ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مدل‌سازی دولایه دیواره شریان با فرض ماده هایپرالاستیک

امین امیرخانی[1]، علیرضا فتوحی[2]*

1- کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد
* یزد، صندوق پستی 741-89195، afotuhi@yazd.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 04 دی 1396
پذیرش: 09 بهمن 1396
ارائه در سایت: 02 اسفند 1396

کلید واژگان:
مدل‌سازی دیواره شریان
مکانیک محیط‌های پیوسته
معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی
روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته

چکیده

مدل‌سازی بافت‌های بیولوژیک نقش مهمی در درک رفتار بافت و توسعه مواد مصنوعی برای کاربردهای پزشکی ایفا می‌کند و یک گام اساسی در توسعه مدل‌های پیش‌بینی‌کننده برای کمک به تحقیقات در محدوده گسترده‌ای از کاربردها شامل کاربردهای پزشکی و مهندسی بافت است. توابع انرژی کرنشی مختلف تا به امروز برای مدل‌سازی شریان‌ها معرفی شده‌اند. تابع انرژی کرنشی نولان جدیدترین تابع انرژی کرنشی معرفی شده است. مدل‌سازی شریان به صورت دو لایه با استفاده از این تابع انرژی کرنشی تاکنون انجام نشده است. در این تحقیق مدل‌سازی دیواره شریان به صورت دولایه شامل لایه‌های مدیا و ادوانتیشا و با فرض هایپرالاستیک انجام شده است. ابتدا معادلات حاکم بر مسأله با استفاده از روابط محیط‌های پیوسته استخراج و شرایط مرزی شامل فشار داخلی شریان، نیروی محوری و ممان پیچشی تحت شرایط استاتیکی بر آن اعمال‌شده‌اند مؤلفه‌های تنش کوشی با استفاده از روابط مکانیک محیط‌های پیوسته مشخص شدند و سپس معادلات تعادل در مختصات استوانه‌ای با استفاده از تنش‌های کوشی به دست آمده‌اند. معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی معادلات حاصل از این روند هستند که با استفاده از روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته حل شده‌اند و تغییرات تنش در دیواره شریان به دست آمده است. ابتدا مدل‌سازی شریان به صورت تک لایه شامل لایه مدیا انجام شده و نتایج مدل‌سازی با داده‌های تجربی مقایسه شده‌اند. مقایسه بین تنش‌ها در دیواره شریان با داده‌های تجربی نشان داد که تابع انرژی کرنشی نولان برای انجام مدل‌سازی مناسب است. سپس مدل‌سازی شریان به صورت دولایه شامل لایه‌های مدیا و ادوانتیشا انجام و تنش‌های ایجاد شده در دیواره شریان به دست آمده‌اند.

Two-layer artery wall modeling with hyperelastic material assumption

Amin Amirkhani, Ali Reza Fotuhi*

Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran.
* P.O.B. 89195-741 Yazd, Iran, afotuhi@yazd.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 25 December 2017
Accepted 29 January 2018
Available Online 21 February 2018

Keywords:
Artery wall modeling
Continuum mechanics
Nonlinear partial differential equations
Generalized differential quadrature method

ABSTRACT

Biologic tissues modeling play an important role in understanding the tissue behavior and development of synthetic materials for medical applications. It is also a vital action to develop the predictive models for a wide range of uses including medical and tissue engineering. Various strain energy functions have been introduced to model arteries to date. The newest introduced strain energy function is the Nolan strain energy function. Two-layer arterial modeling using this strain energy function has not been performed so far. In this paper, modeling the arteries was carried out in the form of double layers including media and adventitia and hyperelastic material assumption. At first, governing equations were driven based on continuum mechanics. Boundary conditions including inner pressure of artery, axial load and torque as well as static equilibrium were applied. Moreover, Cauchy stress components were gotten by using the continuum mechanics relations. Then, the equilibrium equations in cylindrical coordinate were obtained by using the Cauchy stress. Stress distribution through the artery wall was specified by solving the resulting nonlinear partial differential equations based on generalized differential quadrature method. In the beginning, the artery modeling was conducted in the form of monolayer including the media layer and the results were compared with experimental ones, comparison between stresses in the artery wall and experimental data showed that the volcanic energy function of Nolan is suitable for modeling. After that, the stress distribution was obtained by artery modeling in the form of double layers including the media and adventitia layers.

1- مقدمه

رفتار مکانیکی بافت‌های نرم بیولوژیک در چند سال اخیر مورد توجه ویژه مراجع علمی قرار گرفته است و این امر به ویژه از چشم‌انداز مکانیک محیط‌های پیوسته و به خصوص در مورد بافت دیواره شریان مورد توجه بیشتر است [1]. خصوصیات بافت نرم مختص بافت‌های پیوسته نظیر ماهیچه‌ها، شریان‌ها و مغز هستند. کلاژن بخش عمده‌ای از این بافت‌هاست. قسمت باقی‌مانده شامل الاستین، تیکولین و یک ژل هیدروفیل است که آن را ماده زمینه می‌گویند [2]. تمرکز بر بافت‌شناسی دیواره شریانی متشکل از سه لایه مجزاست. لایه اینتیما[1]، لایه مدیا[1] و لایه ادوانتیشا[2]، بخش اینتیما

[1] Intima

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

A. Amirkhani, A. R. Fotuhi, Two-layer artery wall modeling with hyperelastic material assumption, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 03, pp. 75-85, 2018 (in Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.3.32.3]

درونی‌ترین لایه است. مدیا لایه میانی شریان‌ها و شامل یک شبکه پیچیده از الیاف کلاژن است. لایه ادوانتیشا خارجی‌ترین لایه شریان‌ها و عمدتاً از سلول‌های فیبرو پلاست و فیبروسیت تشکیل شده است. ماده زمینه بافتی و الیاف کلاژن منظم در دسته‌های ضخیم سازنده این لایه هستند. کلاژن به صورت قابل توجهی به قدرت و ثبات دیواره شریان کمک می‌کند. الیاف کلاژن لایه ادوانتیشا در شرایط بدون تنش به صورت موج‌دار (مجعد) در ماده زمینه نرم تعبیه شده‌اند که همین امر باعث کمتر شدن سفتی لایه ادوانتیشا در برابر لایه مدیا در شرایط بدون تنش می‌شود. شریان‌ها در طول حیات خود به بیماری‌هایی مختلفی مبتلا می‌شوند که شایع‌ترین آن‌ها بیماری آترواسکلروسیس است.

در مورد خواص مکانیکی شریان، آرایش منظم بسیار سازمان‌یافته‌ای از دو دسته الیاف کلاژن هلیکال باعث می‌شود تا دیواره شریان (و لایه‌های آن) ناهمسانگرد باشند. در اغلب مسائل از تنش ناشی از حرکت سیال در داخل یا خارج از دیواره شریان صرف‌نظر می‌شود. از این‌رو شریان را می‌توان به عنوان یک جامد همگن در نظر گرفت. به طور کلی یک شریان قرار گرفته در داخل بدن تحت پیش کرنش‌های محوری است. این امر به وسیله فاچز در سال 1900 [3] اولین بار در هنگام جراحی و برای برداشتن یک قسمت کوتاه از بدن گزارش شد. شریان در داخل بدن مشابه یک ماده پیش کشیده شده تحت فشار داخلی است و استفاده از یک تئوری لازم و ضروری است که نتیجه تغییر شکل‌های محدود را به واقعیت برساند. آزمایش‌های دینامیکی روی بافت شریان رفتار ویسکوالاستیک را نشان می‌دهد. شریان‌ها تحت بارگذاری متناوب مقاومت نشان می‌دهند و در شرایط تنش آرام تحت کشش ثابت و بارگذاری ثابت خزش نشان می‌دهند. هنگامی‌که بارگذاری روی دیواره شریان بیش از محدوده فیزیولوژیک باشد، و همان‌گونه که در فرآیندهای مکانیکی مانند آنژیوپلاستی رخ می‌دهند، مکانیزم‌های آسیب و شکست فعال می‌شوند. رفتار مکانیکی دیواره شریان یک رفتار ناهمسانگرد غیرخطی و تقریباً تراکم‌ناپذیر است. مدل‌سازی الیاف کلاژن براساس جهت‌گیری الیاف و پراکندگی جهت‌گیری‌های الیاف انجام می‌گیرد که اثر قابل‌توجهی روی پاسخ‌های مکانیکی بافت دارد. برای مدل‌سازی شریان‌ها یک ماده تقویت شده با الیاف و معمولاً به شکل یک استوانه سه لایه دارای خواص ناهمسانگردی و تقریباً تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شوند. فری در سال 1969 [4] اولین مطالعه درزمینه ناهمسانگردی شریان را انجام داد. در سال 2000 یک مدل ساختاری برای توصیف پاسخ غیرفعال مکانیکی بافت شریان به وسیله هولزآپفل، گاسر و آگدن [5] ارائه شد. مدل ارائه شده در این مطالعه معماری دیواره شریان را به عنوان یک لوله جدار ضخیم دولایه شامل مدیا و ادوانتیشا در نظر گرفته است. در سال 2006 یک مدل‌سازی از لایه‌های شریان با در نظر گرفتن توزیع جهت‌گیری الیاف کلاژن به وسیله گاسر، آگدن و هولزآپفل [6] انجام شد. هدف از این مدل‌سازی توسعه یک چارچوب محیط پیوسته است که بتواند پراکندگی جهت‌گیری الیاف کلاژن را به خوبی نشان بدهد. تجربه‌های گسترده نشان می‌دهد که بسیاری از مراقبت‌های بالینی مربوط به بافت‌های نرم می‌توانند در چارچوب مکانیک محیط‌های پیوسته مورد بررسی قرار گیرند. مثلاً بسته شدن شریان در سال 2002 به وسیله گاسر و همکاران [7] یا مسأله آنژیوپلاستی با بالون در سال 2002 به وسیله هولزآپفل [8] مورد بررسی قرار گرفت و پارگی آئوریسم به وسیله هامفری در سال 2000 [9] نمونه‌های خوبی از کاربردها در این زمینه است. در سال 2014 نولان و همکاران [10] یک فرمول هایپرالاستیک ناهمسانگرد جدید برای مدل‌سازی بافت نرم پیشنهاد کردند، زیرا در مدل تراکم‌پذیر هولزآپفل و همکاران قسمت ناهمسانگرد مدل از نامتغیرهای ناهمسانگرد هم‌حجم استفاده شده است؛ بنابراین نسبت به تغییر شکل‌های حجمی حساس نیست. به منظور مدل کردن درست رفتار ناهمسانگرد تراکم‌پذیر آن‌ها مدل MA [3] (مدل غیرایزوتروپ اصلاح‌شده) را ارائه کردند که جدیدترین مدل ارائه شده برای مدل‌سازی دیواره شریان است. پس از آن هم مدل‌سازی‌های زیادی برای شریان‌ها انجام شد، از جمله متحدی و همکاران در سال 2016 [11] به تحلیل خمش در دیواره دو لایه شریان با فرض پراکندگی الیاف پرداختند که البته این مدل هم با فرض تراکم‌ناپذیری انجام شد. هرچند در تمامی مدل‌ها یادشده برای شریان‌ها از تنش‌های برشی ناشی از حرکت سیال در داخل یا خارج از شریان صرف‌نظر شد، اما برای مدل‌سازی میکرو رگ‌ها باید توجه داشته باشیم که تغییرات تنش برشی در میکرو رگ‌ها با توجه به آسیب رساندن به لایه اندوتلیال و تغییر در نفوذپذیری و رسوب جرم در داخل میکرو رگ‌ها به عنوان عامل اصلی تشکیل پلاک چربی دارای اهمیت زیادی است و جزء فاکتورهای مهم در ایجاد بیماری‌های قلبی و عروقی محسوب می‌شود [12].

