



# کوپلینگ مودهای شکست در ترک‌های زیرسطحی بیضوی تحت بارگذاری برشی یکنواخت

جواد علیزاده کاکلر<sup>1</sup>، رحمتا... قاجار<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
\*تهران، صندوق پستی 19395-1999، ghajar@kntu.ac.ir

## چکیده

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 14 اردیبهشت 1393

پذیرش: 11 خرداد 1393

ارائه در سایت: 28 مهر 1393

کلیدواژگان:

ترک زیرسطحی بیضوی

کوپلینگ مودهای شکست

مود ترکیبی

بار برشی یکنواخت

برازش تابع

ترک‌های زیرسطحی بیضوی از انواع ترک‌های شناسایی شده در سازه‌های مهندسی به ویژه در شرایط خستگی تماس غلظتی هستند. با توجه به عدم تقارن هندسی در این ترک‌ها، کوپلینگ مودهای شکست حادث شده و تحت بارگذاری برشی هر سه مود شکست بروز می‌نماید. در این مطالعه، با محاسبه ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ترک‌های زیرسطحی بیضوی تحت بارگذاری برشی یکنواخت در دو راستا، کوپلینگ مودهای شکست مورد بررسی قرار گرفته است. به این منظور ابتدا مدل اجزا محدود پارامتریک سه‌بعدی ترک در فضای بی‌نهایت ایجاد و صحنه‌گذاری شده است. سپس با نزدیک کردن ترک به یکی از سطوح فضا، ضرایب شدت تنش مود ترکیبی برای ضرایب منظرهای  $\alpha=0.2-1.0$  و نسبت عمق به طول ترک  $\beta=0.05-1.0$  محاسبه شده‌اند. براساس نتایج به دست آمده، کوپلینگ مودهای شکست زمانی بروز می‌نماید که ترک حداقل به اندازه طول خود به سطح فضا نزدیک شده باشد. با کاهش عمق ترک تا  $\beta=0.05$ ، اثر کوپلینگ مودها در بارگذاری برشی موجب افزایش حداقل 65 درصدی ضرایب شدت تنش برشی نسبت به فضای بی‌نهایت شده و می‌تواند مود کششی هم اندازه با مود برشی ایجاد نماید. با استفاده از برازش تابع، 6 رابطه تقریبی برای ضرایب شدت تنش مود ترکیبی هر نقطه از جبهه ترک زیرسطحی بیضوی تحت بار برشی یکنواخت در دو راستا ارائه شده است. به کمک این توابع می‌توان ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی با هر مقدار  $\alpha$  و  $\beta$  را تحت بار برشی یکنواخت با راستای دلخواه، با خطای نسبی زیر 3/3 و 1 درصد به ترتیب برای مود کششی و برشی محاسبه نمود.

## Coupling of the fracture modes for the subsurface elliptical cracks under uniform shear loading

Javad Alizadeh Kaklar<sup>1</sup>, Rahmatollah Ghajar<sup>2\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Khajeh nasir toosi University, Tehran, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Khajeh nasir toosi University, Tehran, Iran

\*P.O.B. 193951999 Tehran, Iran, ghajar@kntu.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 04 May 2014  
Accepted 01 June 2014  
Available Online 20 October 2014

**Keywords:**  
Elliptical subsurface cracks  
Coupling of the fracture modes  
Mixed mode  
Uniform shear loading  
Curve fitting

## ABSTRACT

Elliptical subsurface cracks are one of the probable types of cracks that occur in engineering structures, especially under rolling contact fatigue. Due to the non-symmetrical geometry, coupling of the fracture modes occurs in an elliptical subsurface crack and the crack under shear loading will experience all fracture modes. This paper investigates the coupling of the fracture modes of elliptical subsurface cracks under uniform shear loadings in two directions. First, a three-dimensional parametric finite element model of a crack in an infinite space has been developed and validated. Then, by moving the crack close to surface, mixed mode stress intensity factors (SIFs) have been calculated for cracks with aspect ratios of  $\alpha=0.2-1.0$  and ratios of crack depth to crack length of  $\beta=0.05-1.0$ . Based on the results, coupling of the fracture modes occur considerably when the crack depth becomes less than crack length. By decreasing of the crack depth from  $\beta=\infty$  to  $\beta=0.05$ , shear SIFs and  $K_{I,max}/K_{II,max}$  ratio increase at least up to 65% and 90%, respectively. Six equations for SIFs of the subsurface cracks under uniform shear loadings in two directions have been obtained by fitting to the finite element results. These equations can be used efficiently in high accurate calculation of the SIFs for subsurface cracks with any  $\alpha$  and  $\beta$  under uniform shear loading with any direction.

## 1- مقدمه

سیکلیک بارگذاری ناشی از غلظش، خستگی بروز نموده و می‌تواند منجر به جوانه‌زنی و رشد ترک‌های بیضوی زیرسطحی گردد. این ترک‌ها در صورت رشد می‌توانند قطعه‌ای از سطح تماس را جدا کرده و منجر به حوادث پر خطر

ترک‌های بیضوی و نیم بیضوی از انواع ترک‌های رایج شناسایی شده در سازه‌های مهندسی می‌باشند. به عنوان مثال، در سازه‌های دارای تماس غلظشی مانند رولربیرینگ‌ها [1] و چرخ و ریل فولادی [2]، به دلیل ماهیت

Please cite this article using:

J. Alizadeh K., R. Ghajar, Coupling of the fracture modes for the subsurface elliptical cracks under uniform shear loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 1-10, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

J. Alizadeh K., R. Ghajar, Coupling of the fracture modes for the subsurface elliptical cracks under uniform shear loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 1-10, 2015 (In Persian)

گردند (شکل 1). در شرایط خستگی تماس غلتشی<sup>1</sup>، عملاً مود کششی با توجه به فشاری بودن تنش‌های عمودی زیرسطحی وجود نداشته و ترک در اثر موده‌های برشی شکست رشد می‌کند [2]. به عبارت دیگر، برخلاف خستگی کلاسیک که مود I در رشد ترک حائز اهمیت است، مطالعه ترک‌های زیرسطحی در حوزه خستگی تماس غلتشی تنها تحت بارهای برشی مهم می‌باشد [3].

در صورتی که در یک سازه ترک‌دار، هندسه، بارگذاری و خواص ماده نسبت به صفحه ترک متقارن باشند، ترک تحت بارگذاری عمودی و برشی به ترتیب تنها مود کششی و برشی را تجربه می‌کند. به عبارت دیگر، در صورت وجود هرگونه عدم تقارن نسبت به صفحه ترک، میدان جابه‌جایی حول جبهه ترک نامتقارن شده و لذا اعمال بارهای کششی و یا برشی به تنهایی می‌تواند موجب بروز مود ترکیبی در ترک شود. این پدیده که کوپلینگ موده‌های شکست نامیده می‌شود [4]، در ترک‌های زیرسطحی به دلیل عدم تقارن هندسی رخ می‌دهد.

**2- مدل‌سازی اجزا محدود پارامتریک**  
برای محاسبه ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ترک‌های زیرسطحی بیضوی، با کدنویسی به زبان پایتون<sup>2</sup> در نرم‌افزار آباکوس از مدل‌سازی اجزا محدود پارامتریک استفاده شده است. پارامتریک بودن مدل‌سازی این امکان را فراهم می‌نماید که بتوان ترک‌هایی با ضرایب منظرهای متفاوت را در عمق‌های مختلف بدون نیاز به انجام روند تکراری مدل‌سازی، تحلیل نمود.

مطالعات زیادی در زمینه ترک‌های بیضوی محصور شده صورت گرفته است. ایروین [5] و کسیر و سیه [6] رابطه تحلیلی ضرایب شدت تنش ترک‌های بیضوی محصور شده در فضای بی‌نهایت را به ترتیب تحت بارگذاری کششی و برشی یکنواخت ارائه نمودند. در ادامه پژوهشگران به مطالعه این ترک‌ها تحت بارگذاری کششی و برشی با توزیع چندجمله‌ای پرداخته و روابطی برای ضرایب شدت تنش آن‌ها به دست آوردند [7-9]. استخراج تابع وزن ترک یکی از روش‌های محاسبه ضرایب شدت تنش آن تحت انواع توزیع تنش‌هاست. اتروشنچکو و همکاران [10] و روی و ساها [11] با ارائه تابع وزن‌های تحلیلی برای ترک‌های بیضوی در فضای بی‌نهایت، ضرایب شدت تنش این ترک‌ها را تحت هر توزیع دلخواه از بارگذاری محاسبه نمودند. ترک‌های زیرسطحی که به عنوان ترک در فضای نیمه بی‌نهایت مطرح هستند کمتر مورد تحقیق قرار گرفته‌اند. بقینی و همکاران [4] و مازو [12] ترک‌های زیرسطحی در نیم صفحه را به ترتیب با و بدون لحاظ نمودن اثر کوپلینگ موده‌ها مورد مطالعه قرار داده و تابع وزن این ترک‌ها را استخراج نمودند. قاجار و علیزاده [13] با بررسی ترک‌های زیرسطحی بیضوی تحت بارگذاری کششی یکنواخت، روابطی تقریبی برای محاسبه ضرایب شدت تنش آن‌ها ارائه نمودند. آن‌ها نشان دادند، در صورتی که ترک تحت بارگذاری کششی بیش از طول خود از سطح نیم فضا فاصله بگیرد، قابل تخمین با ترک در فضای بی‌نهایت بوده و عملاً اثرات کوپلینگ قابل صرف‌نظر است.

