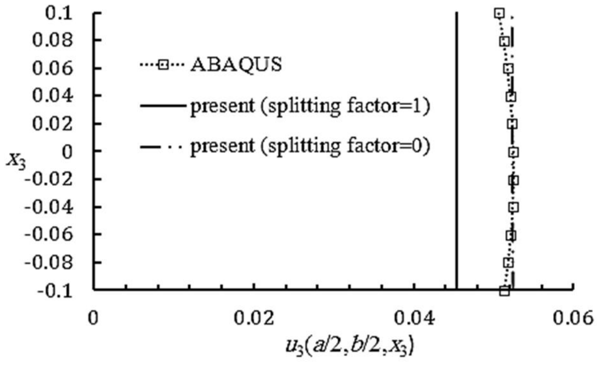
Table 2 Nondimensional deflection and stresses of the simply supported plate subjected to uniformly distributed load

$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{11}$	$\bar{\sigma}_{22}$	$\bar{\sigma}_{12}$	روش حل	a/h	b/a
0.0444	0.2873	0.2873	0.1946	تئوری ورق کلاسیک [41]	5	1
0.0536	0.2873	0.2873	0.1946	تئوری ورق مرتبه اول [41]		
0.0535	0.2944	0.2944	0.2112	تئوری ورق مرتبه سوم [41]		
0.0535	0.2944	0.2944	0.2112	مدل تای و چوی [28]		
0.0523	0.3089	0.3089	0.1991	مطالعه حاضر (β=0)		
0.0454	0.2663	0.2663	0.1791	مطالعه حاضر (β=1)		
0.0525	0.2987	0.2987	0.2025	ABAQUS		
0.1106	0.6100	0.2779	0.2769	تئوری ورق کلاسیک [41]	5	2
0.1248	0.6100	0.2779	0.2769	تئوری ورق مرتبه اول [41]		
0.1248	0.6202	0.2818	0.2927	تئوری ورق مرتبه سوم [41]		
0.1248	0.6202	0.2818	0.2927	مدل تای و چوی [28]		
0.1229	0.6523	0.2974	0.2854	مطالعه حاضر (β=0)		
0.1044	0.5443	0.2493	0.2469	مطالعه حاضر (β=1)		
0.1232	0.6196	0.2922	0.2841	ABAQUS		









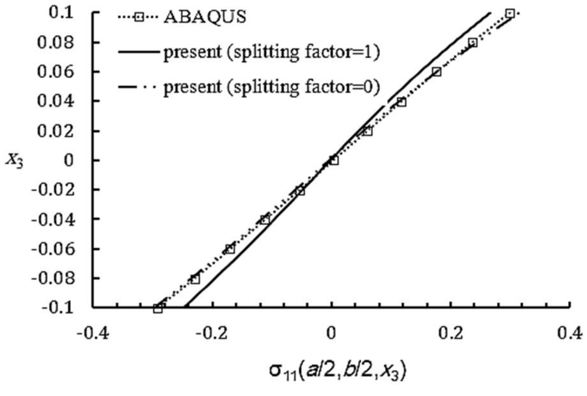


Fig. 4 Variations of u_1 ،u_3 ،σ_{11} ،σ_{13} and σ_{12} along the thickness direction of the square simply supported plate with *a*/*h*=5

شکل 4 نمودار تغییرات $\bar{u}$، $\bar{w}$، $\bar{\sigma}_{11}$، $\bar{\sigma}_{13}$ و $\bar{\sigma}_{12}$ در امتداد ضخامت ورق مربعی شکل با تکیه‌گاه ساده (a/h=5)

به‌صورت گیردار، در x_2=0 به‌صورت آزاد و در x_1=b به‌صورت گیردار مقید شده است. در جدول 3، نتایج فرمولاسیون ترکیبی حاضر با β=0 و β=1 ارائه شده‌اند. دقت نتایج اجزا محدود پارامتری ترکیبی پیشنهادی را می‌توان با انتخاب مناسب ضریب تفکیک β افزایش داد. متاسفانه در حال حاضر هیچ معیار کلی برای انتخاب ضریب تفکیک برای حل عددی بهینه وجود ندارد، بر

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.17.2]