در این مقاله برای نخستین بار مدل‌سازی دیواره شریان به صورت دو لایه با استفاده از تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] انجام می‌شود. دیواره شریان یک استوانه جدار ضخیم دولایه شامل لایه‌های مدیا و ادوانتیشا و به صورت ناهمسانگرد با تراکم‌پذیری خیلی کم در نظر گرفته می‌شود. مدل‌سازی با اعمال شرایط مرزی مناسب انجام می‌شود و توزیع تنش‌ها در دیواره شریان به دست می‌آیند.

2- معادلات حاکم

در این بخش معادلات کلی که توصیف پیوستگی، تغییر شکل‌ها و تنش‌های هایپرالاستیک ماده را فراهم می‌کنند، بیان می‌شود. به طور کلی شریان برای بررسی تغییر شکل‌ها به عنوان یک لوله جدار ضخیم استوانه‌ای در نظر گرفته می‌شود که تحت بارگذاری‌های مختلف قرار دارد [5]. برای بررسی تغییر شکل‌های شریان براساس روابط مکانیک محیط‌های پیوسته همان‌گونه که در شکل 1 مشخص است، مختصات اولیه با Ω_0 و مختصات تغییر شکل یافته با Ω نشان داده شده است. برای نشان دادن تغییر شکل‌ها از نمادگذاری $\chi: \Omega_0 \rightarrow R^3$ استفاده می‌شود که این تغییر شکل مختصات اولیه $X \in \Omega_0$ را به موقعیت $x = \chi(X) \in \Omega$ در مختصات تغییر شکل یافته Ω منتقل می‌کند. تبدیل χ هر نقطه از مختصات اولیه را به مختصات تغییر شکل یافته انتقال می‌دهد.

همان‌گونه که در شکل 2 مشخص است مختصات اولیه و تغییر شکل یافته در مختصات استوانه‌ای برای شریان مورد نظر به صورت رابطه (1) است.

$$\begin{Bmatrix} R_i \leq R \leq R_o \\ 0 \leq \Theta \leq 2\pi - \alpha \\ 0 \leq Z \leq H \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi: \Omega_0 \rightarrow R^3 \\ \chi = r\hat{e}_r + \theta\hat{e}_\theta + z\hat{e}_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_i \leq r \leq r_o \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h \end{Bmatrix} \quad (1)$$

متغیرهای r و θ و z در مختصات تغییر شکل یافته براساس مقاله هولزآپفل و همکاران در سال 2000 [5] به صورت روابط (2-4) به دست می‌آیند [5].

$$\theta = k\Theta + Z\frac{\Phi}{H} \quad (2)$$

که در رابطه (2) $k = 2\pi/2\pi - \alpha$ تعریف‌شده است و بیان‌کننده زاویه

[1] Media
[2] Adventitia
[3] Modified anisotropic model

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.3.32.3]

بازشدگی مناسب لوله در مختصات بدون تنش (مختصات اولیه) است، α زاویه قطاع بازشدگی و θ مختصه دوم دستگاه مختصات استوانه‌ای در مختصات اویلرین، Θ مختصه دوم در دستگاه اولیه، Φ زاویه پیچش استوانه ناشی از پیچ‌خوردگی و Z مختصه سوم دستگاه مختصات استوانه‌ای برای حالت اولیه، $0 \le Z \le H$ به صورت رابطه (3) است.

$$z = \lambda_z Z \tag{3}$$

که در رابطه (3) λ_z کشش محوری در جهت محور z است.

برای بیان تغییر حجم می‌توان برای دو استوانه اولیه و تغییر شکل یافته رابطه (4) را نوشت.

$$J = \frac{dv}{dV} = \frac{2\pi\left(r^2 - r_i^2\right)z}{(2\pi - \alpha)\left(R^2 - R_i^2\right)Z} \tag{4}$$

رابطه مناسب برای به دست آوردن شعاع شریان در مختصات تغییر شکل یافته به صورت رابطه (5) بیان می‌شود.

$$\gamma = \sqrt{\frac{J}{k\lambda_z}\left(R^2 - R_i^2\right) + r_i^2} \tag{5}$$

بنابراین χ به صورت رابطه (6) خواهد بود.

$$\chi = \left(\sqrt{\frac{J}{k\lambda_z}\left(R^2 - R_i^2\right) + r_i^2}\right)\hat{e}_r + \left(k\Theta + Z\frac{\Phi}{H}\right)\hat{e}_\theta + (\lambda_z Z)\hat{e}_z \tag{6}$$

2-1- کشش‌های محوری در مختصات استوانه‌ای

به طور کلی کشش محوری از رابطه $\lambda = dl^*/dl$ به دست می‌آید. در این‌جا کشش محوری در راستای جهت‌های (r, θ, z) به وسیله رابطه‌های (7-9) بیان‌شده‌اند.

$$\lambda_r = \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{JR}{rk\lambda_z} \tag{7}$$

$$\lambda_\theta = \frac{r}{R}\frac{\partial \theta}{\partial \Theta} = \frac{rk}{R} \tag{8}$$

$$\lambda_z = \frac{z}{Z} \tag{9}$$

زاویه پیچش هم برای توصیف تمامی تغییر شکل‌های ممکن در لوله استوانه‌ای باید تعریف گردد. این زاویه براساس رابطه (10) بیان شده است [5].

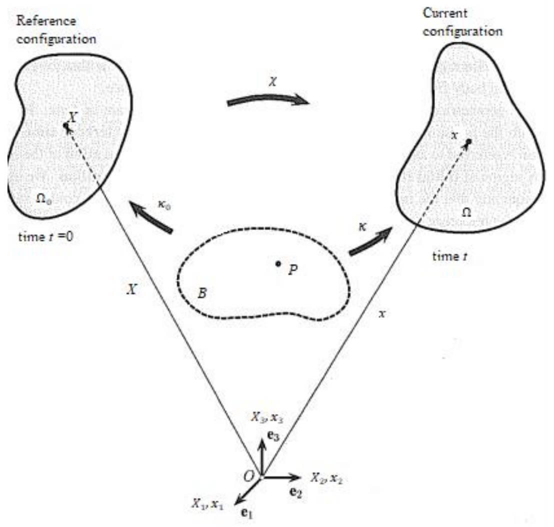

Fig. 1 deformation of initial coordinates to deformed coordinates [13]

شکل 1 تغییر شکل از مختصات اولیه به مختصات تغییر شکل یافته [13]

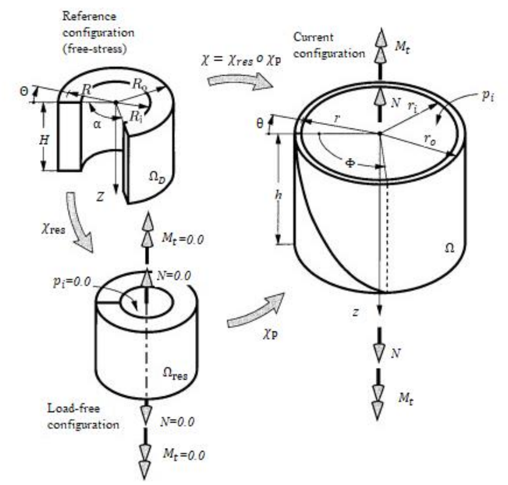

Fig. 2 Boundary conditions on the arteries [5]

شکل 2 شرایط مرزی روی شریان [5]

$$\gamma = r\frac{\Phi}{h} \tag{10}$$

تانسور گرادیان تغییر شکل $F(X) = \partial_\chi(X)/\partial(X)$ است و در مختصات استوانه‌ای به صورت رابطه (11) بیان می‌شود [13].