**1-2- مدل‌سازی ترک در فضای بی‌نهایت**  
ترک زیرسطحی عموماً به صورت ترکی محصور شده در فضای نیمه بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شود. از طرفی، ترک محصور شده در فضای نیمه بی‌نهایت، ترک محصور شده در فضای بی‌نهایت است که به اندازه کافی به یکی از سطوح موازی سطح ترک نزدیک شده باشد. بنابراین، برای مدل‌سازی ترک‌های زیرسطحی ابتدا ترک در فضای بی‌نهایت مدل‌سازی و صحت‌گذاری شده و سپس به یکی از سطوح فضا نزدیک می‌شود. این جهت‌گیری مشکل عدم وجود داده‌های مورد نیاز برای صحت‌گذاری مدل‌سازی ترک زیرسطحی را نیز برطرف می‌نماید.

پارامترهای ورودی مدل‌سازی اجزا محدود پارامتریک ضرایب منظر ترک، عمق ترک و ابعاد فضا لحاظ شده است. با توجه به لزوم صرفه‌جویی در زمان، حداقل ابعادی از فضا مورد نظر است که بتوان با توجه به ابعاد ترک آن را بی‌نهایت فرض کرد. برای رسیدن به این ابعاد، ابتدا مدل با ابعاد بسیار بزرگ تحلیل شده و سپس ابعاد فضا تا جایی که بر نتایج اثر بسیار ناچیز داشته باشد کوچک شده است. نهایتاً براساس نتایج حاصله، طول و عرض فضای بی‌نهایت به ترتیب 6 برابر قطر بزرگ و کوچک ترک و ارتفاع فضا 4 برابر قطر بزرگ آن تعیین شد. با توجه به بی‌نهایت بودن فضا، شرایط مرزی خاصی برای وجوه خارجی در نظر گرفته نشده است. در بعضی مراجع [14]، ابعاد بی‌نهایت کوچک تری لحاظ شده است که می‌تواند دقت نتایج را کاهش دهد. با توجه به تقارن هندسی و بارگذاری، با اعمال شرایط مرزی متقارن، یک چهارم ترک و فضا مدل شده است. ماده، همگن همسان‌گرد با خواص  $E=200\text{GPa}$  و  $\nu=0.3$  تعریف شده است. حول جبهه ترک 5 کانتور برای محاسبه ضرایب شدت تنش تعبیه شده که ردیف اول آن شامل المان‌های سینگولار گوه‌ای مرتبه 2 (C3D15) بوده و در سایر ردیف‌ها از المان‌های آجری مرتبه 2 (C3D20) استفاده شده است. شکل 2 مدل مش‌خورده حاصل را به همراه تمرکز بر روی جبهه ترک نشان می‌دهد.

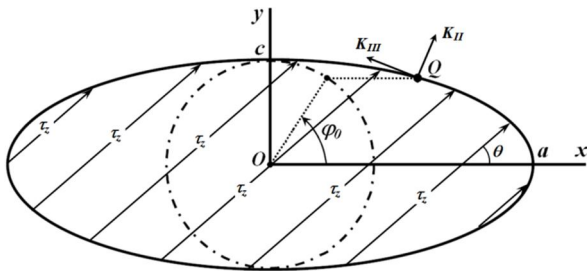
هدف این پژوهش مطالعه و ارزیابی پدیده کوپلینگ در ترک‌های زیرسطحی بیضوی تحت بار برشی یکنواخت با راستای دلخواه است. به این منظور، ابتدا ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ترک‌های زیرسطحی بیضوی برای 5 ضرایب منظر مختلف و 10 نسبت مختلف عمق ترک به طول ترک، با استفاده از روش اجزا محدود پارامتریک مورد محاسبه قرار می‌گیرد. سپس 6



شکل 1 شکست دو چرخ فولادی قطار در اثر رشد ترک زیرسطحی بیضوی [2]

تابع بر روی ضرایب شدت تنش محاسبه شده با دقت بالا برازش می‌شود.

**2-2- صحت‌گذاری مدل اجزا محدود**  
ساها و روی [15] روابط تحلیلی ضرایب شدت تنش ترک بیضوی محصور شده در فضای بی‌نهایت را زمانی که تحت بار برشی یکنواخت قرار می‌گیرد

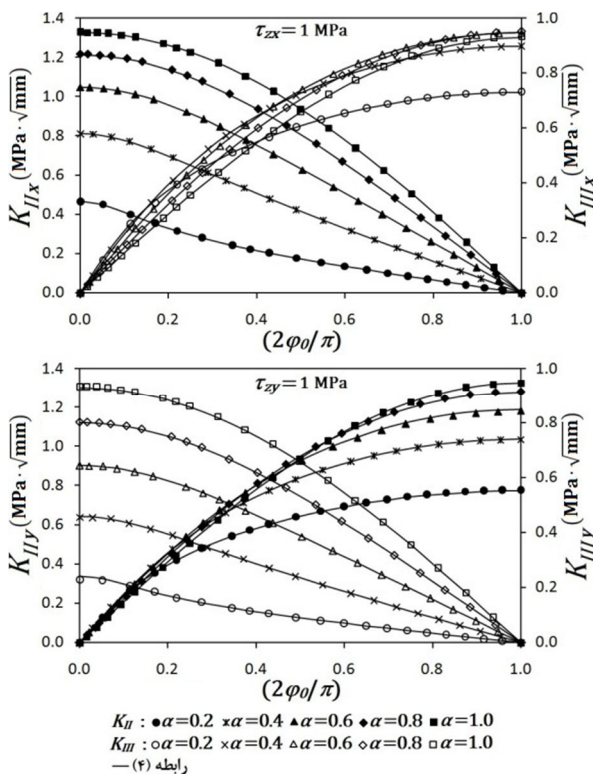


شکل 3 ترک بیضوی تحت بار برشی یکنواخت  $\tau_z$  و ایجاد مودهای برشی II و III

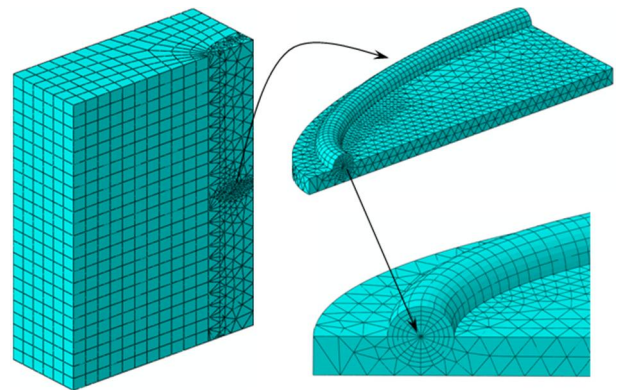
MPa به صورت جداگانه در جهت محور  $x$  و  $y$ ، ضرایب شدت تنش ترک‌هایی با ضرایب منظرهای  $\alpha=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  محاسبه شده و با نتایج حاصل از روابط 4 مورد مقایسه قرار گرفته است. شکل 4 مقایسه بین مقادیر عددی (یا نقاط مشخص شده‌اند) و تحلیلی (خطوط ممتد) را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تطابق نتایج بسیار عالی بوده و دقت مدل اجزا محدود بسیار مطلوب ارزیابی می‌شود. برای ارزیابی کمی دقت نتایج حاصل از مدل اجزا محدود، میانگین خطای نسبی برای  $K_{IIIx}$  و  $K_{IIx}$  به ترتیب برابر با  $0/30$  و  $0/33$  درصد و برای  $K_{IIy}$  و  $K_{IIIy}$  به ترتیب برابر با  $0/44$  و  $0/51$  درصد می‌باشد. می‌توان بیان نمود که خطای نسبی مدل اجزا محدود تقریباً زیر  $0/5$  درصد است.

