



## تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای نانو کامپوزیتی مدرج تابعی احاطه شده توسط بستر الاستیک تحت بارگذاری حرارتی

رضا انصاری<sup>1\*</sup>، جلال ترابی<sup>2</sup>

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

\*رشت، صندوق پستی 3756، r\_ansari@guilan.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 08 آذر 1393

پذیرش: 09 دی 1393

ارائه در سایت: 19 بهمن 1393

کلید واژگان:

ارتعاشات آزاد

پوسته استوانه‌ای

کامپوزیت‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانو

لوله کربنی

بستر الاستیک

### چکیده

در این مقاله، ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از کامپوزیت‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تحت بارگذاری حرارتی و احاطه شده توسط بستر الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. توزیع نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت پوسته کامپوزیتی به دو صورت یکنواخت و مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. بستر الاستیک به صورت مدل پسترناک در نظر گرفته شده است که در این مدل علاوه بر ثابت فنری نوع وینکلر، ثابت برشی نیز لحاظ می‌گردد. اثر بارگذاری حرارتی به صورت وجود تنش‌های اولیه در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم با استفاده از اصل همپلتون و براساس تئوری برشی مرتبه اول و در نظر گرفتن روابط کرنش-تغییر مکان سندرز و داتل به دست آمده است. معادلات حاکم با استفاده از روش تفاضل مربعات تعمیم یافته در راستای طولی و یک عملگر مشتق گیر متناوب در راستای محیطی، گسسته سازی شده است. در ابتدا نتایج حاضر با نتایج موجود اعتبارسنجی شده است. سپس تاثیر پارامترهای مختلف از جمله بارگذاری حرارتی، شرایط مرزی مختلف، بستر الاستیک و شرایط هندسی متفاوت بر روی فرکانس طبیعی سازه مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که وجود بستر الاستیک و بارگذاری حرارتی اولیه به ترتیب باعث افزایش و کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود.

## Free vibration analysis of FG-CNTRC cylindrical shells surrounded by elastic foundation subjected to thermal loading

Reza Ansari<sup>1</sup>, Jalal Torabi

Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran

\* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, r\_ansari@guilan.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 29 November 2014  
Accepted 30 December 2014  
Available Online 08 February 2015

#### Keywords:

Free vibration analysis  
cylindrical shell  
Functionally graded carbon nanotube  
reinforced composite  
elastic foundation

### ABSTRACT

In this paper, free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite (FG-CNTRC) cylindrical shells surrounded by elastic foundation and subjected to uniform temperature rise loading is investigated. The material properties of FG-CNTRC are assumed to be graded through the thickness direction. Two kinds of carbon nanotube reinforced composites including uniformly distributed (UD) and functionally graded (FG) are considered. The elastic foundation is modeled by two-parameter Pasternak model, which is obtained by adding a shear layer to the Winkler model. The effect of thermal loading is considered as an initial stress. Applying the Hamilton's principle based on first-order shear deformation theory and considering Sanders and Donnell strain-displacement relation, the governing equations are obtained. Using the generalized differential quadrature method in axial direction and periodic differential matrix operators in circumferential direction, the equilibrium equations are discretized. The results are compared with those presented in literature. In addition, the effect of various parameters such as thermal loading, boundary conditions, elastic foundation and different geometrical conditions are studied. The results show that increase in the elastic foundation coefficients and initial thermal loading increase and decrease the non-dimensional fundamental frequency, respectively.

### 1- مقدمه

سختی بالا، نسبت منظر<sup>3</sup> بالا و چگالی پایین باعث شده است که این مواد به عنوان یک تقویت کننده مناسب در مواد کامپوزیتی به شمار آیند. با استفاده از ایده به کار رفته در مواد مدرج تابعی و توزیع هدفمند نانولوله‌های کربنی در مواد کامپوزیتی، مواد کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله کربنی<sup>4</sup>

با توجه به توسعه مواد مدرج تابعی<sup>1</sup> در سال‌های اخیر، تحقیقات در زمینه رفتار مکانیکی سازه‌های ساخته شده از این مواد، گسترش روز افزون یافته است. از طرفی خواص منحصر به فرد نانولوله‌های کربنی<sup>2</sup> اعم از مقاومت بالا،

3- Aspect ratio

4- Functionally graded carbon nanotube reinforced composite

1- Functionally graded materials

2- Carbon nanotubes

Please cite this article using:

R. Ansari, J. Torabi, Free vibration analysis of FG-CNTRC cylindrical shells surrounded by elastic foundation subjected to thermal loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 271-282, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

بوجود آمدند.

جهت سهولت، در ادامه مقاله به جای عبارت کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی از عبارت نانوکامپوزیت‌ها استفاده می‌شود. بررسی رفتار مکانیکی سازه‌های ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های مدرج تابعی اولین بار توسط شن ارائه گردید [1]. وی در این تحقیق خمش غیرخطی ورق ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های مدرج تابعی را تحت شرایط حرارتی مختلف بررسی کرد و سعی نمود تا با توزیع نانولوله‌های کربنی در یک راستای مطلوب، خواص مکانیکی سازه را بهبود بخشد. پس از این تحقیق، مطالعات بسیاری در زمینه بررسی رفتار مکانیکی تیرها، ورق‌ها، پوسته‌ها و پانل‌های ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های مدرج تابعی صورت گرفته است که در این‌جا خلاصه‌ای از آن‌ها بیان می‌گردد.

که و همکارانش [2] ارتعاشات غیرخطی تیرهای نانو کامپوزیتی مدرج تابعی را براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول<sup>1</sup> و روابط هندسی غیرخطی فون کارمن<sup>2</sup> مورد بررسی قرار دادند. با استفاده از روش ریتز<sup>3</sup>، معادلات مقادیر ویژه حاکم استخراج شده و با استفاده از روش تکرار شونده مستقیم<sup>4</sup> حل گردید. نتایج نشان داد که فرکانس‌های خطی و غیرخطی مربوط به توزیع متقارن نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت، بیشتر از توزیع یکنواخت و غیرمتقارن نانولوله‌ها می‌باشد. که و همکارانش [3] همچنین پایداری دینامیکی تیرهای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های مدرج تابعی را بررسی نمودند. معادلات حاکم براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شد و با استفاده از روش تفاضل مربعات<sup>5</sup> به دستگاه معادلات خطی تبدیل گردید. تاثیر عوامل مختلف از جمله کسر حجمی نانو لوله کربنی، نسبت طول به ضخامت و شرایط مرزی بر پایداری دینامیکی تیر مطالعه شد.

تحلیل ارتعاشات و کمانش تیر تیموشنکو<sup>6</sup> ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های مدرج تابعی که بر روی بستر الاستیک قرار گرفته است، توسط یاس و صمدی انجام شد [4]. معادلات حاکم با استفاده از اصل همپلتون<sup>7</sup> استخراج گردید و با بکارگیری روش تفاضل مربعات تعمیم یافته (GDO)<sup>8</sup> حل شد. شن و ژیانگ [5] تحلیل ارتعاشات و خمش غیرخطی و همچنین پس کمانش تیرهای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های مدرج تابعی را بر روی بستر الاستیک و تحت شرایط حرارتی بررسی نمودند. روابط حاکم براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا<sup>9</sup> استخراج گردید و خواص مکانیکی نانو کامپوزیت وابسته به دما در نظر گرفته شد. آن‌ها دریافتند که کسر حجمی بیشتر نانولوله‌های کربنی در ترکیب کامپوزیت، لزوماً منجر به فرکانس طبیعی و یا دمای بحرانی کمانش بالاتر نخواهد شد.