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R}\frac{\partial r}{\partial \Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r\frac{\partial \theta}{\partial R} & \frac{r}{R}\frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & r\frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \tag{11}$$

با انجام مشتقات مربوط به درایه‌های تانسور رابطه (11) گرادیان تغییر شکل در مختصات استوانه‌ای برای حالت سه‌بعدی به صورت رابطه (12) بیان می‌شود.

$$F = \lambda_r \hat{e}_r \otimes \hat{E}_R + \lambda_\theta \hat{e}_\theta \otimes \hat{E}_\Theta + \gamma\lambda_z \hat{e}_\theta \otimes \hat{E}_Z + \lambda_z \hat{e}_z \otimes \hat{E}_Z \tag{12}$$

تانسور تغییر شکل گرین-کوشی راست در مختصات لاگرانژین به صورت رابطه (13) بیان شده است. $C = F^T F$

$$C = \lambda_r^2 \hat{E}_R \otimes \hat{E}_R + \lambda_\theta^2 \hat{E}_\Theta \otimes \hat{E}_\Theta + \gamma\lambda_z\lambda_\theta(\hat{E}_\Theta \otimes \hat{E}_Z + \hat{E}_Z \otimes \hat{E}_\Theta) + \lambda_z^2(1+\gamma^2)\hat{E}_Z \otimes \hat{E}_Z \tag{13}$$

و تانسور کوشی چپ هم از گرادیان تغییر شکل براساس رابطه $B = FF^{\mathrm{T}}$ به صورت رابطه (14) بیان شده است.

$$B = \lambda_r^2 \hat{e}_r \otimes \hat{e}_r + (\lambda_\theta^2 + \gamma^2\lambda_z^2)\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_\theta + \gamma\lambda_z^2(\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_z + \hat{e}_z \otimes \hat{e}_\theta) + \lambda_z^2 \hat{e}_z \otimes \hat{e}_z \tag{14}$$

از تانسورهای کوشی به دست آمده و درایه برشی که در تانسور دیده می‌شود مشخص است که تغییر شکل‌های ماده تغییر شکل‌های اصلی نیستند. به عبارت دیگر درایه‌های تانسور کوشی مستقل خطی نیستند و این مسأله ادامه روابط و حل معادلات نهایی حاکم بر مسأله را با مشکل مواجه خواهد کرد. برای رفع این مشکل باید تانسور کوشی حول یک محور دوران داده شود تا درایه‌های غیراصلی تانسور کوشی صفر شوند و در واقع تغییر شکل‌های اصلی به دست آیند. برای این کار کشش‌های محوری اصلی رابطه (15) در نظر گرفته شده است.

$$\lambda_i, i = \{1,2,3\} \tag{15}$$

تانسور کوشی حول محور r دوران داده شده و بنابراین بردارهای یکه رابطه (16) برای دوران در نظر گرفته شده است.

$$V^{(1)} = \hat{e}_r, \quad V^{(2)} = \cos\psi\hat{e}_\theta + \sin\psi\hat{e}_z, \quad V^{(3)} = -\sin\psi\hat{e}_\theta + \cos\psi\hat{e}_z \tag{16}$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.3.32.3]

تانسور کوشی چپ برای کشش‌های اصلی از رابطه (17) به دست می‌آید.

$$B = \lambda_1^2 V^{(1)} \otimes V^{(1)} + \lambda_2^2 V^{(2)} \otimes V^{(2)} + \lambda_3^2 V^{(3)} \otimes V^{(3)} \qquad (17)$$

می‌دانیم که شرط برابری دو تانسور این است که درایه‌های متناظر آن‌ها با یکدیگر برابر باشند؛ بنابراین معادلات (17,14) با توجه به رابطه (15) مربوط به تانسور کوشی چپ با یکدیگر برابر قرار داده می‌شوند. در نتیجه روابط (18-21) به دست می‌آیند.

$$\lambda_r = \lambda_1 \qquad (18)$$

$$\lambda_\theta^2 + \gamma^2 \lambda_z^2 = \lambda_2^2 \cos^2\psi + \lambda_3^2 \sin^2\psi \qquad (19)$$

$$\gamma \lambda_z^2 = \lambda_2^2 \sin\psi\cos\psi - \lambda_3^2 \sin\psi\cos\psi \qquad (20)$$

$$\lambda_z^2 = \lambda_2^2 \sin^2\psi + \lambda_3^2 \cos^2\psi \qquad (21)$$

که نتیجه به صورت روابط (23,22) به دست می‌آید.

$$\lambda_\theta = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_z} \qquad (22)$$

$$\psi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\gamma(\lambda_z)^2}{(\lambda_\theta)^2 - (\lambda_z)^2 + \gamma^2 - 1}\right) \qquad (23)$$

2-2-تابع انرژی کرنشی مناسب برای مدل‌سازی دیواره شریان

در مطالعات گذشته توابع انرژی کرنشی زیادی برای توصیف پاسخ مکانیکی دیواره شریان‌ها پیشنهاد شده و از آن‌ها برای مدل‌سازی و بررسی رفتار مکانیکی دیواره شریان‌ها استفاده شده است. بسیاری از مدل‌سازی‌ها درگذشته براساس مدل‌سازی لوله جدار نازک بوده که به هیچ وجه دارای پاسخ تنش-کرنش مناسب برای دیواره شریان‌ها نیست. بعضی توابع انرژی کرنشی با فرض هم‌سانگردی در نظر گرفته شده و مدل‌سازی‌ها براساس مدل‌سازی جدار ضخیم هم‌سانگرد و تراکم‌ناپذیر انجام شده است که این روش به پاسخ مکانیکی شریان نزدیک‌تر است، اما با توجه به ناهمسانگردی دیواره شریان به دلیل وجود الیاف کلاژن و نقش مهم و حیاتی آن‌ها در تحمل بارهای وارده از دقت لازم برخوردار نیست. مطالعات جدید و معتبرتر با فرض‌های ناهمسانگردی و تراکم‌ناپذیری ارائه شدند که به پاسخ مکانیکی شریان نزدیک‌تر هستند.

هوپمن و همکاران در سال 1970 [14] تابع انرژی کرنشی که برای بیان معادلات ساختاری حاکم بر رفتار مکانیکی دیواره شریان است را به صورت تابع چندجمله‌ای رابطه (24) در نظر گرفتند.

$$W = w(I_1 - 3, I_2 - 3, I_3 - 1) \qquad (24)$$

I_1، I_2 و I_3 نامتغیرهای کرنش الاستیک غیرخطی هستند و این تابع انرژی فقط تابعی از I_1، I_2 و I_3 است.

در سال 1979 کاسیانو و همکاران [15] از تابع انرژی کرنشی به صورت ترکیبی از توابع چندجمله‌ای و نمایی به صورت رابطه (25) استفاده کردند.

$$\begin{aligned} W = \alpha_1 [\exp(&\alpha_2 e_{11}^2 + \alpha_3 e_{11} e_{22} + \alpha_4 e_{22}^2 + \alpha_5 e_{11}^2 e_{22} \\ &+ \alpha_6 e_{11} e_{22}^2) - 1] \\ &+ [\alpha_7 e_{22}\, exp(\alpha_8 e_{ee}) + \alpha_9 e_{11} \\ &+ \alpha_{10}] e_{12}^2 \end{aligned} \qquad (25)$$

$\alpha_i (i = 1,2, \ldots, 10)$ ثابت‌های الاستیک ماده و $e_{ij} (i,j = 1,2)$ درایه‌های تانسور تغییر شکل هستند. این تابع انرژی کرنشی با فرض هم‌سانگردی ارائه شده است.

تابع انرژی کرنشی ارائه شده به وسیله چانگ و فانگ در سال 1983 [16] را شاید بتوان یکی از پرکاربردترین توابع انرژی کرنشی برای مدل‌سازی دیواره شریان‌ها دانست. اهمیت این تابع انرژی از آن جهت است که این مدل هر دو ویژگی‌های ناهمسانگردی و غیرخطی بودن را برای مدل‌سازی‌ها در نظر گرفته است. تابع انرژی کرنشی در مدل چانگ به صورت نمایی و در رابطه (26) نشان داده شده است.

$$W = \frac{\xi}{2\rho_0} \exp(Q)$$

$$\begin{aligned} Q = b_1 E_\theta^2 + b_2 E_z^2 + b_3 E_r^2 + 2b_4 E_\theta E_Z + 2b_5 E_z E_r \\ + 2b_6 E_r E_\theta \end{aligned} \qquad (26)$$

در رابطه (26) $b_i (i = 1,2, \ldots 6)$ها و ξ ثابت‌های ماده، E_r, E_θ, E_z درایه‌های کرنش گرین در مختصات لاگرانژین استوانه‌ای و ρ_0 چگالی ماده سازنده شریان است. W تابع انرژی کرنشی واحد در مختصات اولیه (لاگرانژین) را نشان می‌دهد. کلی‌ترین تابع انرژی کرنشی از نوع چانگ به وسیله هامفری و همکاران در سال 1999 فرموله شد [17].

تابع انرژی کرنشی معرفی‌شده به وسیله هولزآپفل و همکاران در سال 2000 [5] پایه بسیاری از مدل‌سازی‌های انجام شده پس از سال 2000 بوده است. این فرم از تابع انرژی کرنشی برای هر دولایه‌ی مدیا و ادوانتیشا دارای اعتبار است. این تابع شامل دو قسمت هم‌سانگرد و ناهمسانگرد است، که این دو قسمت به صورت کامل از یکدیگر جدا هستند (رابطه (27)).

$$\bar{\Psi}(\bar{C}, a_{01}, a_{02}) = \bar{\Psi}_{\text{iso}}(\bar{C}) + \bar{\Psi}_{\text{aniso}}(\bar{C}, a_{01}, a_{02}) \qquad (27)$$

مدل اصلی هولزآپفل برای مواد تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته شده است. با این حال یک نوع از این تابع انرژی کرنشی وجود دارد که در آن از مدول بالک استفاده شده است؛ بنابراین درجاهایی که نمی‌توان از فرض تراکم‌ناپذیری استفاده کرد و یا این‌که قصد استفاده از فرض تراکم‌پذیری کم وجود دارد می‌توان این تابع را به‌کار برد و تابع انرژی کرنشی در این مدل به صورت رابطه (28) ارائه شده است.

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\bar{C}, a_{01}, a_{02}) = \Psi_{\text{vol}}(J) + \bar{\Psi}_{\text{iso}}(\bar{C}) \\ + \bar{\Psi}_{\text{aniso}}(\bar{C}, a_{01}, a_{02}) \end{aligned} \qquad (28)$$

در معادله بالا $\bar{\Psi}_{\text{iso}}$ و $\bar{\Psi}_{\text{aniso}}$ به ترتیب قسمت‌های هم‌سانگرد هم‌حجم و ناهمسانگرد هم‌حجم انرژی کرنشی آزاد، $\bar{C} = J^{-2/3} C$ مزدوج تانسور تغییر شکل کوشی هم‌حجم است.