### 2-3- مدل سازی ترک زیرسطحی

همان‌طور که اشاره شد، ترک زیرسطحی به عنوان ترک محصور شده در فضای نیمه بی‌نهایت فرض می‌شود. پس از مدل سازی پارامتریک ترک در فضای بی‌نهایت و صحه‌گذاری آن، با کاهش پارامتر  $h$  (فاصله ترک از یکی از سطوح فضا که موازی با سطح ترک است) در شکل 5 الف، فضا به نیم فضا



شکل 4 مقایسه ضرایب شدت تنش حاصل از حل اجزا محدود با مقادیر تحلیلی رابطه 4 برای ترک در فضای بی‌نهایت تحت بار برشی یکنواخت در راستای  $x$  و یا  $y$



شکل 2 مدل اجزا محدود ترک بیضوی با ضرایب منظر  $0/4$  در فضای بی‌نهایت

به صورت زیر ارائه دادند:

$$K_{II}(\varphi_0) = 4\tau_0\sqrt{\pi c_2^*} \left[ \frac{\alpha \cos\theta \cos\varphi_0}{I_1(\alpha, \nu)} + \frac{\sin\theta \sin\varphi_0}{I_2(\alpha, \nu)} \right]$$

$$K_{III}(\varphi_0) = 4(1-\nu)\tau_0\sqrt{\pi c_2^*} \left[ -\frac{\cos\theta \sin\varphi_0}{I_1(\alpha, \nu)} + \frac{\alpha \sin\theta \cos\varphi_0}{I_2(\alpha, \nu)} \right] \quad (1)$$

که در آن  $K_{III}$  و  $K_{II}$  به ترتیب ضرایب شدت تنش مود II و III نقطه دلخواه Q از جبهه ترک با زاویه  $\varphi_0$ ،  $c$  نیم‌قطر کوچک ترک بیضوی،  $\alpha=c/a$  ضرایب منظر ترک،  $\nu$  ضرایب پواسون و  $\theta$  زاویه راستای بار برشی یکنواخت اعمالی با محور  $x$  می‌باشند که در شکل 3 نشان داده شده‌اند. همچنین،  $I_1$ ،  $I_2$  و  $c_2^*$  که فاصله مرکز ترک بیضوی از مماس بر جبهه ترک در نقطه Q است، به صورت زیر تعریف می‌شوند [15]:

$$I_1(\alpha, \nu) = \frac{4}{1-\alpha^2} \left[ \nu\alpha^2 K(k) + (1-\alpha^2-\nu)E(k) \right]$$

$$I_2(\alpha, \nu) = \frac{4}{1-\alpha^2} \left[ -\nu\alpha^2 K(k) + (1-\alpha^2+\nu\alpha^2)E(k) \right]$$

$$c_2^* = \frac{c}{(\alpha^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)^{0.5}} \quad (2)$$

که در آن  $K$  و  $E$  به ترتیب انتگرال نوع اول و دوم بیضی با تعریف زیر می‌باشند:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi \quad (3)$$

اگر بار برشی یکنواخت در جهت محور  $x$  و یا  $y$  وارد شود، مقدار  $\theta$  به ترتیب برابر صفر و  $\pi/2$  شده و روابط 1 به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$K_{IIx}(\varphi_0) = \frac{4\alpha\tau_0\sqrt{\pi c_2^*}}{I_1(\alpha, \nu)} \cos\varphi_0$$

$$K_{IIIx}(\varphi_0) = \frac{-4(1-\nu)\tau_0\sqrt{\pi c_2^*}}{I_1(\alpha, \nu)} \sin\varphi_0$$

$$K_{IIy}(\varphi_0) = \frac{4\tau_0\sqrt{\pi c_2^*}}{I_2(\alpha, \nu)} \sin\varphi_0$$

$$K_{IIIy}(\varphi_0) = \frac{4(1-\nu)\tau_0\sqrt{\pi c_2^*}}{I_2(\alpha, \nu)} \cos\varphi_0 \quad (4)$$

که در آن  $K_{IIx}$ ،  $K_{IIIx}$ ،  $K_{IIy}$  و  $K_{IIIy}$  ضرایب شدت تنش ناشی از اعمال بار برشی یکنواخت به ترتیب در جهت محور  $x$  و  $y$  هستند.

برای صحه‌گذاری مدل اجزا محدود، با اعمال بار برشی یکنواخت  $\tau_0=1$

ترک اطمینان حاصل گردد. سپس برای حذف اثر اعمال بار عمودی مزبور، با توجه به خطی بودن تحلیل انجام شده، ضرایب شدت تنش ارائه شده در مرجع [13] از مقادیر ضرایب شدت تنش محاسبه شده کم شده است. بنابراین، نتایج این مطالعه زمانی قابل استفاده خواهد بود که کشش لازم برای باز شدگی سطوح ترک توسط بار کششی همراه بار برشی تأمین گردد.

### 3- ارائه نتایج اجزا محدود و برازش تابع

نتایج تحلیل‌های اجزا محدود ترک‌های زیرسطحی بیضوی برای نقاط مختلف جبهه ترک  $0 \leq 2\varphi_0/\pi \leq 1$  با ضرایب منظر  $\alpha=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  و نسبت‌های عمق ترک به طول ترک  $\beta=1.0, 0.5, 0.3, 0.2, 0.14, 0.1, 0.08, 0.06, 0.05$  تحت تأثیر بار برشی یکنواخت در راستای محور  $X$  و  $Y$  به ترتیب در شکل‌های 6 و 7 نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با توجه به بروز پدیده کوپلینگ مودها، بدون اعمال بار عمودی و تنها با اعمال بارهای برشی یکنواخت به سطوح ترک، مود  $I$  نیز حادث شده و عملاً ترک همزمان دچار هر سه مود شکست می‌شود.

در صورتی که بتوان تابعی با دقت بالا روی نتایج به دست آمده برازش نمود، آن‌گاه مقادیر محاسبه شده به روش اجزا محدود کاربردی‌تر شده و می‌توان تحت بار برشی یکنواخت اعمالی به سطوح ترک در راستای دلخواه  $\theta$ ، ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ترک با مقدار دلخواه  $\alpha$  و  $\beta$  را با دقت مناسب محاسبه نمود. در برازش یک تابع بر روی دسته‌ای از داده‌های مشخص، انتخاب شکل مناسب برای تابع برازش از اهمیت بالایی برخوردار است. هر چه شکل انتخاب شده مناسب‌تر باشد، آن‌گاه تابع برازش ساده‌تر، ضرایب تابع کمتر و دقت برازش بیشتر خواهد بود. تابع برازش ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی بیضوی، تابعی 3 متغیره با متغیرهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\varphi_0$  خواهد بود. قیود راهنمای انتخاب شکل مناسب برای تابع برازش عبارتند از:

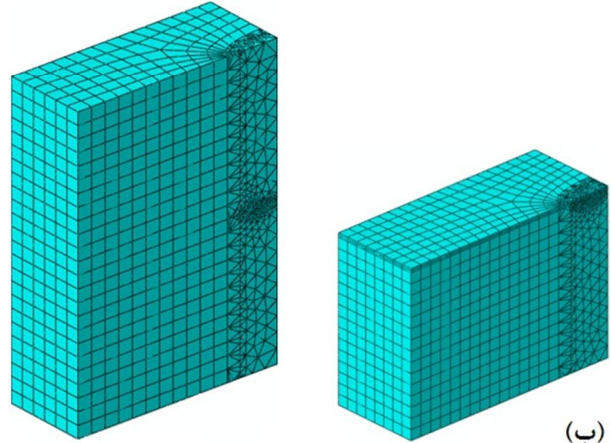
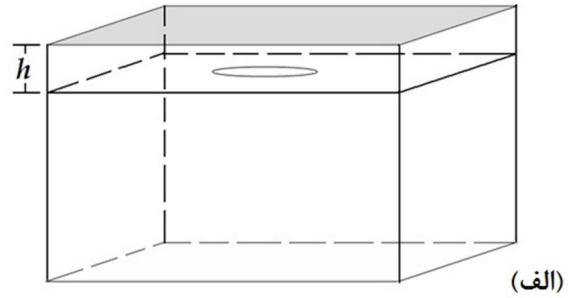
#### - روابط 4

- با میل کردن  $\beta$  به بی‌نهایت، بایستی  $K_I$  به صفر و  $K_{II}$  و  $K_{III}$  به روابط 4 میل کنند.

- بایستی مقادیر  $K_{IIx}$ ،  $K_{Iy}$  و  $K_{IIy}$  در  $\varphi_0=0$  و  $K_{Ix}$ ،  $K_{Iy}$  و  $K_{IIIy}$  در  $\varphi_0=\pi/2$  برابر با صفر شوند.