انصاری و همکارانش [6]، ارتعاشات اجباری غیرخطی تیر تیموشنکو ساخته شده از نانوکامپوزیت‌های مدرج تابعی را مطالعه نمودند. با استفاده از اصل همپلتون و براساس تئوری تیر تیموشنکو و روابط هندسی غیرخطی فون کارمن، روابط حاکم استخراج شده و با استفاده از روش تفاضل مربعات تعمیم یافته، در حوزه مکان گسسته‌سازی شد. سپس با استفاده از روش گلرکین<sup>10</sup> عددی، معادلات گسسته، از لحاظ تعداد کاهش یافته و با بکارگیری یک

عملگر مشتق‌گیر متناوب<sup>11</sup>، معادلات در حوزه زمان نیز گسسته‌سازی شد و استفاده از روش طول قوس<sup>12</sup> حل گردید.

کمانش و پس کمانش ورق‌های نانو کامپوزیتی مدرج تابعی تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی توسط شن و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت [7,8]. فرض شد که توزیع هدفمند نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت صورت گرفته است و خواص مکانیکی نانو کامپوزیت مدرج تابعی با استفاده از مدل‌های میکرومکانیکی به دست آمد. نتایج نشان داد که با توزیع هدفمند نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت، بار حرارتی و مکانیکی کمانش و همچنین مقاومت پس کمانش سازه افزایش می‌یابد. همچنین ونگ و شن [9,10]، ارتعاشات و پاسخ دینامیکی غیرخطی ورق نانوکامپوزیتی هدفمند را که بر روی بستر الاستیک قرار دارد، تحت بارگذاری حرارتی اولیه مورد مطالعه قرار دادند. نتایج نشان داد که با افزایش بارگذاری حرارتی اولیه و یا کاهش ضرایب بستر الاستیک، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و این در حالی است که نسبت فرکانس غیرخطی به خطی کاهش می‌یابد.

مهرآبادی و همکارانش [11] نیز کمانش ورق‌های نانو کامپوزیتی هدفمند را تحت بارگذاری مکانیکی تک محوره و دو محوره بررسی نمودند. معادلات تعادل و پایداری با استفاده از تئوری ورق میندلین<sup>13</sup> به دست آمد. لی و همکارانش کمانش مکانیکی، ارتعاشات آزاد و خمش غیرخطی ورق‌های ساخته شده از کامپوزیت‌های مدرج تابعی را با استفاده از روش بدون المان کی‌پی-ریتز<sup>14</sup> مطالعه نمودند [12-14]. خواص مکانیکی موثر نانو کامپوزیت، با استفاده از مدل‌های میکرومکانیکی و براساس روش اشلیبی - موری - تاناکا<sup>15</sup> و یا قانون ترکیب تعمیم یافته<sup>16</sup> تعیین گردید.

شن [15] کمانش حرارتی و پس کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های مدرج تابعی را بررسی نمود. شرایط مرزی پوسته در دو انتها به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شد و علاوه بر توزیع یکنواخت نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت، سه نوع توزیع هدفمند نیز مطالعه گردید. همچنین شن و ژیانگ ارتعاشات غیرخطی تحت بارگذاری حرارتی و پس کمانش تحت بارگذاری مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای نانو کامپوزیتی هدفمند را بررسی نمودند [16,17]. علاوه بر این، شن در تحقیق دیگری پس کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های مدرج تابعی را تحت بارگذاری پیچشی بررسی نمود [18]. در تمامی این تحقیقات که توسط شن و همکارانش صورت گرفته است، روابط حاکم براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و روابط هندسی غیرخطی فون کارمن استخراج شد و با استفاده از روش اغتشاش بهبود یافته<sup>17</sup> حل گردید.

با استفاده از روش بدون المان<sup>18</sup>، مرادی دستجردی و همکارانش [19] انتشار موج تنش را در پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از نانوکامپوزیت‌های هدفمند مطالعه نمودند. در روش بدون مش، برای تقریب میدان جابجایی از توابع شکل حداقل مربعات متحرک<sup>19</sup> استفاده شد. همچنین برای اعمال شرایط مرزی هندسی، روش تبدیل<sup>20</sup> به کار برده شد. حسینی نیز [20] با به کارگیری روش بدون مش هیبرید<sup>21</sup> که بر پایه روش تفاضل محدود تعمیم

11- periodic differential matrix operators  
12- Arc-length  
13- Mindlin plate theory  
14- Element-free kp-Ritz  
15- Eshelby-Mori-Tanaka  
16- Extended rule of mixture  
17- Improved perturbation technique  
18- Mesh free  
19- Moving Least squares shape function  
20- Transformation method  
21- Hybrid mesh free method

1- First-order shear deformation theory  
2- Von Karman  
3- Ritz  
4- Direct iterative method  
5- Differential quadrature  
6- Timoshenko  
7- Hamilton principle  
8- Generalized Differential Quadrature :GDO  
9- Higher-order shear deformation theory  
10- Galerkin

یافته<sup>1</sup> است، تحلیل فرکانسی پوسته‌های استوانه‌ای نانو کامپوزیتی هدفمند را انجام داد. فرض شد که سطح داخلی پوسته توسط یک بار ضربه‌ای<sup>2</sup> تحریک می‌گردد. جهت بررسی رفتار دینامیکی و به دست آوردن فرکانس طبیعی پایه سازه، تغییر مکان‌ها در حوزه زمان با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع<sup>3</sup> به حوزه فرکانس تبدیل شد.

عراق و همکارانش [21]، با استفاده از روش اشلیبی-موری-تاناکا، رفتار ارتعاشی پل‌های استوانه‌ای نانو کامپوزیتی مدرج تابعی را بررسی نمودند. در این تحقیق با استفاده از روش تفاضل مربعات تعمیم یافته دوبعدی، معادلات حرکت گسسته سازی شد و با اعمال شرایط مرزی، فرکانس‌های طبیعی سازه تعیین گردید. همچنین تاثیر نسبت منظر و موجی بودن نانولوله‌های کربنی بر رفتار ارتعاشی پل‌های استوانه‌ای نانو کامپوزیتی، توسط جم و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت [22]. توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت پل به صورت متقارن و غیر متقارن و یکنواخت در نظر گرفته شد و مشاهده گردید که توزیع متقارن قابلیت بیشتری برای کاهش و یا افزایش فرکانس طبیعی دارد. علاوه بر این، با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی، یاس و همکارانش رفتار ارتعاشی پل‌های استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های مدرج تابعی را مطالعه نمودند [23].