اساس تجربه‌ی نویسندگان، فرمول زیر برای انتخاب ضریب تفکیک پیشنهاد می‌شود:

$$\beta_{\text{bend}} = \frac{h}{a}\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i\right)$$

که در آن α_i (i=1,2,3,4) ثابت‌هایی هستند که متناظر با شرایط مرزی هر لبه‌ی ورق می‌باشند. به این صورت که مقدار α_i برای لبه‌های دارای شرایط مرزی ساده، گیردار و آزاد، به ترتیب باید برابر با 0، 0.5- و 0.5 در نظر گرفته شود. نتایج اجزا محدود پارامتری ترکیبی حاضر با $\beta=\beta_{\text{bend}}$ نیز در جدول 3 آورده شده است. مشاهده می‌شود که فرمولاسیون ترکیبی حاضر با $\beta=\beta_{\text{bend}}$ نتایجی را ارائه می‌دهد که بسیار نزدیک به پاسخ‌های اجزا محدود سه‌بعدی هستند.

3-1-3- حالت بار 2

در این قسمت، تحلیل خمشی ورق‌های تحت بار گسترده عرضی سینوسی $Z^+(x_1,x_2) = q\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b})$ انجام شده است. ورق‌ها با مقادیر متفاوت نسبت طول به عرض، طول به ضخامت و نیز ترکیب‌های مختلف شرایط مرزی، با استفاده از فرمولاسیون ترکیبی حاضر مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند که نتایج عددی به دست آمده برای سه مقدار β=0 ، β=1 و $\beta=\beta_{\text{bend}}$ در جدول 4 آورده شده است. نتایج اجزا محدود پارامتری ترکیبی حاضر هم با نتایج اجزا محدود سه بعدی آباکوس و هم با نتایج تئوری ورق اصلاح شده‌ی تای و چوی [28] مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود که مدل المان محدود ترکیبی حاضر با $\beta=\beta_{\text{bend}}$ نتایجی دقیق‌تر از نتایج چوی و تای ارائه می‌کند. فرمولاسیون ترکیبی حاضر جابجایی بی‌بعد ورق‌های ضخیم (a/h=5) را با خطای کمتر از 22%، صرف‌نظر از نوع شرایط مرزی و مقادیر نسبت ابعاد (a/b) پیش‌بینی می‌کند که این مقدار برای تئوری ورق اصلاح شده‌ی تای و چوی برابر با 58% است.

3-2-مثال 2

در این مثال، تحلیل خمشی ورق‌های ارتوتروپیک در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی و مشخصات هندسی ورق‌های ارتوتروپیک در نظر گرفته شده، در جدول 5 ارائه شده‌اند. ورق‌ها به صورت ساده مقید شده و بار گسترده سینوسی $Z^+(x_1,x_2) = q\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b})$ به سطح فوقانی آن‌ها اعمال شده است.

جابجایی بی‌بعد ($\breve{w} = u_3\frac{100E_T h^3}{qa^4}$) برای ورق‌های ارتوتروپیک با نسبت ضخامت‌های متفاوت در جدول 6 آورده شده استهمانند ورق‌های ایزوتوپیک، نتایج حاصل از مدل اجزا محدود ترکیبی پیشنهادی با $\beta=\beta_{\text{bend}}$ انطباق خوبی با نتایج حل دقیق الاستیسیته سه‌بعدی دارند. همچنین با توجه به جدول 6 می‌توان مشاهده کرد که دقت نتایج تئوری ورق ترکیبی حاضر تقریبا با نتایج بدست آمده از تئوری‌های مرتبه بالا [32] یکسان می‌باشد. اگر چه تئوری حاضر شامل 6 پارامتر مجهول می‌باشد، در طرف مقابل، تئوری HSDT با $N_P = 3, N_W = 3$، شامل 8 پارامتر مجهول می‌باشد. از این مقایسه می‌توان نتیجه گرفت که فرمولاسیون پارامتری ترکیبی پیشنهادی نه تنها دقیق، بلکه کارآمد نیز می‌باشد.