نولان و همکاران در سال 2014 [10] با مدل‌سازی شریان با استفاده از تابع انرژی کرنشی تراکم‌پذیر هولزآپفل و همکاران نتیجه گرفتند که تابع فوق تغییر شکل‌ها را برای شریان در حالت تراکم‌پذیر و ناهمسانگرد به خوبی مدل نمی‌کند. آن‌ها همچنین تابع موردنظر خودشان را برای جایگزینی با تابع تراکم‌پذیر هولزآپفل و همکاران معرفی کردند که آن را تابع غیرایزوتروپ اصلاح شده می‌گویند. به موجب این اصلاح تابع انرژی کرنشی ناهمسانگرد یک تابع تماماً تشکیل شده از تانسور مرتبه دوم تغییر شکل کوشی C به جای قسمت هم‌حجم خودش $\bar{C}$ به صورت رابطه (29) است.

$$\begin{aligned} \Psi(J, C, a_{04}, a_{06}) = \Psi_{\text{vol}}(J) + \Psi_{\text{iso}}(J, C) \\ + \Psi_{\text{aniso}}(C, a_{04}, a_{06}) \end{aligned} \qquad (29)$$

که روابط (30-32) از رابطه (28) داریم.

$$\Psi_{\text{vol}}(J) = \frac{1}{2} k_0 (J - 1)^2 \qquad (30)$$

$$\bar{\Psi}_{\text{iso}}(\bar{C}) = \frac{1}{2} \mu_0 (\bar{I}_1 - 3) \qquad (31)$$

$$\Psi_{\text{aniso}}(C, a_{04}, a_{06}) = \frac{K_1}{2K_2} \sum_{i=4,6} \{\exp[K_2 (I_i - 1)^2] - 1\} \qquad (32)$$

تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران جدیدترین تابع انرژی کرنشی معرفی شده است که با برطرف کردن عیوب تابع انرژی کرنشی تراکم‌پذیر هولزآپفل و همکاران برای مدل‌سازی شریان به‌کار می‌رود. در این مقاله از تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] برای مدل‌سازی شریان استفاده شده است.

2-3- محاسبه تنش‌ها از تابع انرژی کرنشی

با در اختیار داشتن تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران از معادله شناخته‌شده رابطه (33) برای به دست آوردن تنش نوع دوم پیولا-کیرشهف استفاده شده

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.3.32.3]

است [5].

$$S = 2\frac{\partial\Psi(C)}{\partial C}F^T \quad (33)$$

با استفاده از تنش نوع دوم پیولا – کیرشهف رابطه (33) با استفاده از رابطه (34) تنش کوشی در مختصات اویلرین به دست می‌آید [13].

$$\sigma = J^{-1}FSF^{\mathrm{T}} \quad (34)$$

رابطه (35) تنش کوشی حاصل از تابع انرژی کرنشی رابطه (29) را نشان می‌دهد.

$$\sigma = k_0(J-1)I + \mu_0\left[B - \frac{1}{3}I_1 I\right] + 2J^{-1}K_1\sum_{i=4,6}(I_i - 1)\exp\{[K_2(I_i-1)^2-1]\}(a_i \otimes a_i) \quad (35)$$

در رابطه (35) k_0 مدول بالک ایزوتروپیک، μ_0 مدول برشی ایزوتروپیک، K_1 و K_2 ثابت‌های غیرایزوتروپیک ماده و بردارهای $\mathrm{a}_i = Fa_{0i}(i=4,6)$ جهت‌های الیاف در مختصات اویلرین هستند.

نامتغیر اول از رابطه $I_1(C) = I_1(B) = trac(C)$ به دست می‌آید، بنابراین رابطه (36) به صورت زیر است.

$$I_1(C) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (36)$$

و نامتغیرهای I_4 و I_6 مربوط به جهت الیاف کلاژن در دیواره شریان هستند. مدل شریان به صورت یک استوانه جدار ضخیم در نظر گرفته می‌شود که دودسته الیاف کلاژن هلیکال در ماده زمینه آن جاسازی شده‌اند و جهت این الیاف عمود بر یکدیگر است. بردار هادی‌های روابط (37) جهت الیاف در مختصات اولیه هستند [5].

$$a_{04} = [0 \quad \cos\beta \quad \sin\beta] \quad (37\text{-a})$$

$$a_{06} = [0 \quad \cos\beta \quad -\sin\beta] \quad (37\text{-b})$$

نامتغیرهای چهارم و ششم وابسته به جهت الیاف کلاژن هستند و از رابطه‌های (39,38) به دست می‌آیند:

$$I_4 = a_{04}.Ca_{04} = C_{22}\cos^2\beta + 2C_{23}\sin\beta\cos\beta + C_{33}\sin^2\beta \quad (38)$$

$$I_6 = a_{06}.Ca_{06} = C_{22}\cos^2\beta - 2C_{23}\sin\beta\cos\beta + C_{33}\sin^2\beta \quad (39)$$

که C_{ij} ها $i,j = 1,2,3$ در روابط (40) بیان شده‌اند.

$$C_{11} = \lambda_r^2 = \lambda_1^2 \quad (40\text{-a})$$

$$C_{22} = \lambda_\theta^2 = (\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_z})^2 \quad (40\text{-b})$$

$$C_{23} = C_{32} = r\frac{\Phi\lambda_2\lambda_3}{h} \quad (40\text{-c})$$

$$C_{33} = \lambda_z^2(1+\gamma^2) = \lambda_z^2(1+\left(r\frac{\Phi}{h}\right)^2) \quad (40\text{-d})$$

β زاویه جهت الیاف است. مؤلفه‌های تنش کوشی حاصل از رابطه‌های (45-41) به دست می‌آیند.

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = 0 \quad (41)$$

$$\sigma_{rr} = k_0(J-1) + \frac{1}{3}(2\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) \quad (42)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = k_0(J-1) + \mu_0 J^{\frac{-5}{3}}\left(\lambda_2^2\cos^2\psi + \lambda_3^2\sin^2\psi - \frac{1}{3}\lambda_1^2 - \frac{1}{3}\lambda_2^2 - \frac{1}{3}\lambda_3^2\right) + 2J^{-1}K_1[L(a_4\otimes a_4)_{22} + N(a_6\otimes a_6)_{22} \quad (43)$$

$$\sigma_{zz} = k_0(J-1) + \mu_0 J^{\frac{-5}{3}}\left[\lambda_2^2\sin^2\psi + \lambda_3^2\cos^2\psi - \frac{1}{3}\lambda_1^2 - \frac{1}{3}\lambda_2^2 - \frac{1}{3}\lambda_3^2\right] + 2J^{-1}K_1[L(a_4\otimes a_4)_{33} + N(a_6\otimes a_6)_{33}] \quad (44)$$

$$\sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} = \mu_0 J^{\frac{-5}{3}}[(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)\sin\psi\cos\psi] + 2J^{-1}K_1[L(a_4\otimes a_4)_{23} + N(a_6\otimes a_6)_{23}] \quad (45)$$

در رابطه‌های (45-43)، L و N به وسیله روابط (47,46) بیان می‌شوند [5].

$$L = (I_4-1)\exp\{K_2(I_4-1)^2 - 1\} \quad (46)$$

$$N = (I_6-1)\exp\{K_2(I_6-1)^2 - 1\} \quad (47)$$

2-4- معادلات تعادل و شرایط مرزی

معادلات حاکم بر مسأله همان معادلات تعادل در مختصات استوانه‌ای هستند. این معادلات برای مختصات استوانه‌ای به صورت روابط (48) بیان می‌شوند [13].

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + f_r = 0 \quad (48\text{-a})$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z} + f_\theta = 0 \quad (48\text{-b})$$

$$\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \quad (48\text{-c})$$

با توجه به این‌که در مسأله نیروهای جسمی وجود ندارد می توان رابطه (49) را نوشت.

$$f_r = f_\theta = f_z = 0 \quad (49)$$

با جای‌گذاری این مقادیر در معادلات تعادل اولیه و با در نظر گرفتن ویژگی تقارن محوری مسأله ($\partial/\partial\theta = 0$)، معادلات تعادل برای مسأله مورد بررسی در این مقاله به صورت روابط (50) بیان می‌شوند.

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (50\text{-a})$$

$$\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z} = 0 \quad (50\text{-b})$$

$$\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (50\text{-c})$$

2-5- شرایط مرزی

از شکل معادلات تعادل پیداست به این معادلات، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی هستند.

روی مرز دیواره خارجی تنش در جهت r صفر است. این شرط مرزی به صورت رابطه (51) اعمال می‌گردد [5].

$$\sigma_{rr}(r = r_o) = 0 \quad (51)$$

در مرز داخلی شریان مقدار تنش σ_{rr}، برابر و خلاف جهت فشار موجود در شریان به صورت رابطه (52) است[5].

$$p_i = -\sigma_{rr}(r = r_i) = \int_{r_i}^{r_o}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})\frac{dr}{r} \quad (52)$$

شرط مرزی روی z درواقع به وسیله یک شرط ضعیف بیان می‌شود که در این شرط با انتگرال‌گیری، نیروی محوری وارد به شریان براساس معادله (53) به دست می‌آید [5].

$$P = 2\pi\int_{r_i}^{r_o}\sigma_{\theta\theta}r\,dr \quad (53)$$

برای حل عددی نیروی کاهش‌یافته محوری رابطه (54) مشخص شده است [5] و محاسبات براساس آن انجام می‌گیرد.

$$F = P - \pi r_i^2 p_i \quad (54)$$

یکی از تغییر شکل‌های احتمالی برای شریان پیچش است و شرط مرزی پیچش هم برای شریان در نظر گرفته می‌شود. که به صورت رابطه (55) بیان شده است [5].

$$M_t = \int_{r_i}^{r_o}\sigma_{\theta z}r^2 dr \quad (55)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی یادشده شرایط تعادل استاتیکی برای شریان اعمال می‌گردد. با حل معادلات و شرایط مرزی با استفاده از روش‌های عددی مناسب پاسخ تنش‌ها برای حالت یک لایه به دست خواهد آمد.

2-6- تحلیل شریان با فرض دو لایه

توابع انرژی کرنشی مورد استفاده برای حالت دولایه مشابه تابع انرژی کرنشی حالت یک لایه هستند، اما با ثابت‌های متفاوت برای هرکدام از لایه‌ها به صورت روابط (56) بیان شده‌اند [5].

$$\Psi_M = \frac{1}{2}k_{0M}(J-1)^2 + \frac{1}{2}\mu_{0M}(\bar{I}_{1M}-3) + \frac{K_{1M}}{2K_{2M}}\sum_{i=4,6}\{\exp[K_{2M}(I_{iM}-1)^2] - 1\} \tag{56-a}$$

$$\Psi_A = \frac{1}{2}k_{0A}(J-1)^2 + \frac{1}{2}\mu_{0A}(\bar{I}_{1A}-3) + \frac{K_{1A}}{2K_{2A}}\sum_{i=4,6}\{\exp[K_{2A}(I_{iA}-1)^2] - 1\} \tag{56-b}$$

در توابع انرژی کرنشی معادلات (56) برای دو لایه شش پارامتر برای مواد تشکیل‌دهنده شریان وجود دارد که k_{0M}، K_{1M} و K_{2M} برای لایه مدیا و k_{0A}، K_{1A} و K_{2A} برای لایه ادوانتیشا هستند.