## 2- خواص مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

### مدرج تابعی

فرض شده است که کامپوزیت تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی از ترکیب نانولوله‌های کربنی تک لایه<sup>7</sup> و ماده زمینه ایزوتروپ<sup>8</sup> تشکیل شده است. توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت به صورت یکنواخت و مدرج تابعی در نظر گرفته شده است. مدل‌های میکرومکانیکی متفاوتی برای پیش‌بینی خواص مکانیکی موثر کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی ارائه شده است که از آن جمله می‌توان به مدل موری-تاناکا و قانون ترکیب اشاره کرد. بر اساس قانون ترکیب تعمیم یافته، مدول یانگ و مدول برشی موثر برای نانو کامپوزیت به صورت روابط (3-1) ارائه می‌شوند [15]:

$$E_{11} = \eta_1 V_{cn} E_{11}^{cn} + V_m E^m \quad (1)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{cn}}{E_{22}^{cn}} + \frac{V_m}{E^m} \quad (2)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{cn}}{G_{12}^{cn}} + \frac{V_m}{G^m} \quad (3)$$

که در این روابط  $E_{11}^{cn}$ ،  $E_{22}^{cn}$ ،  $G_{12}^{cn}$  به ترتیب بیانگر مدول یانگ و مدول برشی نانو لوله کربنی بوده و  $E^m$  و  $G^m$  نیز خواص مرتبط با ماده زمینه می‌باشند. همچنین  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) پارامتر کارایی<sup>9</sup> نانولوله کربنی می‌باشد که برای در نظر گرفتن اثرات اندازه<sup>10</sup> در خواص مواد لحاظ شده است و از طریق تطابق نتایج حاصل از قانون ترکیب تعمیم یافته با مدل‌های میکرومکانیکی تعیین می‌شود. علاوه بر این  $V_m$  و  $V_{cn}$  نیز به ترتیب کسر حجمی نانولوله کربنی و ماده زمینه می‌باشند و از رابطه  $V_m + V_{cn} = 1$  پیروی می‌کنند.

علاوه بر توزیع یکنواخت، سه نوع توزیع مدرج تابعی اعم از  $FG - A$ ،  $FG - X$  و  $FG - O$  در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. در توزیع نوع  $FG - A$ ، سطح خارجی پوسته کاملاً از ماده زمینه تشکیل شده و سطح داخلی فقط متشکل از نانو لوله کربنی می‌باشد. در توزیع  $FG - O$ ، سطح میانی پوسته کاملاً از نانو لوله تشکیل شده و سطح خارجی و داخلی تنها از ماده زمینه می‌باشد. در توزیع نوع  $FG - X$  نیز سطح میانی تنها حاوی ماده زمینه بوده و سطوح داخلی و خارجی از نانو لوله تشکیل شده است. کسر حجمی توزیع نانولوله کربنی در راستای ضخامت برای حالت‌های مختلف به صورت روابط (7-4) می‌باشد [6]:

$$UD: V_{cn} = V_{cn}^* \quad (4)$$

مهرآبادی و همکارانش [24] تنش‌های ایجاد شده به واسطه رفتار خمشی پل‌استوانه‌ای نانو کامپوزیتی مدرج تابعی را تحت بارگذاری مکانیکی بررسی نمودند. نتایج نشان داد که کسر حجمی نانولوله‌های کربنی می‌تواند باعث کاهش تنش‌های محوری و محیطی در سطح داخلی پوسته شود. ارتعاشات پل‌های استوانه‌ای نانو کامپوزیتی هدفمند که توسط لایه‌های پیرو الکتریک احاطه شده‌اند، توسط علی بیگلو بررسی گردید [25]. وی شرایط مرزی پل را در چهار طرف به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفت و معادلات دیفرانسیلی فضای حالت را با استفاده از بسط سری فوریه در راستای محوری و محیطی و همچنین فضای حالت در راستای ضخامت، حل نمود.

شن [26] ارتعاشات غیرخطی پل‌های استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند را که بر روی بستر الاستیک قرار گرفته‌اند، تحت شرایط حرارتی بررسی نمود. همچنین در تحقیق دیگری، با استفاده از روش بدون المان کی-پی-ریتز، لی و همکارانش ارتعاشات آزاد پل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی را مطالعه نمودند [27].

در این تحقیق ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی که توسط بستر الاستیک احاطه شده‌اند، تحت بارگذاری حرارتی اولیه مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است که ارتعاشات پوسته‌های نانو کامپوزیتی هدفمند تحت بارگذاری حرارتی و احاطه شده توسط بستر الاستیک تا کنون مورد بررسی قرار نگرفته است. از دیگر نوآوری‌های این کار می‌توان به مواردی از جمله مقایسه نتایج حاصل از تئوری‌های دائل<sup>4</sup> و سندرز<sup>5</sup> در شرایط هندسی مختلف و همچنین استفاده از یک عملگر مشتق‌گیر متناوب جهت گسسته‌سازی روابط در راستای محیطی پوسته اشاره کرد. معادلات تعادل با استفاده از اصل همپلتون و به کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و همچنین در نظر گرفتن روابط کرنش-تغییر مکان سندرز و دائل بدست آمده است. بستر الاستیک نیز به صورت مدل پسترناک<sup>6</sup> در نظر گرفته شده است. جهت حل

1- Generalized finite difference

2- Shock loading

3- Fast Fourier Transformation: FFT

4- Donnell

5- Sanders

6- Pasternak

7- Single-walled carbon nanotube

8- Isotropic matrix

9- Efficiency parameters

10- Size effect

$$\begin{aligned} \chi_x &= \varphi_{x,x}, \quad \chi_y = \frac{\varphi_{y,y}}{R}, \quad \chi_{xy} = \frac{\varphi_{x,y}}{R} + \varphi_{y,x} \\ \beta_x &= -w_x, \quad \beta_y = \frac{1}{R}(\delta_1 v - w_y) \end{aligned} \quad (15)$$

در روابط (14) و (15)،  $\varepsilon_x^0$ ،  $\varepsilon_y^0$  و  $\gamma_{xy}^0$  به ترتیب بیانگر کرنش غشایی محوری، محیطی و برشی بوده و  $\chi_x$ ،  $\chi_y$  و  $\chi_{xy}$  نیز تغییر در انحنا می‌باشند. همچنین  $\gamma_{yz}$  و  $\gamma_{xz}$  نیز معرف کرنش‌های برشی عرضی می‌باشند. همچنین هنگامی که  $\delta_1 = 1$  باشد، تئوری سندرز می‌باشد و اگر  $\delta_1 = 0$  لحاظ شود، تئوری دائل خواهد بود.

براساس قانون هوک، تنش‌ها براساس مولفه‌های خطی کرنش به صورت رابطه (16) به دست می‌آیند [30]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \times \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \right) \quad (16)$$

که ضرایب  $Q_{ij}$  به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{66} &= G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13} \end{aligned} \quad (17)$$

با توجه به تنش‌های ارائه شده در رابطه (16)، منتهج‌های نیرو و ممان از رابطه (18) حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} (N_i, M_i) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i(1, z) dz, \quad (i = x, y, xy) \\ Q_i &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i dz, \quad (i = xz, yz) \end{aligned} \quad (18)$$

در نتیجه منتهج‌های نیرو و ممان به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_s A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_s A_{55} \end{bmatrix} \times \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \\ M_x^T \\ M_y^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (19)$$

که در رابطه (19)،  $k_s$  بیانگر ضریب اصلاح برشی<sup>1</sup> می‌باشد و مقدار آن برابر  $k_s = 5/6$  لحاظ می‌شود [28]. همچنین ضرایب  $A_{ij}$ ،  $B_{ij}$  و  $D_{ij}$  به صورت رابطه (20) ارائه می‌شوند:

$$\text{FGA: } V_{cn} = \left(1 - \frac{2z}{h}\right) V_{cn}^* \quad (5)$$

$$\text{FGO: } V_{cn} = \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) V_{cn}^* \quad (6)$$

$$\text{FGX: } V_{cn} = 2 \left(\frac{2|z|}{h}\right) V_{cn}^* \quad (7)$$

در روابط بالا  $V_{cn}^*$  به صورت رابطه (8) تعریف می‌شود:

$$V_{cn}^* = \frac{w_{cn}}{w_{cn} + \left(\frac{\rho^{cn}}{\rho^m}\right) - \left(\frac{\rho^{cn}}{\rho^m}\right) w_{cn}} \quad (8)$$