جدول 3 جابجایی بی‌بعد ورق مستطیل شکل با شرایط مرزی متفاوت تحت بار گسترده یکنواخت

Table 3 Nondimensional deflection of the rectangular plate with various boundary conditions under uniformly distributed load

a/h	روش حل	SSFF	SSFS	SSFC	SSSS	SSSC	SSCC
5	تئوری ورق مرتبه اول [13]	1.4283	1.2844	1.2090	1.1430	1.0704	1.0000
	مدل تای و چوی [28]	1.4314	1.2859	1.1966	1.1428	1.0568	0.9740
	مطالعه حاضر (β=0)	1.4510	1.2980	1.2073	1.1257	1.0558	0.9761
	مطالعه حاضر (β=1)	1.2353	1.1052	1.0542	0.9559	0.8985	0.8309
	مطالعه حاضر ($\beta=\beta_{\text{bend}}$)	1.3999	1.2747	1.2073	1.1257	1.0755	1.0133
	آباکوس	1.4016	1.3015	1.2112	1.1511	1.1119	1.0258
10	تئوری ورق مرتبه اول [13]	1.3228	1.1829	1.0981	1.0454	0.9637	0.8850
	مدل تای و چوی [28]	1.3244	1.1837	1.0946	1.0454	0.9595	0.8770
	مطالعه حاضر (β=0)	1.3346	1.1914	1.1042	1.0412	0.9647	0.8859
	مطالعه حاضر (β=1)	1.1052	0.9858	0.9139	0.8592	0.7972	0.7321
	مطالعه حاضر ($\beta=\beta_{\text{bend}}$)	1.3068	1.1788	1.1042	1.0412	0.9751	0.9052
	آباکوس	1.3149	1.1973	1.1048	1.0540	0.9901	0.9030
25	تئوری ورق مرتبه اول [13]	1.2938	1.1547	1.0664	1.0181	0.9330	0.8511
	مدل تای و چوی [28]	1.2944	1.1551	1.0660	1.0181	0.9322	0.8497
	مطالعه حاضر (β=0)	1.3015	1.1612	1.0751	1.0175	0.9391	0.8606
	مطالعه حاضر (β=1)	1.0683	0.9520	0.8816	0.8321	0.7686	0.7044
	مطالعه حاضر ($\beta=\beta_{\text{bend}}$)	1.2900	1.1560	1.0751	1.0175	0.9433	0.8684
	آباکوس	1.2918	1.1617	1.0701	1.0223	0.9445	0.8592

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.17.2]

جدول 4 جابجایی بی بعد ورق مستطیل شکل با شرایط مرزی متفاوت تحت بار گسترده سینوسی

Table 4 Nondimensional deflection of the rectangular plate with various boundary conditions under bi-sinusoidal distributed load