2-7- شرایط مرزی دو لایه

تنش‌های شعاعی در دیواره خارجی لایه ادوانتیشا صفر است. این شرط مرزی به صورت معادله (57) اعمال می‌گردد.

$$\sigma_{rr(A)}(r = r_{o(A)}) \tag{57}$$

اما در مرز داخلی شریان مقدار تنش در جهت شعاعی یا همان σ_{rr} برابر و در خلاف جهت فشار موجود در شریان است. این شرط مرزی به صورت ضعیف و به شکل معادله (58) اعمال می‌گردد.

$$p_i = -\sigma_{rr(M)}(r_{i(M)}) = -[\int_{r_{i(M)}}^{r_{o(M)}}(\sigma_{rr(M)} - \sigma_{\theta\theta(M)})\frac{dr(M)}{r(m)} + \int_{r_{i(A)}}^{r_{o(A)}}(\sigma_{rr(A)} - \sigma_{\theta\theta(A)})\frac{dr(A)}{r(A)} \tag{58}$$

شرط مرزی نیرویی روی z درواقع به وسیله یک شرط ضعیف حاصل می‌شود که در این شرط با انتگرال‌گیری روی دو لایه نیروی محوری وارد به شریان از رابطه (59) به دست می‌آید.

$$P = 2\pi\int_{r_{i(M)}}^{r_{o(M)}}\sigma_{zz(M)}r(M)dr(M) + \int_{r_{i(A)}}^{r_{o(A)}}\sigma_{zz(A)}r(A)dr(A) \tag{59}$$

برای حل عددی نیروی کاهش‌یافته محوری تعریف شده که محاسبات براساس آن انجام می‌گیرد و به صورت رابطه (60) بیان شده است.

$$F = P - \pi r_{i(M)}^2 p_i \tag{60}$$

یکی از تغییر شکل‌های احتمالی برای شریان پیچش است و یک شرط مرزی پیچش هم برای شریان در نظر گرفته می‌شود. این شرط مرزی به وسیله رابطه (61) بیان شده است.

$$M_t = \int_{r_{i(M)}}^{r_{o(M)}}\sigma_{\theta z(M)}r(M)^2dr(M) + \int_{r_{i(A)}}^{r_{o(A)}}\sigma_{\theta z(A)}r(A)^2dr(A) \tag{61}$$

شرایط مرزی پیوستگی برای ترکشن‌ها در جهت شعاعی در مرز مشترک دولایه هم برقرار و به صورت رابطه (62) اعمال‌شده است.

$$\sigma_{rr(M)}(r = r_{o(M)}) = \sigma_{rr(A)}(r = r_{i(M)}) \tag{62}$$

درنهایت شرایط تعادل استاتیکی برای شریان اعمال و با حل معادلات و شرایط مرزی بالا با استفاده از روش‌های عددی مناسب پاسخ برای حالت دولایه به دست خواهد آمد.

3- روش حل عددی

در مدل‌سازی مکانیکی دیواره شریان معادلات تعادل حاکم هستند. با اعمال این معادلات بر تنش‌های کوشی به دست آمده یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول غیرخطی حاصل می‌گردد که این معادلات باید با استفاده از شرایط مرزی مناسب و با یک روش مناسب عددی حل شوند. با جای‌گذاری مؤلفه‌های تنش کوشی در معادلات تعادل و با توجه به این‌که در مؤلفه‌های تنش فقط سه مجهول λ_1, λ_2 و λ_3 وجود دارند و این‌که مسأله به صورت دوبعدی در جهت‌های r, z مورد بررسی قرار می‌گیرد، مشتقات جزئی $\partial\lambda_1/\partial r, \partial\lambda_2/\partial r, \partial\lambda_3/\partial r$ در جهت r و مشتقات جزئی $\partial\lambda_1/\partial z, \partial\lambda_2/\partial z, \partial\lambda_3/\partial z$ در جهت z در معادلات به وجود می‌آیند. معادلات حاصل با روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند؛ بنابراین باید با روش‌های تقریبی عددی حل شوند. در اغلب موارد حل‌های تقریبی به صورت به دست آوردن مقادیر تابعک‌ها در نقاط گره کاملاً مشخص بیان می‌شود. در این مرحله یکی از پرسش‌های مهم و احتمالی رابطه بین مشتقات جزئی در معادلات دیفرانسیل و مقدار تابعک‌ها در نقاط گره است. پلی که این دو را به هم وصل می‌کند عبارت از تکنیک‌های گسسته‌سازی عددی است. این تکنیک‌ها متناسب با راه‌حل تقریبی است و حل عددی به روش گسسته‌سازی نامیده می‌شود. راه‌حل‌های گسسته‌سازی متعددی برای حل این معادلات وجود دارند. در این میان روش‌های تفاضل محدود[1] (FD)، المان محدود[2] (FE) و حجم محدود[3] (FV) در گروه روش‌های حل مرتبه پایین قرار می‌گیرند.

3-1- روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته[4]

در جستجوی یک روش گسسته‌سازی کارآمد برای به دست آوردن حل عددی با تعداد گره‌های کم، بلمن و همکاران در سال 1971 روش دیفرانسیل کوادراچر[5] را معرفی کردند [18]. در بسیاری از مسائل حجم محاسبات با استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر معرفی شده به وسیله بلمن و همکاران کاهش پیدا می‌کند. در این روش مشتقات جزئی به صورت مجموع حاصل‌ضرب مقادیر یک تابع چندجمله‌ای در ضرایب وزنی همان نقاط تقریب زده می‌شود. به طور خلاصه زمانی که مشتقات جزئی با تقریب‌های مشتق تعمیم‌یافته جایگزین شوند، معادله دیفرانسیل جزئی به یک دستگاه معادلات جبری برای مسائل مستقل از زمان و یک سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی برای مسائل مقدار اولیه و یا مسائل مقدار مرزی وابسته به زمان تبدیل می‌شود. در همه موارد روش‌های عددی مناسب برای حل این دستگاه‌های معادلات حاصل به خوبی توسعه داده شده‌اند.

3-2- گسسته‌سازی معادلات

اگر N گره در جهت r و M گره در جهت z در سطح مورد نظر در نظر گرفته

[1] Finite Difference
[2] Finite Element
[3] Finite Volume
[4] Generalized Differential Quadrature(GDQ)
[5] Differential Quadrature

شود گره‌های چبیشوف به صورت روابط (64,63) در جهت‌های r وz تعریف می‌شوند [19].

$$r_i = r_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{i-1}{N-1}\pi\right)(r_N - r_1) \quad i = 1,2,3, \dots N \tag{63}$$

$$z_j = z_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{j-1}{M-1}\pi\right)(z_M - z_1) \quad j = 1,2,3, \dots M \tag{64}$$

با اعمال این گره‌ها در معادلات (66,65) ضرایب روش درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته برای مشتقات جزئی مرتبه اول به دست خواهند آمد.

$$a_{ij}^r = \frac{1}{(r_j - r_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{r_i - r_k}{r_j - r_k} \quad i,j = 1,2, \dots, N \quad i \neq j \tag{65-a}$$

$$a_{ii}^r = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} a_{ij} \quad i = 1,2, \dots, N \quad i = j \tag{65-b}$$

$$a_{ij}^z = \frac{1}{(z_j - z_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \frac{z_i - z_k}{z_j - z_k} \quad i,j = 1,2, \dots, M \quad i \neq j \tag{66-a}$$

$$a_{ii}^z = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} a_{ij} \quad i = 1,2, \dots, M \quad i = j \tag{66-b}$$

سپس با جای‌گذاری ضرایب کوادراچر در معادلات (67) مقادیر گسسته‌سازی شده مشتقات جزئی مرتبه اول به دست خواهند آمد.

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial r} = \lambda_r^{(1)}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^r . \lambda_1(r_k, z_j) \quad i = 1,2,3, \dots, N \quad j = 1,2,3, \dots M \tag{67-a}$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial r} = \lambda_r^{(1)}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^r . \lambda_2(r_k, z_j) \quad i = 1,2,3, \dots, N \quad j = 1,2,3, \dots M \tag{67-b}$$

$$\frac{\partial\lambda_3}{\partial r} = \lambda_r^{(1)}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^r . \lambda_3(r_k, z_j) \quad i = 1,2,3, \dots, N \quad j = 1,2,3, \dots M \tag{67-c}$$

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial z} = \lambda_z^{(1)}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^{M} a_{jk}^z . \lambda_1(r_i, z_k) \quad i = 1,2,3, \dots, N \quad j = 1,2,3, \dots M \tag{67-d}$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial z} = \lambda_z^{(1)}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^{M} a_{jk}^z . \lambda_2(r_i, z_k) \quad i = 1,2,3, \dots, N \quad j = 1,2,3, \dots M \tag{67-e}$$

$$\frac{\partial\lambda_3}{\partial z} = \lambda_z^{(1)}(r_i, z_j) = \sum_{k=1}^{M} a_{jk}^z . \lambda_3(r_i, z_k) \quad i = 1,2,3, \dots, N \quad j = 1,2,3, \dots M \tag{67-f}$$

با استفاده از این روش، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تبدیل به دستگاه معادلات جبری می‌شوند و با جای‌گذاری مقادیر سیگما در سه معادله تعادل یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تشکیل می‌شود. با حل دستگاه معادلات حاصل، مجهولات در همه گره‌ها به دست می‌آیند و سپس با استفاده از مجهولات به دست آمده در هر گره می‌توان خروجی‌های مورد نیاز را به دست آورد.

4- اعتبار سنجی و نتایج

در این قسمت ابتدا نتایج عددی حاصل از مدل‌سازی شریان به صورت یک لایه با استفاده از تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه نتایج به دست آمده از این پژوهش با نتایج تجربی مقاله [20] مقایسه می‌شود. سپس مدل‌سازی شریان کرونر به صورت دولایه با استفاده از تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] انجام خواهد شد. بررسی تنش‌های ایجاد شده در دیواره شریان کرونر انسانی، تنش‌های نهایی قابل تحمل برای دیواره این شریان و فشار داخلی معادل برای ایجاد تنش نهایی در دیواره شریان در ادامه این قسمت مطرح می‌گردد.