که در رابطه (8)،  $w_{cn}$  کسر جرمی نانولوله کربنی در کامپوزیت بوده و  $\rho^{cn}$  و  $\rho^m$  به ترتیب بیانگر چگالی ماده زمینه و نانولوله می‌باشد. چگالی کلی نانوکامپوزیت نیز از رابطه (9) به دست می‌آید:

$$\rho = V_{cn}\rho^{cn} + V_m\rho^m \quad (9)$$

ضریب انبساط حرارتی طولی و عرضی نانوکامپوزیت نیز به ترتیب از روابط (10) و (11) به دست می‌آید [15]:

$$\alpha_{11} = \frac{V_{cn}E_{11}^{cn}\alpha_{11}^{cn} + V_mE^m\alpha^m}{V_{cn}E_{11}^{cn} + V_mE^m} \quad (10)$$

$$\alpha_{22} = (1 + \nu_{12}^{cn})V_{cn}\alpha_{22}^{cn} + (1 + \nu^m)V_m\alpha^m - \nu_{12}\alpha_{11} \quad (11)$$

که در این روابط،  $\alpha_{11}^{cn}$ ،  $\alpha_{22}^{cn}$  و  $\alpha^m$  به ترتیب بیانگر ضریب انبساط حرارتی نانولوله و ماده زمینه بوده و  $\nu_{12}^{cn}$  و  $\nu^m$  نیز به ترتیب ضریب پواسون نانولوله و ماده زمینه می‌باشند. همچنین ضریب پواسون نانو کامپوزیت نیز از رابطه (12) به دست می‌آید:

$$\nu_{12} = V_{cn}\nu_{12}^{cn} + V_m\nu^m \quad (12)$$

### 3- روابط حاکم

پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانوکامپوزیت‌های مدرج تابعی را با شعاع متوسط  $R$ ، ضخامت  $h$  و طول  $L$  در نظر بگیرید. سطح خارجی پوسته توسط بستر الاستیک احاطه شده است که اثرات بستر با استفاده از مدل پسترناک بیان می‌شود. دستگاه مختصات  $(x, y, z)$  بر روی سطح میانی پوسته در نظر گرفته می‌شود که مختصه  $x$  در راستای محوری، مختصه  $y$  در راستای محیطی و مختصه  $z$  در راستای عمود بر سطح میانی و به سمت خارج پوسته می‌باشد. با توجه به دستگاه مختصات، تغییر مکان هر نقطه دلخواه از پوسته در راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  را می‌توان براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به صورت رابطه (13) بیان کرد:

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) \\ V(x, y, z, t) \\ W(x, y, z, t) \end{cases} = \begin{cases} u(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, t) \end{cases} \quad (13)$$

که در رابطه بالا  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب معرف تغییر مکان سطح میانی پوسته در راستای محوری، محیطی و عرضی بوده و  $\varphi_x$  و  $\varphi_y$  نیز بیانگر دوران سطح عمود حول محور  $x$  و  $y$  می‌باشند. روابط کرنش-تغییر مکان غیرخطی براساس تئوری دائل و سندرز به صورت رابطه (14) تعریف می‌شوند [28,29]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} = \begin{cases} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{cases} + \frac{1}{2} \begin{cases} \beta_x^2 \\ \beta_y^2 \\ 2\beta_x\beta_y \end{cases} + z \begin{cases} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{cases}, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{cases} = \begin{cases} \varphi_y - \beta_y \\ \varphi_x - \beta_x \end{cases}$$

که در رابطه (14)، روابط (15) حاکم است:

$$\varepsilon_x^0 = u_{,x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{v_{,y}}{R}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{u_{,y}}{R} + v_{,x},$$

1- Shear correction factor

$$M_{xy,x} + \frac{M_{y,y}}{R} - Q_{yz} = I_2 \ddot{v} + I_3 \ddot{\phi}_y \quad (31)$$

منتجه نیروهای حرارتی اولیه  $(N_{xy}^0, N_y^0, N_x^0)$  با استفاده از تحلیل غشایی معادلات تعادل و در نظر گرفتن بارگذاری حرارتی به صورت رابطه (32) حاصل می‌شوند [31]:

$$N_x^0 = -\frac{(A_{22} + R^2 K_w) N_x^T - A_{12} N_y^T}{A_{22} + R^2 K_w},$$

$$N_y^0 = -\frac{K_w R^2 N_y^T}{A_{22} + K_w R^2},$$

$$N_{xy}^0 = 0 \quad (32)$$

با جای گذاری منتجه‌های نیرو و ممان از رابطه (19) در معادلات حرکت، این معادلات برحسب متغیرهای جابجایی به صورت روابط (33-37) به دست می‌آیند:

$$\left( A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \left( \frac{A_{12} + A_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) v$$

$$+ \left( \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} \right) w + \left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_x$$

$$+ \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \phi_y = I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{\phi}_x \quad (33)$$

$$\left( \frac{A_{12} + A_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) u + \left( A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right.$$

$$\left. - \frac{\delta_1 k_s A_{44}}{R^2} - \frac{\delta_1 N_y^0}{R} \right) v + \left( \frac{A_{22} + \delta_1 k_s A_{44}}{R^2} \frac{\partial}{\partial y} \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_1 N_y^0}{R} \frac{\partial}{\partial y} \right) w + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \phi_x$$

$$+ \left( B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\delta_1 k_s A_{44}}{R} \right) \phi_y$$

$$= I_1 \ddot{v} + I_2 \ddot{\phi}_y \quad (34)$$

$$\left( -\frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} \right) u - \left( \frac{A_{22} + \delta_1 k_s A_{44}}{R^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\delta_1 N_y^0}{R^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) v$$

$$\left( k_s A_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k_s A_{44}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{A_{22}}{R^2} + N_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right.$$

$$\left. + \frac{N_y^0}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_w + k_g \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right) w$$

$$+ \left( \frac{k_s A_{55} R - B_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_x$$

$$+ \left( \frac{k_s A_{44} R - B_{22}}{R^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi_y = I_1 \ddot{w} \quad (35)$$

$$\left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) v$$

$$- \left( \frac{k_s A_{55} R - B_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} \right) w + \left( D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right.$$

$$\left. - k_s A_{55} \right) \phi_x + \left( \frac{D_{12} + D_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \phi_y$$

$$= I_2 \ddot{u} + I_3 \ddot{\phi}_x \quad (36)$$

$$\left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) u + \left( B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_1 k_s A_{44}}{R} \right) v - \left( \frac{k_s A_{44} R - B_{22}}{R^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) w$$

$$+ \left( \frac{D_{12} + D_{66}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \phi_x + \left( D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right.$$

$$\left. + \frac{D_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_s A_{44} \right) \phi_y = I_2 \ddot{v} + I_3 \ddot{\phi}_y \quad (37)$$

همچنین سه نوع شرط مرزی تکیه‌گاه ساده (S)، تکیه‌گاه گیردار (C) و تکیه‌گاه آزاد (F) به صورت روابط (38-40) ارائه می‌شوند:

• تکیه‌گاه گیردار:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz, \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} z dz,$$

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} z^2 dz, \quad (ij = 11, 12, 22, 66, 55, 44) \quad (20)$$

همچنین منتجه‌های نیرو و ممان به واسطه بارگذاری حرارتی به صورت رابطه (21) بیان می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \end{Bmatrix} \Delta T dz,$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \end{Bmatrix} \Delta T z dz \quad (21)$$