با توجه به این موارد، توابع برازش به صورت زیر اختیار می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 K_{Ix}(\alpha, \beta, \varphi_0) &= \frac{\tau_0 \sqrt{\pi C_1}}{E(k)} \sum_{n=1}^4 A_n(\alpha, \beta) \cos^n \varphi_0 \\
 K_{IIx}(\alpha, \beta, \varphi_0) &= \frac{4\alpha \tau_0 \sqrt{\pi C_2}}{I_1} \left[ \cos \varphi_0 + \sum_{n=1}^4 A_n(\alpha, \beta) \cos^n \varphi_0 \right] \\
 K_{IIIx}(\alpha, \beta, \varphi_0) &= \frac{-4(1-\nu) \tau_0 \sqrt{\pi C_2}}{I_1} \left[ \sin \varphi_0 + \sum_{n=1}^4 A_n(\alpha, \beta) \sin^n \varphi_0 \right] \\
 K_{Iy}(\alpha, \beta, \varphi_0) &= \frac{\tau_0 \sqrt{\pi C_1}}{E(k)} \sum_{n=1}^4 A_n(\alpha, \beta) \sin^n \varphi_0 \\
 K_{IIy}(\alpha, \beta, \varphi_0) &= \frac{4\tau_0 \sqrt{\pi C_2}}{I_2} \left[ \sin \varphi_0 + \sum_{n=1}^4 A_n(\alpha, \beta) \sin^n \varphi_0 \right] \\
 K_{IIIy}(\alpha, \beta, \varphi_0) &= \frac{4(1-\nu) \tau_0 \sqrt{\pi C_2}}{I_2} \left[ \cos \varphi_0 + \sum_{n=1}^4 A_n(\alpha, \beta) \cos^n \varphi_0 \right] \quad (5)
 \end{aligned}$$



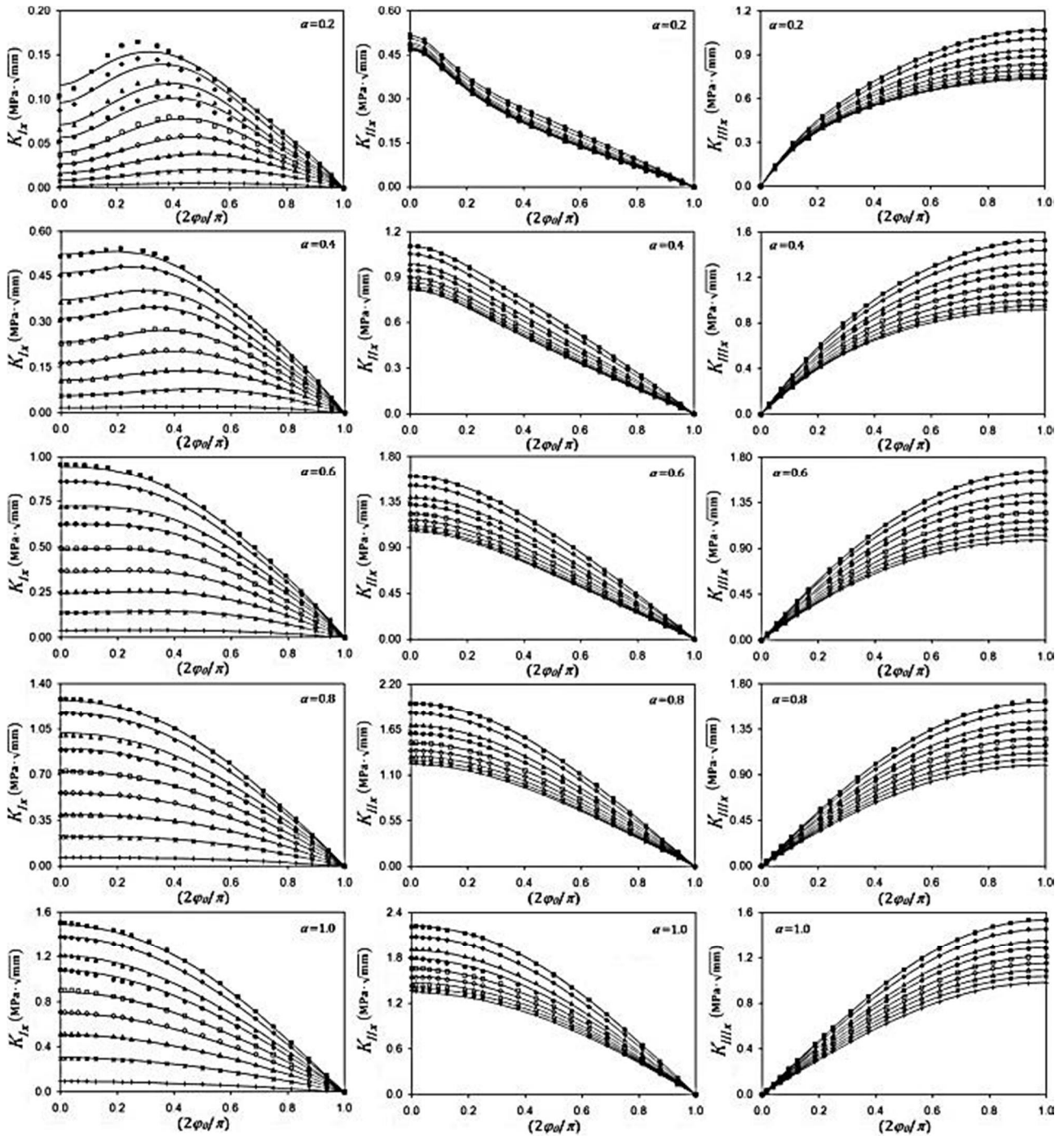
شکل 5 الف) ترک زیرسطحی بیضوی (ب) تبدیل مدل اجزا محدود ترک محصور شده در فضای بی‌نهایت به ترک زیرسطحی با کاهش  $h$  از  $4 \approx \infty$  به  $\beta=0.1$

تبدیل شده و ترک بیضوی محصور شده، زیرسطحی می‌شود. شکل 5ب تبدیل فضای بی‌نهایت به نیمه بی‌نهایت و مدل ترک زیرسطحی را نشان می‌دهد.

پارامتر بی‌بعد  $\beta=h/a$  به‌عنوان شاخص عمق ترک در ترک‌های زیرسطحی تعریف می‌شود. پژوهش‌های انجام شده در فضاهای دو بعدی و سه‌بعدی [13,4] نشان می‌دهد، اثر سطح آزاد بر ترک‌های زیرسطحی در  $\beta \leq 1$  رخ می‌دهد و در  $\beta > 1$  می‌توان ترک را در فضای بی‌نهایت فرض کرد. در این مطالعه برای بررسی اثر کوپلینگ مودها و اثر سطح آزاد فضای نیمه بی‌نهایت بر ضرایب شدت تنش ترک در بارگذاری برشی یکنواخت، با کاهش  $h$ ، ترک در  $0.05, 0.06, 0.08, 0.1, 0.14, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0$  مدل‌سازی و تحلیل شده است. بارگذاری برشی به‌طور جداگانه در دو راستای  $X$  و  $Y$  اعمال شده و ضرایب شدت تنش مود ترکیبی به روش اجزا محدود محاسبه شده‌اند. با داشتن مقادیر ضرایب شدت تنش در این دو راستا، می‌توان ضرایب شدت تنش ناشی از بار برشی یکنواخت در هر راستایی را مستقیماً محاسبه نمود. با توجه به این‌که مدل اجزا محدود در 5 مقدار  $\alpha$ ، 10 مقدار  $\beta$  (مقادیر ذکر شده و  $\beta=4 \approx \infty$ ) و دو راستای بارگذاری تحلیل شده است، عملاً 100 مدل اجزا محدود حل شده که حل هر مدل بسته به تعداد گره‌های آن بین 2 الی 4 ساعت به طول انجامیده است.

پدیده کوپلینگ مودها می‌تواند در برخی نواحی از سطوح ترک منجر به بسته شدن ترک و منفی شدن  $K_I$  محاسبه شده گردد. در این حالت، برای شبیه‌سازی و مطالعه دقیق ترک لازم است تا تماس بین سطوح آن که پدیده‌های غیرخطی است نیز مدل‌سازی گردد. در این صورت، مطالعه غیرخطی، پیچیدگی‌های مدل‌سازی زیاد و زمان تحلیل افزایش می‌یابد. برای گریز از این شرایط، همزمان با بار برشی یکنواخت اعمال شده به سطوح ترک، یک بار عمودی یکنواخت به سطوح ترک اعمال شده تا از بازشدگی سطوح





شکل 6 ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی بیضوی با  $\alpha$  و  $\beta$ های مختلف در اثر  $\tau_{zx}=1$  MPa

شکل 6 ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی بیضوی با  $\alpha$  و  $\beta$ های مختلف در اثر  $\tau_{zx}=1$  MPa

شده است. در روابط 6 با میل کردن  $\beta$  به سمت بی‌نهایت، توابع  $A_n$  که ضرایب روابط 5 به حساب می‌آیند به صفر میل نموده و نتیجتاً  $K_{Ix}$  و  $K_{Iy}$  به صفر و ضرایب شدت تنش مود برشی به روابط 4 مربوط به ترک در فضای بی‌نهایت میل می‌کنند. علاوه بر این، صفر بودن  $K_{IIIx}$ ،  $K_{IIy}$  و  $K_{Iy}$  در  $\varphi_0=0$  و  $K_{IIIy}$  در  $\varphi_0=\pi/2$  نیز در روابط 6 رعایت شده است.