SSCC	SSSC	SSSS	SSFC	SSFS	SSFF	روش حل	*a/b*	*a/h*
0.6912	0.7361	0.7501	0.7698	0.8168	0.8507	آباکوس	0.5	5
0.7725	0.8375	0.9051	0.9473	1.0175	1.1318	مدل تای و چوی [28]		
0.6649	0.7054	0.7385	0.7600	0.8053	0.8605	مطالعه حاضر (β=0)		
0.5690	0.6021	0.6286	0.6477	0.6856	0.7315	مطالعه حاضر (β=1)		
0.6898	0.7185	0.7385	0.7600	0.7909	0.8300	مطالعه حاضر ($\beta=\beta_{bend}$)		
0.6085	0.6535	0.7002	0.6939	0.7415	0.8105	آباکوس		10
0.6936	0.7584	0.8259	0.8645	0.9345	1.0450	مدل تای و چوی [28]		
0.6010	0.6410	0.6778	0.6918	0.7356	0.7877	مطالعه حاضر (β=0)		
0.4972	0.5301	0.5597	0.5717	0.6077	0.6503	مطالعه حاضر (β=1)		
0.6140	0.6479	0.6778	0.6918	0.7278	0.7711	مطالعه حاضر ($\beta=\beta_{bend}$)		
0.5829	0.6272	0.6645	0.6716	0.7188	0.7648	آباکوس		20
0.6738	0.7386	0.8061	0.8438	0.9138	1.0233	مدل تای و چوی [28]		
0.5849	0.6249	0.6626	0.6746	0.7180	0.7693	مطالعه حاضر (β=0)		
0.4793	0.5121	0.5355	0.5526	0.5881	0.6298	مطالعه حاضر (β=1)		
0.5915	0.6283	0.6626	0.6746	0.7140	0.7608	مطالعه حاضر ($\beta=\beta_{bend}$)		
0.2017	0.2601	0.3279	0.4037	0.5348	0.7460	آباکوس	1	5
0.2220	0.2911	0.3922	0.5385	0.7173	1.1479	مدل تای و چوی [28]		
0.1828	0.2343	0.3075	0.3766	0.5012	0.7538	مطالعه حاضر (β=0)		
0.1622	0.2056	0.2670	0.3312	0.4369	0.7294	مطالعه حاضر (β=1)		
0.1881	0.2379	0.3075	0.3766	0.4933	0.6529	مطالعه حاضر ($\beta=\beta_{bend}$)		
0.1502	0.2062	0.2799	0.3390	0.4710	0.6916	آباکوس		10
0.1713	0.2397	0.3401	0.4714	0.6494	1.0612	مدل تای و چوی [28]		
0.1440	0.1951	0.2696	0.3278	0.4523	0.6939	مطالعه حاضر (β=0)		
0.1208	0.1629	0.2241	0.2786	0.3822	0.5861	مطالعه حاضر (β=1)		
0.1469	0.1971	0.2696	0.3278	0.4479	0.6805	مطالعه حاضر ($\beta=\beta_{bend}$)		
0.1358	0.1897	0.2649	0.3196	0.4493	0.6775	آباکوس		20
0.1584	0.2267	0.3271	0.4545	0.6324	1.0395	مدل تای و چوی [28]		
0.1341	0.1852	0.2600	0.3155	0.4398	0.6786	مطالعه حاضر (β=0)		
0.1103	0.1521	0.2133	0.2652	0.3683	0.5691	مطالعه حاضر (β=1)		
0.1356	0.1862	0.2600	0.3155	0.4376	0.6717	مطالعه حاضر ($\beta=\beta_{bend}$)		
0.0354	0.0467	0.0657	0.1306	0.2978	0.7588	آباکوس	2	5
0.0405	0.0530	0.0802	0.1689	0.3567	1.1966	مدل تای و چوی [28]		
0.0319	0.0419	0.0612	0.1106	0.2350	0.7555	مطالعه حاضر (β=0)		
0.0304	0.0393	0.0563	0.1020	0.2195	0.6798	مطالعه حاضر (β=1)		
0.0323	0.0422	0.0612	0.1106	0.2331	0.7367	مطالعه حاضر ($\beta=\beta_{bend}$)		
0.0182	0.0280	0.0484	0.0916	0.2375	0.7269	آباکوس		10
0.0212	0.0328	0.0591	0.1299	0.3158	1.1099	مدل تای و چوی [28]		
0.0172	0.0264	0.0462	0.0838	0.2074	0.7029	مطالعه حاضر (β=0)		
0.0152	0.0229	0.0393	0.0747	0.1891	0.6215	مطالعه حاضر (β=1)		
0.0175	0.0266	0.0462	0.0838	0.2063	0.6925	مطالعه حاضر ($\beta=\beta_{bend}$)		
0.0136	0.0228	0.0438	0.0799	0.2148	0.6914	آباکوس		20
0.0161	0.0276	0.0538	0.1199	0.3056	1.0882	مدل تای و چوی [28]		
0.0134	0.0224	0.0424	0.0769	0.2004	0.6895	مطالعه حاضر (β=0)		
0.0112	0.0186	0.0350	0.0676	0.1813	0.6067	مطالعه حاضر (β=1)		
0.0136	0.0225	0.0424	0.0769	0.1998	0.6842	مطالعه حاضر ($\beta=\beta_{bend}$)		