#### 4- معادلات حرکت

معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانوکامپوزیت‌های مدرج تابعی که به وسیله بستر الاستیک احاطه شده و تحت بارگذاری حرارتی اولیه قرار گرفته است، با استفاده از اصل همیلتون استخراج می‌شود. در صورتی که انرژی کرنشی، انرژی کرنشی به واسطه بستر الاستیک، انرژی کرنشی بواسطه بارگذاری حرارتی اولیه و انرژی جنبشی به ترتیب با  $U, U_F, U_{in}$  و  $T$  نشان داده شود، اصل همیلتون به صورت رابطه (22) بیان می‌گردد:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(U + U_F + U_{in} - T) dt = 0 \quad (22)$$

انرژی جنبشی و انرژی کرنشی برای پوسته استوانه‌ای براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به صورت زیر می‌باشند:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \rho (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dAdz \quad (23)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy}$$

$$+ \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}] dAdz \quad (24)$$

که در رابطه (23)،  $(\dot{\quad})$  بیانگر مشتق نسبت به زمان می‌باشد. در صورتی که منتجه نیروهای حرارتی اولیه را  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$  تعریف کنیم، انرژی کرنشی ناشی از آن به صورت رابطه (25) می‌باشد:

$$U_{in} = \frac{1}{2} \int_A [N_x^0 \varepsilon_x + N_y^0 \varepsilon_y + N_{xy}^0 \gamma_{xy}] dA \quad (25)$$

همچنین انرژی کرنشی به واسطه بستر الاستیک نوع پسترناک به صورت رابطه (26) ارائه می‌شود:

$$U_F = \frac{1}{2} \int_A \left[ K_w w^2 + K_g \left( w_{,x}^2 + \frac{1}{R^2} w_{,y}^2 \right) \right] dA \quad (26)$$

که در آن  $K_w$  ضریب وینکلر و  $K_g$  ضریب برشی بستر الاستیک می‌باشد. با جای گذاری روابط (23-26) در اصل همیلتون، معادلات خطی حرکت به صورت روابط (27-31) حاصل می‌شوند:

$$N_{x,x} + \frac{N_{xy,y}}{R} = I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{\phi}_x \quad (27)$$

$$\frac{N_{yy,y}}{R} + N_{xy,x} + \frac{\delta_1}{R} \left( \frac{Q_{yz}}{R} - N_{xy}^0 \beta_x - N_{yy}^0 \beta_y \right)$$

$$= I_1 \ddot{v} + I_2 \ddot{\phi}_y \quad (28)$$

$$Q_{xz,x} + \frac{Q_{yz,y}}{R} - \frac{N_y}{R} - N_x^0 \beta_{x,x} - \frac{N_y^0}{R} \beta_{y,y} - N_{xy}^0 (\beta_{y,x}$$

$$+ \frac{\beta_{x,y}}{R}) - k_w w + k_g \left( w_{,xx} + \frac{w_{,yy}}{R^2} \right) = I_1 \ddot{w} \quad (29)$$

$$M_{x,x} + \frac{M_{xy,y}}{R} - Q_{xz} = I_2 \ddot{u} + I_3 \ddot{\phi}_x \quad (30)$$

$$L(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_x} (x_i - x_j) \quad (46)$$

مطالعات پیشین [28] نشان داده‌اند که نوع توزیع نقاط گره‌ای در پایداری و همگرایی روش GDQ موثر بوده و توزیع چبیشف-گوس-لوباتو بیشترین همگرایی و پایداری را نتیجه می‌دهد. از این‌رو، در این‌جا نیز از این نوع توزیع نقاط گره‌ای استفاده می‌شود که به صورت رابطه (47) می‌باشد:

$$X_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) L \quad (47)$$

### 5-2- عملگر مشتق گیر متناوب

ایده اصلی استفاده از عملگر مشتق گیر متناوب بر این اصل استوار است که با توجه به متناوب بودن تغییر مکان‌ها در راستای محیطی، از یک عملگر متناوب استفاده شود تا به طور ذاتی شرایط تناوبی را ارضا کرده و نیازی به اعمال شرایط سازگاری در مرزهای راستای محیطی نباشد. در این روش، عملگر مشتق گیر با استفاده از مشتقات توابع متناوب سینک<sup>2</sup> که همانا توابع پایه در روش همپوشانی<sup>3</sup> می‌باشند، به دست می‌آید. عملگر ماتریسی برای مشتق مرتبه اول و دوم به صورت رابطه (48) می‌باشد [33]:

$$\begin{aligned} \bar{D}_y^{(1)} &= [a_{i,j}], \\ \bar{D}_y^{(2)} &= [b_{i,j}] \end{aligned} \quad (48)$$

که ضرایب  $a_{i,j}$  و  $b_{i,j}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{i,1} = \frac{(-1)^{i-1}}{2} \cot \frac{\pi(i-1)}{N_y} \\ a_{1,j} = \frac{(-1)^{N_y-j+1}}{2} \cot \frac{\pi(N_y-j+1)}{N_y} \\ a_{i+1,j+1} = a_{i,j} \end{cases} \quad i, j = 2, \dots, N_y \quad (49)$$

$$\begin{cases} b_{11} = -\frac{N_y^2}{12} - \frac{1}{6} \\ b_{i,1} = \frac{(-1)^{i-2}}{2 \sin^2 \frac{\pi(i-1)}{N_y}} \\ b_{1,j} = \frac{(-1)^{N_y-j}}{2 \sin^2 \frac{\pi(N_y-j+1)}{N_y}} \\ b_{i+1,j+1} = b_{i,j} \end{cases} \quad i, j = 2, \dots, N_y \quad (50)$$

که در رابطه بالا،  $N_y$  تعداد نقاط گره‌ای در راستای محیطی می‌باشد.

### 5-3- گسسته‌سازی معادلات حرکت

در این قسمت با توجه به عملگرهای مشتق گیر که در بخش‌های 5-1 و 5-2 بیان گردید، معادلات حرکت گسسته‌سازی می‌شود. بدین منظور مقادیر متغیرهای تغییر مکان در نقطه گره‌ای به صورت رابطه (51) ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} U^T &= [U_{11}, U_{12}, \dots, U_{N_x N_y}], V^T = [V_{11}, V_{12}, \dots, V_{N_x N_y}] \\ W^T &= [W_{11}, W_{12}, \dots, W_{N_x N_y}], \\ \Phi_x^T &= [\Phi_{x11}, \Phi_{x12}, \dots, \Phi_{xN_x N_y}], \\ \Phi_y^T &= [\Phi_{y11}, \Phi_{y12}, \dots, \Phi_{yN_x N_y}], \end{aligned} \quad (51)$$

با توجه به این‌که مقادیر گره‌ی متغیرهای مکان در دو راستای محوری و محیطی در نظر گرفته شده‌اند، برای بیان معادلات حرکت، عملگرهای مشتق گیر ماتریسی به صورت رابطه (52) بیان می‌شوند:

$$u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = 0, \quad 0 \leq y \leq 2\pi \quad (38)$$

• تکیه‌گاه ساده:

$$u = v = w = \varphi_y = 0, \quad M_x = 0, \quad 0 \leq y \leq 2\pi \quad (39)$$

• تکیه‌گاه آزاد:

$$N_x = N_{xy} = Q_{xz} = M_x = M_{xy} = 0 \quad 0 \leq y \leq 2\pi \quad (40)$$

### 5- حل معادلات حرکت

جهت حل معادلات حرکت، مولفه‌های تغییر مکان در دو راستای محوری و محیطی گسسته‌سازی می‌شود. جهت گسسته‌سازی در راستای محوری از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته استفاده می‌شود. در صورتی که در راستای محیطی نیز از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته (GDO) استفاده شود، باید شرایط سازگاری به معادلات اعمال شود. از این‌رو با توجه به این‌که تغییر مکان‌ها در راستای محیطی در بازه  $[0, 2\pi]$  متناوب می‌باشند، به‌جای استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در راستای محیطی، از یک عملگر مشتق گیر متناوب استفاده خواهد شد. در واقع با استفاده از این عملگر متناوب دیگر نیازی به اعمال شرایط سازگاری نخواهد بود. در ادامه مختصری از روش روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته و عملگر مشتق گیر متناوب ارائه می‌گردد.