4-1- مدل شریان به صورت یک لایه

مدل‌سازی شریان جهت اعتبارسنجی حل عددی و معادلات مورد بررسی قرار گرفته در این مطالعه به صورت یک لایه با استفاده از تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] و با قرار دادن ثابت‌های عددی مطرح شده در مقاله هولزآپفل و همکاران در سال 2005 [20] انجام شده است. مقادیر عددی به کار رفته در مدل‌سازی در جدول 1 [20] ارائه و بارگذاری‌های انجام شده روی مدل طبق جدول 2 [20] اعمال شده است.

بارگذاری نیرو و فشار داخلی به صورت هم‌زمان بر شریان انجام شده است و با افزایش تدریجی کشش محوریλ_z، تنش‌های محوری و محیطی ایجاد شده در دیواره شریان حاصل از مدل‌سازی با استفاده از مدل ارائه شده در این تحقیق و با به‌کار بردن ثابت‌های عددی یادشده در جدول 1 و شرایط مرزی جدول 2 به صورت شکل 3 به دست آمده است. برای مقایسه تنش‌های محوری و محیطی برای مدل ارائه شده در این پژوهش و داده‌های تجربی ارائه شده مقاله [20] برای لایه مدیا در شکل‌های جداگانه نشان داده شده‌اند.

شکل 4 نمودار تنش محوری مدل ارائه شده در این مطالعه و داده‌های تجربی مقاله هولزآپفل و همکاران در سال 2005 [20] برای لایه مدیا را نشان می‌دهد. تشابه تنش محوری برای مدل ارائه شده در این مطالعه با داده‌های تجربی مشهود است.

با افزایش کشش محوری تنش محوری افزایش می‌یابد. روند تنش برای مدل پژوهش حاضر و داده‌های تجربی مقاله افزایشی است که این افزایش برای داده‌های تجربی و مدل ارائه شده در این پژوهش روند مشابهی را طی می‌کند. در شکل 5 نمودار تنش محیطی برای مدل ارائه شده در تحقیق حاضر و داده‌های تجربی مقاله هولزآپفل و همکاران [20] ارائه شده است.

با مقایسه نمودارهای تنش محیطی برای دو حالت همان‌گونه که از شکل 3 پیداست اندازه تنش‌های محیطی بزرگ‌تر از تنش‌های محوری است. روند افزایش تنش‌ها با افزایش کشش محوری در تحقیق حاضر مشابه داده‌های تجربی مقاله هولزآپفل و همکاران [20] است. نتایج به دست آمده از مدل ارائه شده در این تحقیق و داده‌های تجربی ارائه شده در مقاله هولزآپفل و همکاران [20] نشان‌دهنده افزایش مقدار تنش‌های محیطی و محوری در دیواره شریان با افزایش کشش محوری است.

4-2- مدل شریان به صورت دولایه

در این قسمت مدل‌سازی شریان به صورت دولایه تقویت‌شده با دو دسته

جدول 1 خصوصیات هندسی و مکانیکی لایه مدیا شریان [20]

Table 1 Geometric and Mechanical Properties of the Media Layer [20]

مقدار	مشخصات مکانیکی	مقدار	مشخصات هندسی
1	k_{0M}[kPa]	2.08	R_i[mm]
2.31	μ_{0M}[kPa]	0.34	T_M[mm]
8.45	K_{1M}[kPa]	24.9	β_M[°]
12.84	K_{2M}[−]	8	H[mm]

جدول 2 بارگذاری‌های شریان برای مدل‌سازی

Table 2 Loading on the artery for modeling

مقدار	پارامتر
25×10^{-6}	F[N]
0	M_t[N.m]
13.3	p_i[kPa]

الیاف براساس مدل نولان و همکاران [10] با استفاده از مقادیر ثابت بیان شده مقاله هولزآپفل و همکاران [5] برای لایه مدیا و ادوانتیشا انجام شده است. حل معادلات با روش عددی درون‌یابی مشتق تعمیم‌یافته انجام و نمودار تنش‌ها برای این مدل‌سازی رسم شده است. مقادیر عددی مربوط به هندسه مسأله و ثابت‌های مکانیکی مربوط به خواص ماده تشکیل‌دهنده شریان برای لایه مدیا در جدول 3، خصوصیات هندسی مربوط به لایه ادوانتیشا به همراه خصوصیات مکانیکی ماده تشکیل‌دهنده این لایه در جدول 4 و همچنین بارگذاری‌های اعمال‌شده بر استوانه مطابق با مقاله [5] در جدول 5 ارائه شده

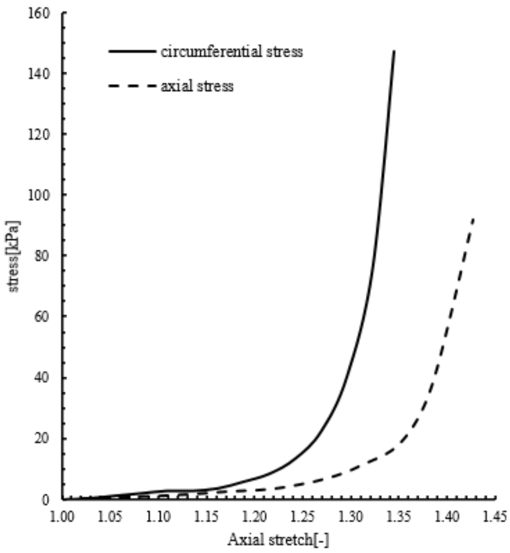

Fig. 3 Stress-Tensile diagram based on the present research model

شکل 3 نمودار تنش-کشش محوری براساس مدل پژوهش حاضر

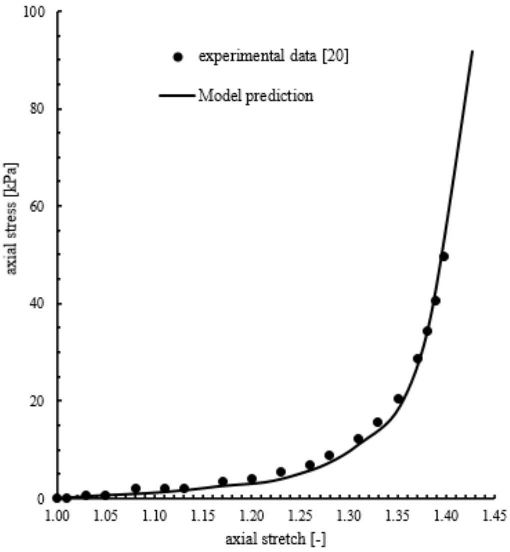

Fig. 4 Axial Stress-axial stretch for Model and Experimental Data

شکل 4 نمودار تنش محوری- کشش محوری برای مدل و داده‌های تجربی

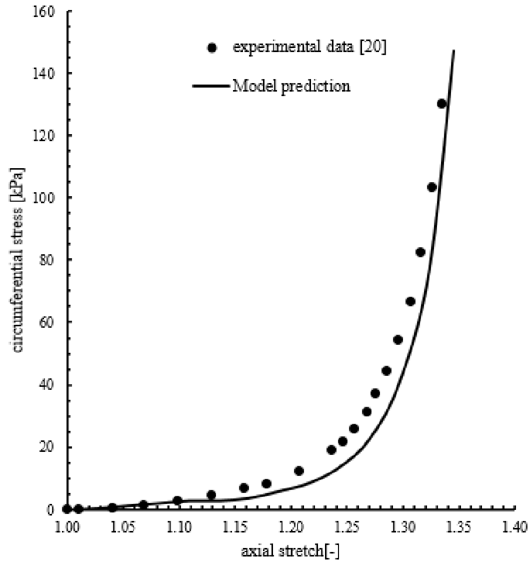

Fig. 5 circumferential stress-axial stretch diagram for model and experimental data

شکل 5 نمودار تنش محیطی- کشش محوری برای مدل و داده‌های تجربی

است. تنش‌های موجود در دیواره شریان با استفاده از مدل ارائه شده در این تحقیق با به‌کار بردن ثابت‌های عددی بیان شده در جداول 3-5 به صورت شکل 6 به دست آمده‌اند. این شکل نمودار تنش‌های محوری، محیطی و شعاعی را نسبت به $(r - r_i)$ نشان می‌دهد. r شعاع استوانه در هر نقطه است و r_i شعاع داخلی استوانه است. تنش شعاعی از مقادیر کوچک منفی روی دیواره داخلی آغاز می‌شود و با یک روند ملایم در نهایت روی دیواره خارجی شریان به صفر می‌رسد. تنش محیطی روی دیواره داخلی شریان دارای حداکثر مقدار خود است که این مقدار ابتدا به صورت نسبتاً سریع کاهش می‌یابد و در ادامه روند این کاهش ملایم می‌شود، اما این کاهش تا دیواره خارجی شریان ادامه پیدا می‌کند. تنش محوری هم روی دیواره داخلی دارای بیشینه مقدار خود است که با یک روند کاهشی نسبتاً ملایم نسبت به تنش محیطی کاهش پیدا می‌کند و در ادامه یک روند ثابت را طی می‌کند که این روند تا دیواره خارجی شریان ادامه دارد.

نمودار شکل 7 جهت اعتبارسنجی معادلات و حل عددی برای حالت دو لایه برای تنش‌های محیطی ایجاد شده در دیواره شریان برای مدل ارائه شده در این مقاله و مدل هولزآپفل و همکاران [5] با استفاده از ثابت‌های عددی جدول 3 برای لایه مدیا، ثابت‌های عددی جدول 4 برای لایه ادوانتیشا و شرایط مرزی جدول 5 ترسیم شده است. تشابه تنش‌های محیطی برای دو مدل در شکل 7 مشخص است. نتایج حاصل از مدل ارائه شده در این مقاله و نتایج ارائه شده در مقاله هولزآپفل و همکاران [5] نشان می‌دهد که حداکثر تنش‌های محیطی برای هر دو مدل روی دیواره داخلی شریان بوده و با یک روند یکسان در هر دو مدل کاهش پیدا می‌کند.