جدول 5 خواص مکانیکی و مشخصات هندسی ورق‌های ارتوتروپیک

Fig. 5 Elastic and geometrical properties of the orthotropic plates

E_L (GPa)	20
E_T (GPa)	10
ν_{LT}	0.25
G_{LT}(GPa)	5
ρ (kg/m^3)	1600
h (m)	0.001

4- نتیجه‌گیری

در این تحقیق یک مدل اصلاح شده‌ی مرتبه بالا برای پیش‌بینی رفتار استاتیکی ورق‌های ضخیم براساس اصل تغییرات پارامتری ترکیبی معرفی گردید. برخلاف بسیاری از تئوری‌های ارائه شده، مدل معرفی شده در این تحقیق اثرات تنش‌های عرضی برشی بر روی سطوح بالا و پایین ورق را در نظر گرفته و قادر به ارضای شرایط مرزی تنش‌های عرضی نرمال نیز می‌باشد. نتایج عددی به دست آمده در این تحقیق نشان می‌دهد که تحلیل‌های انجام شده توسط این مدل در شرایطی که بارهای خارجی وارده بر سطح ورق دارای مؤلفه‌ی افقی نیز باشند، از دقت کافی برخوردار می‌باشند. با توجه به لحاظ اثرات تغییرات جابجایی عرضی در راستای ضخامت، مدل معرفی شده می‌تواند رفتار ورق‌های ضخیم را با دقت بسیار بالایی پیش‌بینی نماید. مدل ورق پیشنهادی می‌تواند تنش‌های عرضی قائم را نیز به‌طور مستقیم و با دقت بسیار مناسبی با استفاده از روابط ساختاری محاسبه نماید. از جمله دیگر مزیت‌های مدل پیشنهادی این است که برخلاف مدل‌هایی چون FSDT نیاز به فاکتور اصلاح تنش ندارد. علاوه بر این، مدل ورق ارائه شده اثر کرنش‌های قائم عرضی را نیز در نظر می‌گیرد. مشاهده گردید که در نظر گرفتن این کرنش‌ها در تحلیل سبب افزایش دقت در پیش‌بینی پاسخ استاتیکی ورق‌های ضخیم می‌شوند. مدل معرفی شده با وجود دارا بودن ویژگی‌ها و مزایای ذکر شده، به لحاظ محاسباتی نیز کم هزینه بوده و تعداد مجهولات آن تنها یک عدد از FSDT بیشتر می‌باشد. بر مبنای مدل پیشنهادی، یک المان ورق ارائه و از آن در تحلیل مسائل استاتیکی مربوطه استفاده شده است. سرعت همگرایی مدل اجزا محدود بکار گرفته شده بالا بوده و به تعداد کمی المان جهت تحلیل نیاز دارد.

به منظور ارزیابی عملکرد مدل معرفی شده در تحلیل استاتیکی، نمونه‌های مختلفی از ورق‌های ضخیم که پارامترهای هندسی و شرایط مرزی آن‌ها با یکدیگر متفاوت می‌باشند انتخاب شده و با استفاده از مدل پیشنهادی تحلیل شدند. نتایج به دست آمده از تئوری ورق ترکیبی ارائه شده با نتایج حاصل از تئوری‌های سه‌بعدی الاستیسیته، نتایج به دست آمده از مدل‌های سایر محققین و نیز نتایج حاصل از تحلیل اجزا محدود آباکوس مقایسه شدند. در مقایسه با مدل‌های ارائه شده‌ی مشابه، نتایج به دست آمده از مدل معرفی شده دقیق‌تر می‌باشد. در انتها می‌توان به‌طور خلاصه چنین بیان نمود که اگر مصالحه‌ای بین دقت و هزینه‌ی محاسباتی به عنوان ملاکی برای مقایسه در نظر گرفته شود، مدل اصلاح شده‌ی مرتبه بالای معرفی شده در این تحقیق از جمله‌ی مدل‌های کارآمد خواهد بود.

5- مراجع

[1] M. Malik, C. W. Bert, Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of rectangular plates by the differential quadrature method, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 3–4, pp. 299–318, 1998.

[2] W. H. Wittrick, Analytical, three-dimensional elasticity solutions to some plate problems, and some observations on Mindlin's plate theory, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 23, No. 4, pp. 441–64, 1987 .

[3] A. W. Leissa, Z. D. Zhang, On the three-dimensional vibrations of the cantilevered rectangular parallelepiped, *Journal of Acoustic Society of America*, Vol. 73, No. 6, pp. 2013–2021, 1983 .