### 5-1- روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته

براساس روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته، مشتق مرتبه  $m$  تابع  $f(x)$  به صورت مجموع خطی از حاصل ضرب ضرایب وزنی<sup>1</sup> و مقادیر گره‌ای تابع به دست می‌آید [32]:

$$\left. \frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N_x} \zeta_{ij}^r f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (41)$$

در رابطه بالا  $N_x$  تعداد کل نقاط گره‌ای در راستای محیطی بوده و  $\zeta_{ij}^r$  بیانگر ضرایب وزنی می‌باشد. در صورتی که بردار ستونی  $F$  به صورت زیر تعریف گردد:

$$F = [F_j] = [f(x_j)] = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{N_x})]^T \quad (42)$$

که در آن  $f(x_j)$  مقادیر گره‌ی تابع  $f(x)$  در نقطه  $x = x_j$  باشد، عملگر ماتریسی مشتق گیر براساس روش GDQ و رابطه (41)، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r} (F) = \bar{D}_x^r F = [\bar{D}_x^r]_{i,j} \{F_j\} \quad (43)$$

که در رابطه بالا

$$\bar{D}_x^r = [\bar{D}_x^r]_{i,j} = \zeta_{ij}^r, \quad i, j = 1: N_x \quad (44)$$

در رابطه (44)، بالا نویسنده  $r$  مرتبه مشتق را مشخص کرده و ضرایب

وزنی  $\zeta_{ij}^r$  به صورت رابطه (45) ارائه می‌شوند.

$$\zeta_{ij}^r = \begin{cases} I_x, & r = 0 \\ \frac{L(x_i)}{(x_i - x_j)L(x_j)}, & \begin{cases} i \neq j; & i, j = 1, \dots, N_x \\ r = 1 \end{cases} \\ r \left[ \zeta_{ij}^{r-1} \zeta_{ii}^{r-1} - \frac{\zeta_{ij}^{r-1}}{x_i - x_j} \right], & \begin{cases} i \neq j; & i, j = 1, \dots, N_x \\ r = 2, 3, \dots, N_x - 1 \end{cases} \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^N \zeta_{ij}^r, & \begin{cases} i = j; & i, j = 1, \dots, N_x \\ r = 1, 2, \dots, N_x - 1 \end{cases} \end{cases} \quad (45)$$

در رابطه بالا  $I_x$  ماتریس همانی  $N_x \times N_x$  بوده و برای  $L(x_i)$  داریم:

2- Periodic Sinc Function  
3- Collocation Method

1- Weighting coefficient

$$\begin{bmatrix} K_{dd} & K_{db} \\ K_{bd} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_d \\ \bar{X}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 M_{dd} \bar{X}_d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

که در رابطه بالا زیرنویس‌های  $d$  و  $b$  به ترتیب بیانگر نقاط گرهی دامنه و مرز می‌باشد. می‌توان رابطه (60) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \bar{X}_b = (K_{bb})^{-1} K_{bd} \bar{X}_d \\ (K_{dd} - K_{db} (K_{bb})^{-1} K_{bd}) \bar{X}_d = \omega^2 M_{dd} \bar{X}_d \end{cases} \quad (61)$$

با حل دستگاه معادلات خطی ارائه شده در رابطه (61)، فرکانس‌های طبیعی سازه  $\omega$  بدست می‌آیند.

### 6- بحث و نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی برای بررسی ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از نانوکامپوزیت‌های مدرج تابعی که تحت بارگذاری حرارتی بوده و توسط بستر الاستیک احاطه شده است، ارائه می‌شود. بدین منظور در ابتدا خواص مکانیکی موثر نانوکامپوزیت بیان می‌گردد. ماده پلی‌متیل متاکریلیت<sup>2</sup> (PMMA) به عنوان ماده زمینه انتخاب می‌شود که خواص مکانیکی آن به صورت زیر می‌باشد [6]:

$$E^m = 2.5 \text{ GPa}, \quad \rho^m = 1150 \text{ kg/m}^3, \quad \nu^m = 0.34$$

همچنین نانولوله‌های کربنی تک لایه نوع Armchair (10,10) به عنوان تقویت کننده کامپوزیت لحاظ می‌شود که با در نظر گرفتن ضخامت موثر  $h = 0.067 \text{ nm}$ ، خواص آن به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [15]:

$$\begin{aligned} E_{11}^{cn} &= 5.6466 \text{ TPa}, & E_{22}^{cn} &= 7.0800 \text{ TPa}, \\ G_{12}^{cn} &= 1.9445 \text{ TPa}, & \nu_{12}^{cn} &= 0.175, \\ \rho^{cn} &= 1400 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

همان‌طور که پیش‌تر ذکر گردید، ضرایب پارامتر کارایی نانوکامپوزیت‌ها از طریق مطابقت نتایج حاصل از قانون ترکیب تعمیم یافته و روش دینامیک مولکولی محاسبه می‌گردد. در این‌جا ضرایب  $\eta_1$ ،  $\eta_2$  و  $\eta_3$  برای سه مقدار مختلف کسر حجمی نانولوله‌ها، به صورت زیر ارائه می‌شود [15]:

$$\begin{aligned} V_{cn}^* = 0.12: & \quad \eta_1 = 0.137, \eta_2 = 1.022, \eta_3 = 0.715 \\ V_{cn}^* = 0.17: & \quad \eta_1 = 0.142, \eta_2 = 1.626, \eta_3 = 1.138 \\ V_{cn}^* = 0.28: & \quad \eta_1 = 0.141, \eta_2 = 1.585, \eta_3 = 1.109 \end{aligned}$$

همچنین توزیع درجه حرارت در راستای ضخامت پوسته یکنواخت در نظر گرفته شده است. نتایج برحسب تئوری سنדרز ارائه شده است، مگر آن‌که ذکر شود از تئوری دانل استفاده شده است.

### 6-1- اعتبار سنجی نتایج

در این بخش نتایج حاصل از این پژوهش جهت اعتبارسنجی با نتایج موجود در سایر مقالات مقایسه می‌شود. بدین منظور در جدول 1، نتایج حاصل برای فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک با نتایج ارائه شده در مقاله شن و ژیانگ مقایسه شده است. شرایط مرزی مسئله در دو انتها تکیه‌گاه ساده بوده و پنج مود اول فرکانس طبیعی ارائه گردیده است. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، مطابقت قابل قبولی در نتایج وجود دارد.

سپس ده فرکانس طبیعی اول پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی، با نتایج ارائه شده توسط تورنابنه و همکارانش [28] در جدول 2 مقایسه گردیده است. شرایط مرزی پوسته در یک انتها تکیه‌گاه گیردار و در انتهای دیگر تکیه‌گاه آزاد بوده و مواد مدرج تابعی به صورت ترکیبی از فلز و سرامیک در نظر گرفته شده است که خواص آن در مرجع [28] ذکر گردیده است.