جدول 3 خصوصیات هندسی و مکانیکی لایه مدیا [5]

Table 3 Geometric and Mechanical Properties of Media Layer [5]

مقدار	مشخصات مکانیکی	مقدار	مشخصات هندسی
1	k_{0M}[kPa]	0.71	R_i[mm]
3.00	μ_{0M}[kPa]	0.26	T_M[mm]
2.3632	K_{1M}[kPa]	29	β_M[°]
0.8393	$K_{2M}[-]$	8	H[mm]

جدول 4 خصوصیات هندسی و مکانیکی لایه ادوانتیشا [5]

Table 4 Geometric and Mechanical Properties of the adventitia Layer [5]

مقدار	مشخصات مکانیکی	مقدار	مشخصات هندسی
1	k_{0A}[kPa]	0.97	R_i[mm]
0.3	μ_{0A}[kPa]	0.13	T_A[mm]
0.5620	K_{1A}[kPa]	62	β_A[˚]
0.7112	$K_{2A}[-]$	8	H[mm]

جدول 5 بارگذاری‌های شریان [5]

Table 5 Loading on the artery [5]

مقدار	پارامتر
25×10^{-6}	F[N]
0	M_t[N.m]
13.3	p_i[kPa]
0	α[˚]
0	Φ[˚]
1.7	$\lambda_z[-]$

4-3- مدل‌سازی شریان کرونر به صورت دولایه

در این قسمت مدل‌سازی شریان کرونر با استفاده از تابع انرژی کرنشی معرفی‌شده به وسیله نولان و همکاران [10] به صورت دولایه تراکم‌پذیر با استفاده از خصوصیات هندسی شریان کرونر [20] و خصوصیات مکانیکی ماده تشکیل‌دهنده زمینه و الیاف به‌کار رفته در ساختار شریان [20] انجام شده است. سپس تنش‌های ایجاد شده در دیواره شریان کرونر با استفاده از شرایط مرزی مورد بررسی قرار گرفته است. خصوصیات هندسی و مکانیکی به‌کار رفته برای مدل‌سازی لایه مدیا با استفاده از مقاله هولزآپفل و همکاران 2005 [20] برای شریان کرونر در جدول 6 و خصوصیات هندسی و مکانیکی به‌کار رفته برای مدل‌سازی لایه ادوانتیشا با استفاده از مقاله هولزآپفل و همکاران 2005 [20] برای شریان کرونر به صورت جدول 7 است. شرایط مرزی و بارگذاری‌های انجام شده برای مدل‌سازی شریان کرونر به صورت جدول 8 خواهد بود. تنش معادل فون میزز به ازای فشارهای داخلی متفاوت تعیین و

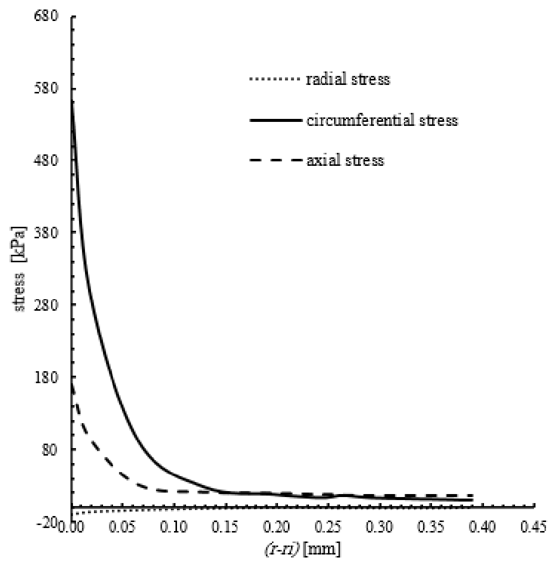

Fig. 6 Stress-Thickness diagrams of artery

شکل 6 نمودار تنش- ضخامت شریان

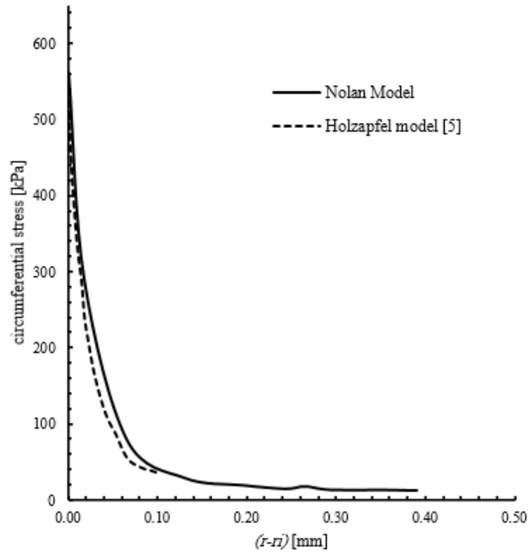

Fig. 7 circumferential stress - Thickness diagram of artery for two models

شکل 7 نمودار تنش محیطی– ضخامت شریان برای دو مدل

نمودار تنش فون– میزز برحسب فشار برای دیواره داخلی شریان است. با تغییر شرط مرزی فشار داخلی، فون- میزز معادل برای همان فشار به دست آمده است و نمودار فون-میزز برحسب فشار به صورت شکل 8 گزارش شده است. از شکل می‌توان نتایج زیر را دریافت کرد:

الف- تنش فون– میزز با افزایش فشار داخل شریان بر دیواره داخلی شریان افزایش پیدا می‌کند.

ب- در فشارهای پایین‌تر حساسیت تنش فون– میزز به افزایش فشار کمتر است، ولی با افزایش فشار داخلی شیب نمودار افزایش می‌یابد.

4-3-1- تنش‌های نهایی در جهت‌های محیطی و محوری

تنش‌های نهایی قابل‌تحمل برای هرکدام از لایه‌های شریان در جهت‌های محوری و محیطی در جدول 9 به صورت زیر نشان داده شده‌اند. براساس اطلاعات جدول تنش نهایی برای هر دولایه شریان در جهت محیطی بیشتر از محوری و همچنین نشان می‌دهد که تنش‌های نهایی برای لایه ادوانتیشا

جدول 6 خصوصیات هندسی و مکانیکی لایه مدیا [20]

Table 6 Geometric and Mechanical Properties of the Media Layer [20]

مقدار	مشخصات مکانیکی	مقدار	مشخصات هندسی
1	k_{0M}[kPa]	1.82475	R_i[mm]
1.27	μ_{0M}[kPa]	0.22113	T_M[mm]
20.60	K_{1M}[kPa]	20.61	β_M[˚]
8.21	$K_{2M}[-]$	15	H[mm]

جدول 7 خصوصیات هندسی و مکانیکی لایه ادوانتیشا [20]

Table 7 Geometric and Mechanical Properties of the Adventitia Layer [20]

مقدار	مشخصات مکانیکی	مقدار	مشخصات هندسی
1	k_{0A}[kPa]	2.02887	R_i[mm]
7.56	μ_{0A}[kPa]	0.20412	T_A[mm]
38.57	K_{1A}[kPa]	67	β_A[˚]
85.03	$K_{2A}[-]$	15	H[mm]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.3.32.3]

جدول 8 شرایط مرزی اعمال‌شده برای مدل‌سازی

Table 8 Boundary conditions applied for modeling

پارامتر	مقدار
$F[\mathrm{N}]$	1×10^{-3}
$M_t[\mathrm{Nm}]$	0
$\alpha[\ ^\circ]$	160
$\Phi[\ ^\circ]$	2.4
$\lambda_z[-]$	1.2

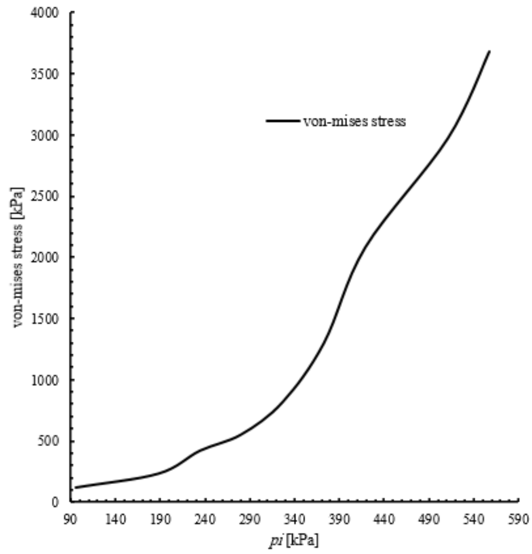

Fig. 8 Von-Mises Stress-Internal Pressure Diagram of Coronary Artery

شکل 8 نمودار تنش میزز- فشار داخلی شریان کرونر

جدول 9 تنش‌های نهایی برای لایه‌های شریان کرونر [20]

Table 9 ultimate stresses for coronary artery layers [20]

تنش‌های نهایی [kPa]	لایه مدیا	لایه ادوانتیشا
تنش محوری	419±188	1300±692
تنش محیطی	446±194	1430±604

بزرگ‌تر از لایه مدیاست.

4-3-2- سطح بحرانی تنش در دیواره شریان

برای مشخص شدن محل ایجاد حداکثر تنش‌ها در دیواره شریان(سطح بحرانی تنش)، مدل‌سازی به ازای چند فشار متفاوت انجام شده است و نمودارهای تنش فون- میزز نسبت به ضخامت شریان $(r - r_i)$ برای این مدل‌سازی‌ها ترسیم شده که در شکل 9 قابل مشاهده است و این نتیجه‌گیری را حاصل می‌کند که حداکثر تنش معادل فون- میزز در دیواره شریان روی سطح داخلی شریان قرار دارد؛ بنابراین سطح بحرانی تنش در دیواره شریان روی سطح داخلی لایه مدیا قرار دارد.

از اطلاعات جدول 9 برای لایه مدیا مشخص می‌شود که تنش‌های نهایی قابل تحمل برای این لایه در حالت کاملاً امن مقادیر 231 کیلو پاسکال در جهت محوری و 252 کیلو پاسکال در جهت محیطی هستند.