در کنار قیود راهنما، انتخاب توان‌های مناسب برای  $\beta$  در رابطه 6، درجه 3 بودن ضرایب  $A_{ni}$  و 4 جمله بودن سری‌های روابط 5 با استفاده از سعی و خطا و تکرار به دست آمده‌اند. توابع برازش یعنی روابط 5، 64 ضریب ثابت

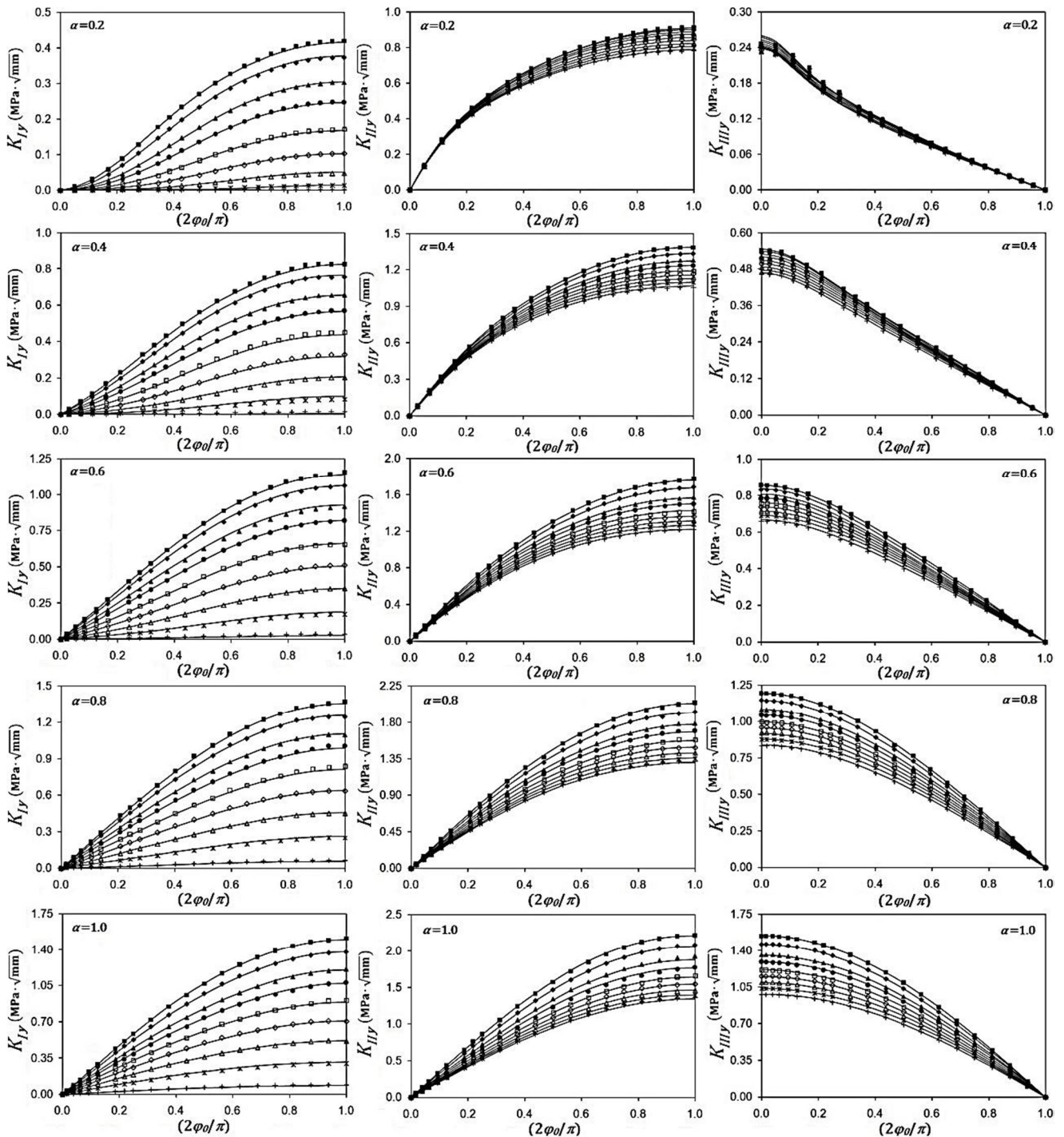
که در آن‌ها تابع  $A_n(\alpha, \beta)$  و  $c_1^*$  که فاصله بین نقطه  $Q$  از جبهه ترک تا محل تقاطع محور  $x$  و عمود بر جبهه ترک در نقطه  $Q$  است، به صورت زیر می‌باشد:

$$A_n(\alpha, \beta) = \frac{A_{n1}(\alpha)}{\beta^{0.25}} + \frac{A_{n2}(\alpha)}{\beta^{0.5}} + \frac{A_{n3}(\alpha)}{\beta^{0.75}} + \frac{A_{n4}(\alpha)}{\beta^{1.5}}$$

$$A_{ni}(\alpha) = \sum_{m=0}^3 A_{nim} \alpha^m, i=1..4$$

$$c_1^* = c(\alpha^2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)^{0.5} \quad (6)$$

در انتخاب شکل تابع برازش  $K_{Ix}$  و  $K_{Iy}$  از نتایج مطالعه [13] نیز بهره برده



تابع برازش  $\beta=1.0$   $\times \beta=0.5$   $\triangle \beta=0.3$   $\diamond \beta=0.2$   $\square \beta=0.14$   $\bullet \beta=0.1$   $\blacktriangle \beta=0.08$   $\circ \beta=0.06$   $\blacksquare \beta=0.05$  — تابع برازش

شکل 7 ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی بیضوی با  $\alpha$ ها و  $\beta$ های مختلف در اثر  $\tau_{zy}=1$  MPa

بر روی 6000 داده برازش شده است. نتایج حاصل از توابع برازش برای مقایسه و ارزیابی دقت آن‌ها در شکل‌های 6 و 7 به صورت خط ممتد نشان داده شده است. همان‌طور که مشهود است، انطباق نتایج تابع برازش و داده‌های عددی بسیار عالی است. برازش دقت بالای یک تابع سه متغیره با 64 ضریب ثابت بر روی 1000 داده، نشان دهنده انتخاب بسیار مناسب شکل کلی توابع برازش است. برای ارزیابی کمی دقت توابع برازش شده در محاسبه ضرایب شدت تنش، میانگین خطای نسبی بین داده‌های حاصل از تحلیل‌های

دارند که همان ضرایب  $A_{nim}$  در روابط 6 هستند. با تعیین این 64 ضریب ثابت برای هر کدام از روابط 5، برازش تابع روی مقادیر ضرایب شدت تنش تکمیل می‌گردد. برای این منظور از نسخه 9 نرم‌افزار دیتافیت استفاده شده است. روش برازش در مورد  $K_{IY}$  رگرسیون داده‌ها و در سایر موارد حداقل نمودن خطای نسبی بین داده‌ها و نتایج تابع برازش بوده است. مقادیر ضرایب  $A_{nim}$  برای هر یک از توابع برازش (5) در پیوست 1 آورده شده است. 1000 داده در برازش هر یک از توابع استفاده شده و در مجموع، 6 تابع

می‌شود. میانگین خطای نسبی بین داده‌های عددی و مقادیر محاسبه شده توسط توابع برازش در جدول 1 آورده شده است.

با توجه به دقت بالای توابع برازش، می‌توان از آن‌ها برای برون‌یابی ترک‌های با  $\beta < 0.05$  نیز استفاده نمود. زمانی که ترک خیلی به سطح فضا نزدیک شود، محدودیت‌های هندسی تعریف کانتورهای انتگرال حول جبهه ترک، مدل‌سازی را مشکل و بعضاً غیرممکن می‌نماید. انتخاب حداقل عدد 0.05 برای  $\beta$  در این پژوهش نیز ناشی از همین محدودیت‌ها بوده است. اما وجود توابع برازش با دقت بسیار بالا امکان برون‌یابی و بررسی ترک در مقادیر  $\beta < 0.05$  را میسر می‌سازد. علاوه بر این، زمانی که طول ترک در مقایسه با تغییرات توزیع تنش کوچک باشد، می‌توان توزیع‌های غیریکنواخت تنش را در روی ترک یکنواخت فرض نموده و از توابع برازش بهره جست. حتی در مواردی که توزیع تنش روی ترک قابل تقریب با توزیع تنش یکنواخت نباشد، مقادیر حاصل از توابع برازش ارائه شده می‌تواند تقریب اولیه برای ارزیابی مقادیر ضرایب شدت تنش باشد.