همچنین  $k$  در جدول 2 اندیس قانون توانی می‌باشد که برای چگونگی

$$\begin{cases} D_x^r = I_y \otimes \bar{D}_x^r \\ D_y^r = \bar{D}_y^r \otimes I_x \end{cases} \quad (r = 1, 2) \quad (52)$$

در رابطه بالا،  $I_y$  ماتریس همانی  $N_y \times N_y$  می‌باشد. همچنین  $\otimes$  بیانگر ضرب کرونگر<sup>1</sup> می‌باشد [6]. با توجه به رابطه (51) و (52)، معادلات حرکت که در روابط (33-37) بیان شده‌اند، به صورت روابط (53-57) ارائه می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \left( A_{11} D_x^2 + \frac{A_{66}}{R^2} D_y^2 \right) U + \left( \frac{A_{12} + A_{66}}{R} D_x^1 D_y^1 \right) V \\ & + \left( \frac{A_{12}}{R} D_x^1 \right) W + \left( B_{11} D_x^2 + \frac{B_{66}}{R^2} D_y^2 \right) \Phi_x \\ & + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R} D_x^1 D_y^1 \right) \Phi_y = (I_1 D^0 \ddot{U} + I_2 D^0 \ddot{\Phi}_x) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A_{12} + A_{66}}{R} D_x^1 D_y^1 \right) U + \left( A_{66} D_x^2 + \frac{A_{22}}{R^2} D_y^2 \right) \\ & - \frac{\delta_1 k_s A_{44}}{R^2} D^0 - \frac{\delta_1 N_y^0}{R} D^0 \left. \right) V \\ & + \left( \frac{A_{22} + \delta_1 k_s A_{44}}{R^2} D_y^1 + \frac{\delta_1 N_y^0}{R} D_y^1 \right) W \\ & + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R} D_x^1 D_y^1 \right) \Phi_x + \left( B_{66} D_x^2 + \frac{B_{22}}{R^2} D_y^2 \right) \\ & + \frac{\delta_1 k_s A_{44}}{R} D^0 \left. \right) \Phi_y = (I_1 D^0 \ddot{V} + I_2 D^0 \ddot{\Phi}_y) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{A_{12}}{R} D_x^1 \right) U - \left( \frac{A_{22} + \delta_1 k_s A_{44}}{R^2} D_y^1 + \frac{\delta_1 N_y^0}{R^2} D_y^1 \right) V \\ & \left( k_s A_{55} D_x^2 + \frac{k_s A_{44}}{R^2} D_y^2 - \frac{A_{22}}{R^2} D^0 + N_x^0 D_x^2 \right. \\ & \left. + \frac{N_y^0}{R^2} D_y^2 - k_w D^0 + k_g \left( D_x^2 + \frac{1}{R^2} D_y^2 \right) \right) W \\ & + \left( \frac{k_s A_{55} R - B_{12}}{R} D_x^1 \right) \Phi_x \\ & + \left( \frac{k_s A_{44} R - B_{22}}{R^2} D_y^1 \right) \Phi_y \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} & = I_1 D^0 \ddot{W} \\ & \left( B_{11} D_x^2 + \frac{B_{66}}{R^2} D_y^2 \right) U + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R} D_x^1 D_y^1 \right) V \\ & - \left( \frac{k_s A_{55} R - B_{12}}{R} D_x^1 \right) W + \left( D_{11} D_x^2 + \frac{D_{66}}{R^2} D_y^2 \right) \\ & - k_s A_{55} D^0 \left. \right) \Phi_x + \left( \frac{D_{12} + D_{66}}{R} D_x^1 D_y^1 \right) \Phi_y \\ & = (I_2 D^0 \ddot{U} + I_3 D^0 \ddot{\Phi}_x) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R} D_x^1 D_y^1 \right) U + \left( B_{66} D_x^2 + \frac{B_{22}}{R^2} D_y^2 \right) \\ & + \frac{\delta_1 k_s A_{44}}{R} D^0 \left. \right) V - \left( \frac{k_s A_{44} R - B_{22}}{R^2} D_y^1 \right) W \\ & + \left( \frac{D_{12} + D_{66}}{R} D_x^1 D_y^1 \right) \Phi_x + \left( D_{66} D_x^2 + \frac{D_{22}}{R^2} D_y^2 \right) \\ & - k_s A_{44} D^0 \left. \right) \Phi_y = (I_2 D^0 \ddot{V} + I_3 D^0 \ddot{\Phi}_y) \end{aligned} \quad (57)$$

می‌توان روابط (53-57) را به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$M \ddot{X} + KX = 0, \quad X^T = [U^T, V^T, W^T, \Phi_x^T, \Phi_y^T] \quad (58)$$

که در رابطه بالا  $M$  و  $K$  به ترتیب ماتریس سختی و اینرسی می‌باشند. با در نظر گرفتن حل هارمونیک نسبت به زمان برای مولفه‌های تغییر مکان، می‌توان بردار مقادیر گرهی مولفه‌های تغییر مکان را به صورت  $\bar{X} = X e^{i\omega t}$  بیان نمود و در نتیجه رابطه (58) به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$(K - \omega^2 M) \bar{X} = 0, \quad (59)$$

که در رابطه بالا  $\omega$  فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد. با گسسته‌سازی شرایط مرزی که در روابط (38-40) ارائه گردید و جای‌گذاری آن‌ها در ماتریس‌های سختی و اینرسی، رابطه (59) به صورت زیر بیان می‌گردد:

2- Weighting coefficient

1- Kronecker product

**جدول 1** مقایسه پنج فرکانس طبیعی اول  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  (Hz) برای پوسته استوانه ایروتروپیک ( $L = 410$  mm,  $R = 301.5$  mm,  $h = 1$  mm,  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>)

شماره مود	شن [15]	دیم [34]	نتایج حاضر
1	283/30	281/37	280/92
2	290/59	288/28	288/68
3	306/73	305/32	303/34
4	320/04	317/51	318/35
5	364/83	362/22	364/66

**جدول 2** مقایسه ده فرکانس طبیعی اول  $f = \omega/2\pi$  (Hz) برای پوسته استوانه ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی ( $L = 2$  m,  $R = 1$  m,  $h = 0.1$  m)

شماره مود	k=5		k=1		k=0	
	نتایج حاضر	تورنابنه [28]	نتایج حاضر	تورنابنه [28]	نتایج حاضر	تورنابنه [28]
1	148/27	148/75	148/80	149/29	152/88	152/98
2	148/27	148/75	148/80	149/29	152/88	152/98
3	218/75	219/49	211/48	212/22	219/94	220/06
4	218/75	219/49	211/48	212/22	219/94	220/06
5	242/77	243/43	248/58	249/31	253/79	253/78
6	242/77	243/43	248/58	249/31	253/79	253/78
7	382/45	383/71	368/21	369/46	383/36	383/55
8	382/45	383/71	368/21	369/46	383/36	383/55
9	401/81	402/56	412/08	412/97	420/86	420/51
10	422/27	423/57	417/11	418/46	431/32	431/45

ترکیب فلز و سرامیک در مواد مدرج تابعی استفاده شده است. همان طور که از جدول 2 مشاهده می‌شود تطابق خوبی میان نتایج وجود دارد.

در انتها نیز فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پایه برای پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانوکامپوزیت‌های مدرج تابعی با نتایج ارائه شده توسط شن، در جدول 3 مقایسه گردیده است که نتایج از مطابقت قابل قبولی برخوردار هستند. شرایط مرزی نیز به صورت تکیه‌گاه ساده در دو انتها می‌باشد.