فشار داخلی 220 کیلو پاسکال حداکثر تنش محیطی قابل تحمل برای شریان با اطلاعات هندسی و مکانیکی مطرح شده است؛ و مدل‌سازی شریان کرونر به صورت دولایه به ازای این فشار داخلی انجام شده که تنش‌های محوری و محیطی حاصل نسبت به $(r - r_i)$ در شکل 10 نشان داده شده

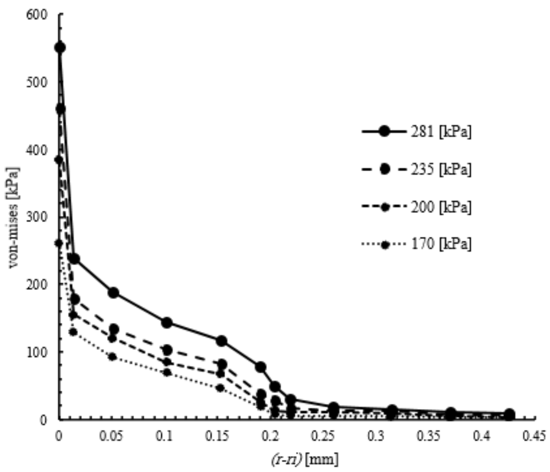

Fig. 9 Von-Mises stress diagram for different pressures

شکل 9 نمودار تنش فون- میزز به ازای فشارهای متفاوت

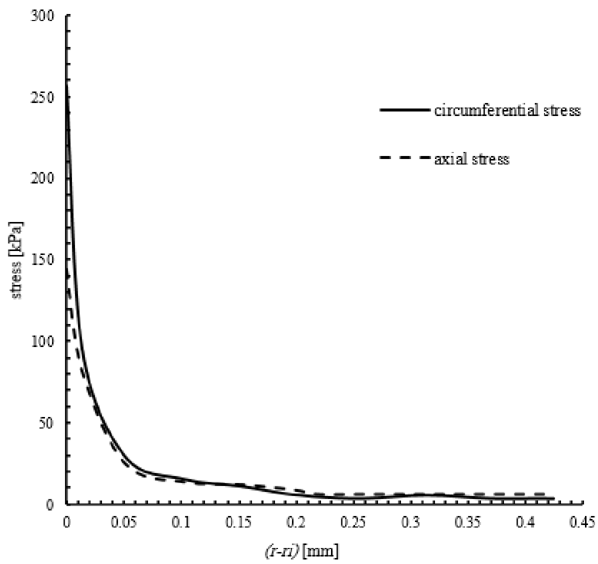

Fig.10 Stress-Artery Thickness $(r - r_i)$Diagram

شکل 10 نمودار تنش– ضخامت شریان$(r - r_i)$

است.

5- نتیجه گیری

به طور کلی هدف از مدل‌سازی‌های مختلف و ارائه توابع انرژی کرنشی مختلف دستیابی به تابع انرژی کرنشی است که بتواند خواص و خصوصیات مکانیکی شریان را هر چه بهتر نشان دهد و در واقع نتایج آن بیشتر به نتایج تجربی نزدیک باشد. در این مقاله مدل‌سازی برای اولین بار به صورت دو لایه با استفاده از تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] انجام شد و نتایج زیر حاصل شده است:

- با توجه به نتایج حاصل از مقایسه تنش‌های ایجاد شده در دیواره شریان با داده‌های تجربی مشخص شده است که تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] به خوبی تنش در دیواره شریان را مشخص کرده است؛ بنابراین تابع انرژی کرنشی نولان و همکاران [10] یک تابع انرژی کرنشی مناسب برای مدل‌سازی شریان است.
- در همه مدل‌سازی‌های انجام شده در مقاله حداکثر تنش‌های ایجاد شده در دیواره شریان روی سطح داخلی قرار دارند و بنابراین می‌توان

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.3.32.3]

گفت که سطح بحرانی دیواره شریان سطح داخلی آن است.

- با توجه به این‌که در این مقاله مدل‌سازی شریان به صورت دو لایه شامل مدیا و ادوانتیشاست و بر این اساس لایه داخلی شریان، لایه مدیاست؛ بنابراین در این مقاله لایه مدیا لایه بحرانی شریان است.
- با توجه حداکثر تنش‌های قابل‌تحمل برای لایه مدیا شریان کرونر این نتیجه حاصل شده است که حداکثر فشار داخلی قابل تحمل برای شریان مفروض در این مقاله فشار داخلی 220 کیلو پاسکال خواهد بود.

6- فهرست علائم

$a_{0i}\ \ i=4,6$	بردار هادی‌های جهت الیاف در مختصات اولیه
$a_i\ \ i=4,6$	بردار هادی‌های جهت الیاف در مختصات تغییر شکل یافته
C	تانسور تغییر شکل کوشی راست
$\bar{C}$	قسمت هم‌حجم تانسور تغییر شکل کوشی راست
F	گرادیان تغییر شکل
h	طول استوانه در حالت تغییر شکل یافته (m)
H	طول استوانه در حالت اولیه (m)
I	تانسور واحد قطری
I_1	نامتغیر اول تغییر شکل
$I_i\ \ i=4,6$	نامتغیرهای تغییر شکل توزیع الیاف
J	دترمینان گرادیان تغییر شکل
k_0	مدول بالک ایزوتروپیک (Nm^{-2})
$K_i\ \ i=4,6$	ثابت‌های غیرایزوتروپیک ماده
M_t	ممان پیچشی (Nm)
p_i	فشار داخلی استوانه (Nm^{-2})
P	نیروی عمودی محوری (N)
r,θ,z	مختصات تغییر شکل یافته (m)
R,Θ,Z	مختصات اولیه (m)
r_i	شعاع داخلی استوانه در حالت تغییر شکل یافته (m)
R_i	شعاع داخلی استوانه در حالت اولیه (m)
r_o	شعاع خارجی استوانه در حالت تغییر شکل یافته (m)
R_o	شعاع خارجی استوانه در حالت اولیه (m)
T	ضخامت استوانه (m)

علائم یونانی

α	زاویه قطاع (˚)
β	زاویه الیاف (˚)
γ	زاویه تغییر شکل پیچشی (˚)
μ_0	مدول برشی ایزوتروپیک (Nm^{-2})
σ	تنش کوشی (Nm^{-2})
Φ	زاویه پیچش (˚)
Ψ	تابع انرژی آزاد هلمهولتز (Nm)
Ψ_{vol}	قسمت حجمی تابع انرژی آزاد هلمهولتز (Nm)
Ψ_{iso}	قسمت ایزوتروپیک تابع انرژی آزاد هلمهولتز (Nm)
Ψ_{aniso}	قسمت غیرایزوتروپیک تابع انرژی آزاد هلمهولتز (Nm)
$\bar{\Psi}_{\mathrm{iso}}$	قسمت ایزوتروپیک تابع انرژی آزاد هم‌حجم (Nm)
$\bar{\Psi}_{\mathrm{aniso}}$	قسمت غیرایزوتروپیک تابع انرژی آزاد هم‌حجم (Nm)

زیرنویس‌ها

A	لایه ادوانتیشا
M	لایه مدیا

7- مراجع

[1] M. Sandeep, S. Bhargava, V. Kumar, A Bayesian approach to selecting hyperelastic constitutive models of soft tissue, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 291, pp. 102-122, 2015.

[2] W. Maurel, Y. Wu, D. Thalmann, N. M. Thalmann, *Biomechanical Models for Soft Tissue Simulation*, pp. 1-23, Berlin Heidelberg Springer-Verlag, 1998.

[3] W. Kolmer, Geruchsorgan, *Haut und Sinnesorgane*, pp. 192-249, Berlin Heidelberg, Springer, 1927.

[4] D. J. Patel, J. S. Janicki, Static elastic properties of the left coronary circumflex artery and the common carotid artery in dogs, *Circulation Research*, Vol. 27, No. 2, pp. 149-158, 1970.

[5] G. A. Holzapfel, T. C. Gasser, R. W. Ogden, A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, *Elasticity and the Physical Science of Solids*, Vol. 61, No. 1-3, pp. 1-48, 2000.

[6] T. C. Gasser, R. W. Ogden, G. A. Holzapfel, Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations, *Royal Society Interface*, Vol. 3, No. 6, pp. 15-35, 2006.

[7] T. C. Gasser, C. A. J. Schulze-Bauer, G. A. Holzapfel, A three-dimensional finite element model for arterial clamping, *Biomechanical Engineering*, Vol. 124, No. 4, pp. 355-363, 2002.

[8] G. A. Holzapfel, M. Stadler, C. A. J. Schulze-Bauer, A layer-specific three-dimensional model for the simulation of balloon angioplasty using magnetic resonance imaging and mechanical testing, *Biomedical Engineering*, Vol. 30, No. 6, pp. 753-767, 2002.

[9] J. D. Humphrey, P. B. Canham, Structure, mechanical properties and mechanics of intracranial saccular aneurysms, *Elasticity and the Physical Science of Solids*, Vol. 61, No. 1-3, pp. 49-81, 2000.

[10] D. R. Nolan, A. L. Gower, M. Destrade, R. W. Ogden, A robust anisotropic hyperelastic formulation for the modelling of soft tissue, *Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 39, pp. 48-60, 2014.

[11] M. Mottahedi, H. Hai-Chao, Artery buckling analysis using a two-layered wall model with collagen dispersion, *Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 60, pp. 515-524, 2016.

[12] M. Alafzadeh, E. Shirani, E. Yahaghi, N. Fatouraee, Effective parameters on variation of wall shear stress in microvessels, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 129-134, 2016. (in Persian فارسی)

[13] G. A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*, pp. 206-295, West Sussex England, John Wiley & Sons, 2000.

[14] W. H. Hoppmann, L. Wan, Large deformation of elastic tubes, *Biomechanics*, Vol. 3, No. 6, pp. 593-600, 1970.

[15] V. A. Kas' yanov, A. I. Rachev, Deformation of blood vessels upon stretching, internal pressure, and torsion, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 16, No. 1, pp. 76-80, 1980.

[16] A. Delfino, N. Stergiopulos, J. E. Moore, J. J. Meister, Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation, *Biomechanics*, Vol. 30, No. 8, pp. 777-786, 1997.

[17] A. D. Shah, J. D. Humphrey, Finite strain elastodynamics of intracranial saccular aneurysms, *Biomechanics*, Vol. 32, No. 6, pp. 593-599, 1999.

[18] C. Shu, H. Du, Implementation of clamped and simply supported boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of beams and plates, *Solids and Structures*, Vol. 34, No. 7, pp. 819-835, 1997.

[19] F. Civan, C. M. Sliepcevich, Differential quadrature for multi-dimensional problems, *Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 101, No. 2, pp. 423-443, 1984.

[20] G. A. Holzapfel, G. Sommer, C. T. Gasser, P. Regitnig, Determination of layer-specific mechanical properties of human coronary arteries with nonatherosclerotic intimal thickening and related constitutive modeling, *Physiology Heart and Circulatory Physiology*, Vol. 289, No. 5, pp. 2048-2058, 2005.