[4] S. P. Timoshenko, S. Woinowski-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, Singapore, pp. 33-49, 1959 .

[5] Y. Liu, R. Li, Accurate bending analysis of rectangular plates with two adjacent edges free and the others clamped or simply supported based on new symplectic approach, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 4, pp. 856–865, 2010 .

[6] A. W. Leissa, J. H. Kang, Exact solutions for vibration and buckling of an SS-C-SS-C rectangular plate loaded by linearly varying in-plane stresses, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 44, No. 9, pp. 1925–1945, 2002 .

[7] A. M. Zenkour, An exact solution for the bending of thin rectangular plates with uniform, linear, and quadratic thickness variations, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 45, No. 2, pp. 295–315, 2003 .

[8] M. Eisenberger, A. Alexandrov, Buckling loads of variable thickness thin isotropic plates, *Thin Walled Structures*, Vol. 41, No. 9, pp. 871-889, 2003.

[9] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates*, Taylor & Francis, Philadelohia, pp. 109-129,1999

جدول 6 جابجایی بی‌بعد ورق ارتوتروپیک (b=a)

Table 6 Nondimensional deflection of the orthotropic plate (b=a)

روش حل	a/h 100	10	4	2
تئوری ورق کلاسیک[32]	2.1948 (0.05%)	2.1948 (4.99%)	2.1948 (24.27%)	2.1948 (54.09%)
تئوری مرتبه بالا[32] (N_P = 1, N_W = 1)	2.0419 (7.02%)	2.1452 (7.13%)	2.6913 (7.14%)	4.6256 (3.25%)
تئوری مرتبه بالا [32] (N_P = 2, N_W = 2)	2.1958 (0.01%)	2.2933 (0.72%)	2.7958 (3.55%)	4.4044 (7.88%)
تئوری مرتبه بالا [32] (N_P = 3, N_W = 3)	2.1960 (0.00%)	2.3101 (0.00%)	2.9003 (0.08%)	4.8187 (0.79%)
مطالعه حاضر (β=1)	2.0436 (6.94%)	2.1632 (6.35%)	2.7934 (3.61%)	4.9887 (4.34%)
مطالعه حاضر (β= β_{bend})	2.1975 (0.07%)	2.3070 (0.13%)	2.8839 (0.49%)	4.8926 (2.33%)
تئوری الاستیسیته[32]	2.1960	2.3100	2.8981	4.7810

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.17.2]

[10] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, No. 2, pp. 69-72, 1945.

[11] R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, No. 1, pp. 31–38, 1951.

[12] C. M. Wang, G. T. Lim, J. N. Reddy, K. H. Lee, Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories, *Engineering Structures*, Vol. 23, No. 7, pp. 838–849, 2001.

[13] A. M. Zenkour, Exact mixed-classical solutions for the bending analysis of shear deformable rectangular plates, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 27, No. 7, pp. 515–534, 2003.

[14] S. Hosseini-Hashemi, M. Arsanjani, Exact characteristic equations for some of classical boundary conditions of vibrating moderately thick rectangular plates, *International Journal of Solids and Structures*. Vol. 42, No. 3–4, pp. 819–853, 2005.

[15] J. N. Reddy, A simple higher order theories for laminated composites plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, No. 4, pp. 745-742, 1984 .

[16] S. A. Ambartsumian, On the theory of bending plates, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR*, Vol. 5,No.1, pp. 69–77, 1958 .

[17] M. Touratier, An efficient standard plate theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 29, No. 8, pp. 16–901, 1991 .

[18] M. Lezgy-Nazargah, P. Vidal, O. Polit, An efficient finite element model for static and dynamic analyses of functionally graded piezoelectric beams, *Composite Structures*, Vol. 104, No. 1, pp. 71-84, 2013.

[19] M. Karama, K. S. Afaq, S. Mistou, A new theory for laminated composite plates, *Proceeding of Institution of Mechanical Engineers*, *Series L: Design and Application*, Vol. 223, No. 2, pp. 53-62, 2009.

[20] M. Lezgy-Nazargah, S. B. Beheshti-Aval , M. Shariyat, A refined mixed global-local finite element model for bending analysis of multi-layered rectangular composite beams with small widths, *Thin Walled Structures*, Vol. 49, No. 2, pp. 351-362, 2011.