زمانی که بار برشی یکنواخت در راستای  $\theta$  نسبت به محور  $x$  اعمال می‌شود، تنها دو نقطه از جبهه ترک که راستای  $\theta$  عمود بر آن‌هاست مود II خالص و دو نقطه از جبهه ترک که این راستا بر آن‌ها مماس است، مود III خالص را تجربه کرده و به سایر نقاط همزمان بار برشی عمود و مماس بر جبهه ترک وارد می‌شود. به عبارت دیگر، حتی بدون در نظر گرفتن کوپلینگ مودها، نمی‌توان بار برشی را به گونه‌ای اعمال نمود تا تمام نقاط جبهه ترک مود II خالص یا مود III خالص را تجربه نماید. برای محاسبه ضرایب شدت تنش ترک بیضوی زیرسطحی تحت بار برشی یکنواخت در راستای دلخواه  $\theta$ ، با داشتن ضرایب شدت تنش در دو راستای  $x$  و  $y$  می‌توان از روابط زیر استفاده نمود:

$$\begin{aligned} K_I(\varphi_0) &= K_{Ix} \cos \theta + K_{Iy} \sin \theta \\ K_{II}(\varphi_0) &= K_{IIx} \cos \theta + K_{IIy} \sin \theta \\ K_{III}(\varphi_0) &= K_{IIIx} \cos \theta + K_{IIIy} \sin \theta \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن  $K_{Ix}, K_{Iy}, K_{IIx}, K_{IIy}, K_{IIIx}, K_{IIIy}$  در روابط 5 داده شده‌اند. به این ترتیب، با استفاده از روابط 5 می‌توان با دقت بالا ضرایب شدت تنش مود ترکیبی تمام نقاط جبهه ترک زیرسطحی بیضوی دلخواه را تحت بار برشی یکنواخت با راستای دلخواه به راحتی محاسبه نمود.

#### 5- نتیجه‌گیری

در این مطالعه از مدل‌سازی اجزا محدود پارامتریک برای محاسبه ضرایب شدت تنش مود ترکیبی ترک، تحت بارگذاری برشی یکنواخت اعمالی به سطوح آن در راستای اقطار ترک استفاده شد. مدل اجزا محدود با استفاده از حل تحلیلی ترک بیضوی محصور شده در فضای بی‌نهایت با میانگین خطای نسبی زیر 0/5 درصد صحت‌گذاری شد. پارامترهای بی‌بعد مدل شامل ضریب منظر ترک (در محدوده 0/2 تا 1/0) و نسبت عمق ترک به طول آن (در محدوده 0/05 تا 4/0 که معادل بی‌نهایت است) بودند. ضرایب شدت تنش مود ترکیبی برای تمام نقاط جبهه ترک محاسبه شده و کوپلینگ مودهای شکست مورد بررسی قرار گرفت. براساس چگونگی تغییرات ضرایب شدت تنش با ضریب منظر ترک، ترک دایره‌ای هم قطر با قطر بزرگ ترک بیضوی را می‌توان حالت بحرانی و حدی ترک بیضوی به حساب آورد. علاوه بر این، می‌توان انتظار داشت که ترک بیضوی زیرسطحی تحت بارگذاری برشی یکنواخت به گونه‌ای رشد نماید که به سمت دایره شدن پیش رود.

اجزا محدود و نتایج حاصل از روابط 5 محاسبه شده که برای  $K_{Ix}, K_{Iy}, K_{IIx}, K_{IIy}$  به ترتیب 1/7، 0/6 و 0/3 درصد و برای  $K_{Iy}, K_{IIy}, K_{IIIx}$  و  $K_{IIIy}$  برابر با 3، 0/6 و 0/8 درصد است. هرچند دقت این روابط در تخمین ضرایب شدت تنش ترک‌هایی با مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  متفاوت (از آن‌چه در برازش تابع استفاده شده است) بایستی مورد بررسی قرار گیرد، اما تا بدین جا مقادیر خطا، اطمینان خاطر لازم برای استفاده از این روابط در کاربردهای مهندسی را ایجاد می‌نماید.

#### 4- کوپلینگ مودها و بحث پیرامون نتایج

براساس نتایج به دست آمده از تحلیل‌های اجزا محدود، مقادیر ضرایب شدت تنش  $K_{Ix}, K_{Iy}, K_{IIx}, K_{IIy}$  با افزایش  $\alpha$  همواره افزایش می‌یابند. اما در مورد  $K_{IIIx}$ ، با افزایش  $\alpha$  از 0/2 به 0/6 افزایش و از 0/6 به 1 کمی کاهش می‌یابد که این رفتار از ترک در فضای بی‌نهایت نیز مشاهده شده است (شکل 4). بنابراین، در شرایط هندسه و بارگذاری یکسان، شاید بتوان ترک دایروی هم قطر با قطر بزرگ ترک بیضوی را حالت بحرانی و حدی ترک بیضوی به حساب آورد. با توجه به چگونگی تأثیر  $\alpha$  بر ضرایب شدت تنش، می‌توان انتظار داشت که ترک بیضوی زیرسطحی تحت بارگذاری برشی یکنواخت به گونه‌ای رشد نماید که به سمت دایره شدن پیش رود.

همان‌طور که انتظار می‌رفت، تأثیر نزدیک شدن به سطح و کاهش  $\beta$  بر ضرایب شدت تنش ترک قابل ملاحظه است. این تأثیر که با افزایش  $\alpha$  افزایش می‌یابد، در  $\beta = 0.05$  مقدار بیشینه  $K_{Ix}, K_{Iy}, K_{IIx}$  و  $K_{IIy}$  را به ترتیب 1/71، 1/66، 1/67 و 1/65 برابر مقادیر متناظر در  $\beta = \infty$  می‌نماید. به عبارت دیگر، در محدوده  $\beta$ های مورد مطالعه در این مقاله، اثر کوپلینگ مودهای برشی بر هم می‌تواند تا 70 درصد مقدار ضریب شدت تنش بدون وجود کوپلینگ باشد.

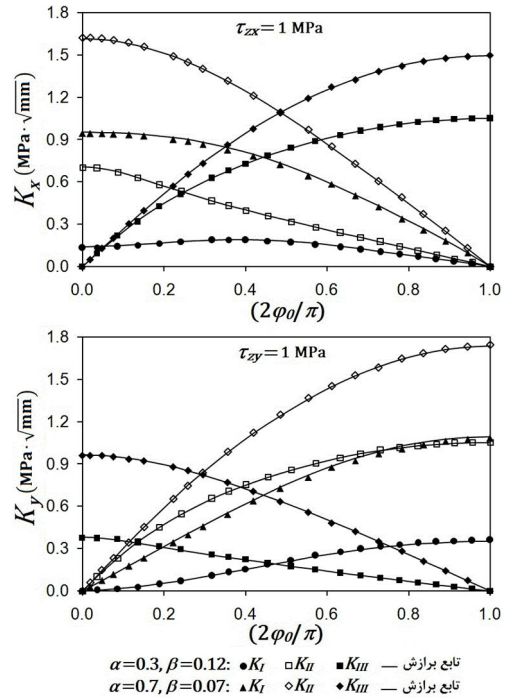
مقدار  $K_{Ix,max}$  به ترتیب 90 و 67 درصد مقادیر  $K_{Ix,max}$  و  $K_{IIx,max}$  و مقدار  $K_{Iy,max}$  به ترتیب 98 و 68 درصد مقادیر  $K_{Iy,max}$  و  $K_{IIy,max}$  می‌باشد. مشاهده می‌شود که در شرایطی که ترک تنها تحت بار برشی است، مود کششی تقریباً معادل با مود برشی امکان بروز می‌یابد. از آنجایی که مود مؤثر در رشد ترک در مطالعات خستگی کلاسیک مود کششی است، به هیچ وجه نمی‌توان از اثر کوپلینگ مودها در مطالعه رشد ترک صرف نظر نمود. اعداد ارائه شده تنها مربوط به  $\beta \geq 0.05$  بوده و در صورت کاهش  $\beta$  سهم این اثر قابل افزایش است. همچنین اثرات کوپلینگ در ترک‌های زیرسطحی بیضوی تحت بار برشی در  $\beta \leq 1$  بروز نموده و در  $\beta = 1$  می‌توان از آن صرف‌نظر نمود. به عبارت دیگر، اگر ترک به اندازه طول خود (نصف قطر بزرگ) از سطح فاصله داشته باشد می‌توان ترک را در فضای بی‌نهایت فرض و از روابط مربوطه استفاده نمود.

از شکل‌های 6 و 7 چنین بر می‌آید که نقطه بحرانی ترک برای مودهای I و II با مود III متفاوت است. در بارگذاری در راستای  $x$ ، نقطه بحرانی مود I و II نقطه  $\varphi_0 = 0$  ولی نقطه بحرانی از دیدگاه مود III نقطه  $\varphi_0 = \pi/2$  است. همچنین، مود I و II در  $\varphi_0 = \pi/2$  و مود III در  $\varphi_0 = 0$  در بارگذاری راستای  $y$  بحرانی است. برای تعیین نقطه بحرانی ترک در این شرایط بایستی از مدل‌های ارائه شده در محاسبه ضرایب شدت تنش معادل و یا مدل‌های ارائه شده در محاسبه نقطه بحرانی مود ترکیبی استفاده نمود [16,2].