[21] S. B. Beheshti-Aval, M. Lezgy-Nazargah, A new coupled refined high-order global-local theory and finite element model for electromechanical response of smart laminated /sandwich beams, *Archive of Applied Mechanics*. Vol. 82, No. 12, pp. 1709-1752, 2012.

[22] M. Lezgy-Nazargah, S. B. Beheshti-Aval, Coupled refined layerwise theory for dynamic free and forced responses of piezoelectric laminated composite and sandwich beams, *Meccanica*, Vol. 48, No. 6, pp. 1479–1500, 2013 .

[23] S. B. Beheshti-Aval, S. Shahvaghar-Asl, M. Lezgy-Nazargah, M. Noori, A finite element model based on coupled refined high-order global-local theory for static analysis of electromechanical embedded shear-mode piezoelectric sandwich composite beams with various widths, *Thin Walled Structures*, Vol. 72, No. 1, pp. 139-163, 2013 .

[24] M. Lezgy-Nazargah, Efficient coupled refined finite element for dynamic analysis of sandwich beams containing embedded shear-mode piezoelectric layers, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 23, No. 3, pp. 337-352, 2016.

[25] R. P. Shimpi, H. G. Patel, A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 22-23, pp. 6783-6799, 2006.

[26] H. T. Thai, S. E. Kim, Analytical solution of a two variable refined plate theory for bending analysis of orthotropic Levy-type plates, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 54 , No. 1, pp. 269–276, 2012.

[27] H. T. Thai, S. E. Kim, Levy-type solution for free vibration analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 8, pp. 3870–3882, 2012.

[28] H. T. Thai, D. H. Choi, Analytical solutions of refined plate theory for bending, buckling and vibration analyses of thick plates, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 18-19, pp. 8310–8323, 2013.

[29] K. H. Lo, R. M. Christensen, E. M. Wu, A Higher-Order Theory of Plate Deformation. Part 2: Laminated Plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 44,No.1, pp. 669-676, 1977 .

[30] Y. M. Ghugal, A. S. Sayyad, A flexure of thick isotropic plates using trigonometric shear deformation theory, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 2, No. 1, pp. 79-90, 2010.

[31] Y. M. Ghugal, A. S. Sayyad, Free vibration of thick isotropic plates using trigonometric shear deformation theory, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 3, No. 2, pp.172-182, 2011 .

[32] E. Carrera, S. Brischetto, Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed multilayered plate theories, *Composite Structures*. Vol. 82, No. 4, pp. 549–562, 2008 .

[33] S. Brischetto, E. Carrera, Advanced mixed theories for bending analysis of functionally graded plates, *Composite Structures*. Vol. 88, No. 23-24, pp. 1474–1483, 2010.

[34] E. Reissner, On a mixed variational theorem and on shear deformable plate theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, No. 2, pp. 93-198, 1986.

[35] T. Y. Rong, A. Q. Lu, Parametrized Lagrange multiplier method nd construction of generalized mixed variational principles for computational mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 164, No. 3-4, pp. 287-296, 1998 .

[36] T. Y. Rong, A. Q. Lu, Generalized mixed variational principles and solutions of ill-conditioned problems in computational mechanics, Part I: Volumetric locking, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, No. 3-5, pp. 407-422, 2001.

[37] T. Y. Rong, A. Q. Lu, Generalized mixed variational principles and solutions of ill-conditioned problems in computational mechanics, Part II: Shear locking, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 44-46, pp. 4981–5000, 2003.

[38] B. F. De-Veubeke, *Displacement and equilibrium models in the finite element method, in: Zienkiewicz O.C, Holister G.S. (Eds.), Stress Analysis*, John Wiley & Sons, New York, pp. 145–197, 1965 .

[39] R. M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, Taylor & Francis, Philadelphia, pp. 55-82, 1999

[40] M. Shariyat, A generalized global–local high-order theory for bending and vibration analyses of sandwich plates subjected to thermo-mechanical loads, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 52, No. 3, pp. 495–514, 2010.

[41] J. N. Reddy, A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20, No. 9-10, pp. 881-896, 1984.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.2.17.2]