برای صحت‌گذاری و برآورد دقت روابط 5 در تعیین ضرایب شدت تنش، برای دو ترک با  $\alpha = 0.3$ ،  $\beta = 0.12$  و  $\alpha = 0.7$ ،  $\beta = 0.07$  ضرایب شدت تنش به روش اجزا محدود و با استفاده از روابط 5 محاسبه و در شکل 8 نشان داده شده است. مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  این ترک‌ها به گونه‌ای انتخاب شده است که در فرایند برازش شرکت نکرده باشند. با توجه به شکل 8، دقت توابع برازش در محاسبه ضرایب شدت تنش ترک با هر مقدار  $\alpha$  و  $\beta$  صحت‌گذاری و تأیید

6- فهرست علائم

- $a$  نیم قطر بزرگ بیضی
- $A_n(\alpha, \beta)$  ضرایب توابع برازش
- $A_{ni}(\alpha)$  ضرایب توابع برازش
- $A_{nim}$  ضرایب توابع برازش
- $c$  نیم قطر کوچک بیضی
- $E$  ضریب ارتجاعی (GPa)
- $E(k)$  انتگرال نوع دوم بیضی
- $h$  عمق ترک
- $I_1$  تابعی از  $\nu$  و  $\alpha$
- $I_2$  تابعی از  $\nu$  و  $\alpha$
- $K(k)$  انتگرال اول دوم بیضی
- $K_I$  ضریب شدت تنش مود I
- $K_{II}$  ضریب شدت تنش مود II
- $K_{III}$  ضریب شدت تنش مود III
- $K_{Ix}$  ضریب شدت تنش مود I ناشی از اعمال بار برشی یکنواخت در جهت محور X
- $K_{IIx}$  ضریب شدت تنش مود II ناشی از اعمال بار برشی یکنواخت در جهت محور X
- $K_{IIIx}$  ضریب شدت تنش مود III ناشی از اعمال بار برشی یکنواخت در جهت محور X
- $K_{Iy}$  ضریب شدت تنش مود I ناشی از اعمال بار برشی یکنواخت در جهت محور Y
- $K_{IIy}$  ضریب شدت تنش مود II ناشی از اعمال بار برشی یکنواخت در جهت محور Y
- $K_{IIIy}$  ضریب شدت تنش مود III ناشی از اعمال بار برشی یکنواخت در جهت محور Y
- $\alpha$  ضریب منظر ترک
- $\beta$  نسبت عمق ترک به طول آن
- $\varphi_0$  زاویه جبهه ترک
- $\nu$  ضریب پواسون
- $\tau_0$  تنش برشی یکنواخت (MPa)
- $\tau_z$  تنش برشی یکنواخت اعمالی به سطح ترک (MPa)
- $\tau_{zx}$  تنش برشی یکنواخت اعمالی به سطح ترک در جهت X (MPa)
- $\tau_{zy}$  تنش برشی یکنواخت اعمالی به سطح ترک در جهت Y (MPa)
- $\theta$  زاویه تنش برشی  $\tau_z$  با محور X



شکل 8 مقایسه ضرایب شدت تنش حاصل از حل اجزا محدود با مقادیر تقریبی روابط 5 برای دو ترک زیرسطحی بیضوی تحت بار برشی یکنواخت در راستای X و Y

جدول 1 درصد میانگین خطای نسبی محاسبه شده برای صحه‌گذاری توابع برازش

مشخصات ترک	$K_{IIIy}$	$K_{IIy}$	$K_{Iy}$	$K_{IIIx}$	$K_{IIx}$	$K_{Ix}$	
	0/6	0/4	2/4	0/3	0/5	3/3	$\alpha=0.3, \beta=0.12$
	0/5	0/7	1/9	0/2	0/6	1/9	$\alpha=0.7, \beta=0.07$

شش رابطه تقریبی هر کدام با 64 ضریب ثابت بر روی نتایج اجزا محدود با دقت بسیار بالا برازش شد. متغیرهای روابط تقریبی شامل ضریب منظر ترک، نسبت عمق به طول ترک و زاویه جبهه ترک می‌باشند. در روابط برازش شده، با افزایش عمق ترک، ضرایب شدت تنش موده‌های برشی به روابط تحلیلی مربوط به ترک در فضای بی‌نهایت و ضریب شدت تنش مود کششی به صفر میل می‌نماید. میانگین خطای نسبی بین نتایج اجزا محدود و روابط تقریبی ارائه شده کمتر از 3/5 درصد برای مود I و کمتر از 1 درصد برای موده‌های برشی است. به کمک این روابط می‌توان به راحتی و با دقت بالا ضرایب شدت تنش مود ترکیبی تمام نقاط جبهه ترک زیرسطحی بیضوی دلخواه را تحت بار برشی یکنواخت با راستای دلخواه محاسبه نمود. این روابط تقریبی برای استخراج تابع وزن ترک‌های زیرسطحی بیضوی و نیز مطالعه رفتار خستگی آن‌ها بسیار کارا می‌باشند.

کوپلینگ موده‌های شکست زمانی قابل ملاحظه می‌شود که ترک حداقل به اندازه طول خود به سطح نیم فضا نزدیک شود و برای عمق‌های بیش از آن این پدیده قابل صرف‌نظر و ترک همانند ترک محصور شده در فضای بی‌نهایت خواهد بود. با نزدیک شدن ترک محصور شده در فضای بی‌نهایت به سطح نیم فضا تا  $\beta=0.05$ ، کوپلینگ موده‌های شکست موجب می‌شود که تحت بار برشی یکنواخت  $K_{III,max}$ ،  $K_{II,max}$ ،  $K_{I,max}$  به ترتیب 65، 67، 66، 71 درصد افزایش یابند. همچنین مود کششی بروز نموده و نسبت‌های  $K_{Ix,max}/K_{II,max}$ ،  $K_{Iy,max}/K_{II,max}$  به ترتیب تا 90 و 98 درصد افزایش یابند.



7- پیوست

ضرایب ثابت توابع برازش 5 که در روابط 6 آورده شده است.

برای  $K_{ly}$ :

$$A_{1im} = \begin{bmatrix} -2.06316 & 10.38180 & -13.39581 & 3.43171 \\ 3.67304 & -18.09363 & 20.99072 & -3.99059 \\ -1.64349 & 7.76987 & -7.45684 & 0.46664 \\ 0.02644 & -0.06709 & -0.05420 & 0.11020 \end{bmatrix}$$

$$A_{2im} = \begin{bmatrix} -0.73518 & 38.98580 & -95.61426 & 58.34234 \\ 2.26766 & -72.59767 & 172.44655 & -104.11112 \\ -1.62430 & 35.21080 & -80.50284 & 47.92875 \\ 0.11770 & -1.16202 & 2.30761 & -1.28830 \end{bmatrix}$$

$$A_{3im} = \begin{bmatrix} 12.75068 & -120.90822 & 235.91956 & -129.55049 \\ -23.32513 & 209.84185 & -402.53790 & 219.63078 \\ 11.09308 & -93.58211 & 175.95353 & -95.29510 \\ -0.34994 & 2.36179 & -4.10577 & 2.14062 \end{bmatrix}$$

$$A_{4im} = \begin{bmatrix} -8.45231 & 65.78144 & -123.50906 & 67.28962 \\ 14.89997 & -110.97929 & 205.05323 & -111.22376 \\ -6.80844 & 48.02060 & -86.99454 & 46.93522 \\ 0.18872 & -1.10636 & 1.85065 & -0.96466 \end{bmatrix}$$

برای  $K_{lx}$ :

$$A_{1im} = \begin{bmatrix} 0.85686 & -7.52139 & 13.25482 & -8.00228 \\ -1.34107 & 12.01879 & -23.18971 & 14.61952 \\ 0.50754 & -4.52674 & 10.28351 & -6.88390 \\ -0.00876 & 0.08307 & -0.24061 & 0.17386 \end{bmatrix}$$

$$A_{2im} = \begin{bmatrix} 1.64740 & -25.48366 & 33.88552 & -9.24381 \\ -4.00852 & 53.56048 & -73.13466 & 22.25087 \\ 2.18862 & -27.66217 & 38.41826 & -12.40180 \\ -0.08203 & 0.91678 & -1.36761 & 0.52673 \end{bmatrix}$$

$$A_{3im} = \begin{bmatrix} -4.13360 & 70.23010 & -116.65716 & 48.90345 \\ 9.68335 & -145.94207 & 244.03629 & -104.98878 \\ -5.21854 & 75.11087 & -126.45399 & 55.37491 \\ 0.19616 & -2.48871 & 4.31523 & -2.00222 \end{bmatrix}$$

$$A_{4im} = \begin{bmatrix} 1.12998 & -33.22632 & 60.88057 & -27.56300 \\ -3.36704 & 72.73553 & -133.03171 & 61.52961 \\ 2.03071 & -39.12638 & 71.63072 & -33.57866 \\ -0.09478 & 1.42675 & -2.63674 & 1.28320 \end{bmatrix}$$

برای  $K_{lly}$ :

$$A_{1im} = \begin{bmatrix} -0.42655 & 2.42756 & -4.83243 & 2.65154 \\ 0.63103 & -4.08187 & 8.80647 & -5.16317 \\ -0.29899 & 2.09052 & -4.43124 & 2.62047 \\ 0.00885 & -0.06726 & 0.14311 & -0.07979 \end{bmatrix}$$

$$A_{2im} = \begin{bmatrix} 3.76373 & -22.65112 & 43.11792 & -24.49948 \\ -6.44433 & 42.34311 & -85.29633 & 50.32209 \\ 3.13554 & -21.58078 & 44.53014 & -26.64235 \\ -0.08488 & 0.62983 & -1.33925 & 0.80939 \end{bmatrix}$$

$$A_{3im} = \begin{bmatrix} -5.91961 & 37.47420 & -75.73229 & 44.91337 \\ 9.92993 & -69.85501 & 150.11350 & -92.36415 \\ -4.76031 & 35.74988 & -78.84562 & 49.13177 \\ 0.12289 & -1.02256 & 2.34281 & -1.47894 \end{bmatrix}$$

$$A_{4im} = \begin{bmatrix} 2.82260 & -19.14826 & 40.38767 & -24.44978 \\ -4.66108 & 35.68744 & -80.31454 & 50.42188 \\ 2.24183 & -18.39430 & 42.41559 & -26.92634 \\ -0.05344 & 0.53444 & -1.26754 & 0.80993 \end{bmatrix}$$

برای  $K_{lix}$ :

$$A_{1im} = \begin{bmatrix} 0.07002 & 0.68320 & 0.99380 & -2.41154 \\ -0.23658 & -0.27590 & -5.03144 & 6.80218 \\ 0.24076 & -1.01775 & 5.26949 & -5.09919 \\ -0.01887 & 0.16629 & -0.42191 & 0.29927 \end{bmatrix}$$

$$A_{2im} = \begin{bmatrix} 1.36271 & -7.85053 & 2.95434 & 5.56969 \\ -2.88441 & 16.16573 & -4.46964 & -13.13651 \\ 1.16433 & -5.56834 & -4.09791 & 10.90983 \\ 0.00271 & -0.14352 & 0.78029 & -0.72780 \end{bmatrix}$$

$$A_{3im} = \begin{bmatrix} -4.61465 & 24.09027 & -22.02609 & -0.38890 \\ 10.10826 & -52.74390 & 48.89489 & 0.03166 \\ -4.92977 & 24.38048 & -17.89537 & -5.10215 \\ 0.10124 & -0.35097 & -0.30403 & 0.68759 \end{bmatrix}$$

$$A_{4im} = \begin{bmatrix} 3.02110 & -15.51034 & 15.93356 & -1.94221 \\ -6.63228 & 33.99197 & -35.32631 & 4.73544 \\ 3.34999 & -16.46398 & 15.06492 & -0.12442 \\ -0.08320 & 0.31951 & -0.04710 & -0.25861 \end{bmatrix}$$

برای  $K_{lly}$ :

$$A_{1im} = \begin{bmatrix} 2.24661 & -15.08291 & 23.78151 & -10.53737 \\ -4.31803 & 28.50738 & -44.73395 & 19.63735 \\ 2.05778 & -13.19657 & 20.61607 & -8.90970 \\ -0.05492 & 0.32555 & -0.48406 & 0.19602 \end{bmatrix}$$

$$A_{2im} = \begin{bmatrix} -12.55046 & 70.00592 & -107.31469 & 46.76421 \\ 23.38045 & -127.49180 & 193.10368 & -82.98801 \\ -10.78252 & 56.88237 & -84.05895 & 34.95840 \\ 0.26394 & -1.23523 & 1.64767 & -0.58377 \end{bmatrix}$$

$$A_{3im} = \begin{bmatrix} 24.95221 & -132.61460 & 197.99579 & -85.63185 \\ -46.51489 & 241.42639 & -355.34276 & 151.44520 \\ 21.70545 & -108.25946 & 154.65207 & -63.65291 \\ -0.54236 & 2.35232 & -2.97398 & 1.02824 \end{bmatrix}$$

$$A_{4im} = \begin{bmatrix} -14.78486 & 78.78790 & -117.23942 & 50.98014 \\ 27.63778 & -144.32263 & 211.86367 & -90.90562 \\ -13.08027 & 65.59802 & -93.52592 & 38.90674 \\ 0.33807 & -1.48134 & 1.88551 & -0.67829 \end{bmatrix}$$

برای  $K_{lix}$ :

$$A_{1im} = \begin{bmatrix} -1.06740 & 6.73505 & -11.70302 & 6.17825 \\ 1.80316 & -12.16356 & 21.46545 & -11.56822 \\ -0.83549 & 5.69711 & -9.81715 & 5.31128 \\ 0.01729 & -0.11183 & 0.20016 & -0.11609 \end{bmatrix}$$

$$A_{2im} = \begin{bmatrix} 3.28249 & -17.94167 & 33.00008 & -19.76946 \\ -4.61453 & 28.09369 & -57.43723 & 37.17803 \\ 1.91822 & -12.47806 & 26.85652 & -17.96069 \\ -0.03565 & 0.28776 & -0.69282 & 0.48752 \end{bmatrix}$$

$$A_{3im} = \begin{bmatrix} -4.51816 & 26.90587 & -51.87354 & 31.31747 \\ 6.13042 & -43.20026 & 93.65330 & -60.79364 \\ -2.59285 & 20.51569 & -46.31846 & 30.53733 \\ 0.06012 & -0.56995 & 1.34037 & -0.88460 \end{bmatrix}$$

$$A_{4im} = \begin{bmatrix} 2.32394 & -14.69440 & 27.92203 & -16.33430 \\ -3.28097 & 24.61845 & -51.74808 & 32.24063 \\ 1.44378 & -12.01974 & 26.05065 & -16.39364 \\ -0.03736 & 0.35716 & -0.78665 & 0.48768 \end{bmatrix}$$

8- مراجع

[1] S. Deng, X. Han, X. Qin, S. Huang, Subsurface crack propagation under rolling contact fatigue in bearing ring, *Science China Technological Sciences*, Vol. 56, No. 10, pp. 2422-2432, 2013.

- [10] E. Atroshchenko, S. Potapenko, G. Glinka, Stress intensity factor for an embedded elliptical crack under arbitrary normal loading, *International Journal of Fatigue*, Vol. 31, pp. 1907–1910, 2009.
- [11] A. Roy, T. K. Saha, Weight function for an elliptic crack in an infinite medium. I. Normal loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 103, pp. 227–241, 2000.
- [12] A. Mazzu, A mode II weight function for subsurface cracks in a two-dimensional half-space, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 25, pp. 911–916, 2002.
- [13] R. Ghajar, J. Alizadeh K., Mixed mode stress intensity factors for elliptical subsurface cracks in an elastic half-space subjected to a uniform normal loading, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 34, pp. 1199–1208, 2013.
- [14] M. Guagliano, L. Vergani, Experimental and numerical analysis of subsurface cracks in railway wheels, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 72, pp. 255–269, 2005.
- [15] T. K. Saha, A. Roy, Weight function for an elliptic crack in an infinite medium. II. Shear loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 112, pp. 1–21, 2001.
- [16] P. Zerres, M. Vormwald, Review of fatigue crack growth under non-proportional mixed-mode loading, *International Journal of Fatigue*, Vol. 58, pp. 75–83, 2014.
- [2] R. Ghajar, J. Alizadeh K., Prediction of the subsurface crack growth lifetime in railroad wheel of the Iranian railway system, *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology*, Vol. 13, pp. 11–24, 2010. (In Persian)
- [3] A. Ekberg, E. Kabo, Fatigue of railway wheels and rails under rolling contact and thermal loading-an overview, *Wear*, Vol. 258, pp. 1288–1300, 2005.
- [4] M. Beghini, L. Bertini, V. Fontanari, A weight function for 2D subsurface cracks under general loading conditions, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, pp. 427–439, 2008.
- [5] G. R. Irwin, The crack extension force for a part-through crack in a plate, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of ASME, pp. 651–654, 1962.
- [6] M. K. Kassir, G. C. Sih, Geometric discontinuities in elastostatics, *Journal of Mathematics and Mechanics*, Vol. 16, pp. 927–948, 1967.
- [7] R. C. Shah, A. S. Kobayashi, Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 3, pp. 71–96, 1971.
- [8] K. Vijayakumar, S. N. Atluri, An embedded elliptical crack, in an infinite solid, subject to arbitrary crack-face tractions, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, pp. 88–95, 1981.
- [9] T. Nishioka, S. N. Atluri, Analytical solutions for embedded elliptical cracks, and finite element alternating method for elliptical surface cracks, subjected to arbitrary loadings, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 17, pp. 267–288, 1983.