## 2-6- بررسی همگرایی پاسخ

در این بخش تأثیر تعداد نقاط گرهی در راستای محوری و محیطی بر همگرایی نتایج مورد بررسی قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که در این بخش اثرات مربوط به بارگذاری حرارتی اولیه و بستر الاستیک لحاظ نشده است.

**جدول 3** مقایسه فرکانس طبیعی پایه بی‌بعد شده ( $\Omega = \omega(R^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m}$ ) برای پوسته استوانه ای ساخته شده از نانو کامپوزیت مدرج تابعی ( $h = 5$  mm,  $R/h = 10$ )

نوع مدرج تابعی	$L^2/Rh = 500$		$L^2/Rh = 100$		$V_{cr}^*$
	نتایج حاضر	شن [15]	نتایج حاضر	شن [15]	
UD	1/7231	1/7020	3/3704	3/3656	
FGA	1/6652	1/6614	3/2568	3/2019	0/12
FGX	1/7814	1/6977	3/6150	3/5674	
UD	2/2106	2/1901	4/2866	4/2870	
FGA	2/1477	2/1486	4/0412	4/1155	0/17
FGX	2/3121	2/1913	4/6106	4/5410	
UD	2/3548	2/3178	4/6766	4/6543	
FGA	2/3306	2/3228	4/4886	4/5410	0/28
FGX	2/5651	2/3675	5/2173	5/2014	

بدین منظور فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانوکامپوزیت‌ها به ازای مقادیر مختلف نقاط گرهی در راستای محیطی، در جدول 4 ارائه شده است. شرایط مرزی پوسته در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر آزاد در نظر گرفته شده است (CF).

توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت سازه به صورت یکنواخت فرض شده و نسبت‌های مختلف طول به شعاع و ضخامت به شعاع بررسی شده است. همچنین تعداد نقاط گرهی در راستای محوری  $N_x = 16$  در نظر گرفته شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، به ازای تعداد 8 نقطه گرهی در راستای محیطی، پاسخ‌ها تا چهار رقم اعشار همگرا می‌شوند.

علاوه بر این در جدول 5، فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای به ازای تعداد نقاط گرهی مختلف در راستای محوری ارائه گردیده است. شرایط مرزی و نوع توزیع نانولوله‌ها همانند جدول 4 می‌باشد و تعداد نقاط گرهی در راستای محیطی  $N_y = 10$  در نظر گرفته شده است. همان طور که مشاهده می‌گردد با افزایش نسبت طول به شعاع، تعداد نقاط گرهی مورد نیاز در راستای محوری برای رسیدن به همگرایی به گونه‌ای که نتایج تا چهار رقم اعشار یکسان گردند، افزایش می‌یابد. با توجه به نتایج ارائه شده در جدول 4 و 5، تعداد نقاط گرهی در راستای محوری و محیطی برای ارائه نتایج در ادامه مقاله به صورت  $N_x = 16$  و  $N_y = 10$  در نظر گرفته می‌شود.

جدول 4 بررسی همگرایی نتایج مربوط به فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانوکامپوزیت‌ها به ازای تعداد نقاط گرهی مختلف در راستای محیطی

$N_y$	$h/R = 0.1$			$h/R = 0.05$		
	$\frac{L}{R} = 8$	$\frac{L}{R} = 4$	$\frac{L}{R} = 2$	$\frac{L}{R} = 6$	$\frac{L}{R} = 4$	$\frac{L}{R} = 2$
4	0/7389	1/5678	3/2719	1/4567	3/0410	6/2109
6	0/7389	1/3532	2/6173	1/1772	2/1289	4/4092
8	0/7389	1/3532	2/6173	1/1772	2/1289	4/1235
10	0/7389	1/3532	2/6173	1/1772	2/1289	4/1235
10	0/7389	1/3532	2/6173	1/1772	2/1289	4/1235
14	0/7389	1/3532	2/6173	1/1772	2/1289	4/1235
16	0/7389	1/3532	2/6173	1/1772	2/1289	4/1235

جدول 5 بررسی همگرایی نتایج مربوط به فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌ها به ازای تعداد نقاط گرهی مختلف در راستای محوری

$N_x$	$h/R = 0.1$			$h/R = 0.05$		
	$\frac{L}{R} = 8$	$\frac{L}{R} = 4$	$\frac{L}{R} = 2$	$\frac{L}{R} = 6$	$\frac{L}{R} = 4$	$\frac{L}{R} = 2$
4	0/6994	1/2561	2/4214	1/1014	1/9439	3/7276
5	0/7608	1/3707	2/6173	1/2174	2/2092	4/1717
6	0/7260	1/3488	2/6193	1/1476	2/0893	4/1284
7	0/7448	1/3560	2/6181	1/1951	2/1443	4/1325
8	0/7376	1/3550	2/6177	1/1690	2/1336	4/1304
9	0/7392	1/3535	2/6171	1/1818	2/1287	4/1244
10	0/7390	1/3536	2/6172	1/1778	2/1324	4/1243
11	0/7386	1/3532	2/6172	1/1774	2/1285	4/1253
12	0/7392	1/3532	2/6172	1/1787	2/1296	4/1235
13	0/7388	1/3531	2/6172	1/1768	2/1289	4/1234
14	0/7390	1/3532	2/6172	1/1778	2/1290	4/1235
15	0/7389	1/3531	2/6172	1/1769	2/1289	4/1235
16	0/7389	1/3532	2/6172	1/1772	2/1289	4/1235
17	0/7389	1/3531	2/6172	1/1770	2/1289	4/1235
18	0/7389	1/3532	2/6172	1/1771	2/1289	4/1235
19	0/7389	1/3532	2/6172	1/1771	2/1289	4/1235
20	0/7389	1/3532	2/6172	1/1771	2/1289	4/1235



## 3-6- تاثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی

در این بخش اثر عوامل مختلف از جمله بستر الاستیک، بارگذاری حرارتی، چگونگی توزیع نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت سازه، شرایط مرزی و شرایط هندسی پوسته استوانه‌ای بر فرکانس طبیعی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی بعد پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های مدرج تابعی به ازای ضرایب مختلف بستر الاستیک و نسبت طول به شعاع، در جدول 6 ارائه شده است. توزیع نانو لوله کربنی در راستای ضخامت سازه به صورت یکنواخت (UD) و مدرج تابعی (FGA، FGO و FGX) در نظر گرفته شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، افزایش ضرایب بستر الاستیک و نسبت طول به شعاع به ترتیب باعث افزایش و کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد سازه می‌گردد. همچنین افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی در ترکیب نانوکامپوزیت موجب افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌گردد و بیشترین فرکانس طبیعی بی‌بعد نیز مربوط به توزیع نوع FGX می‌باشد. همچنین ضرایب بی‌بعد شده بستر الاستیک به صورت رابطه (62) ارائه می‌شوند:

$$k_w = \frac{K_w E^m h^3}{12R^2(1-\nu^2)} \quad (62)$$

$$k_g = \frac{K_g E^m h^3}{12R^4(1-\nu^2)}$$

**جدول 6** تاثیر ضرایب مختلف بستر الاستیک بر فرکانس طبیعی پایه بی بعد شده نانوکامپوزیت (نسبت طول به شعاع) ساخته شده از نانوکامپوزیت مدرج تابعی (نسبت طول به شعاع) به شعاع مختلف (SS) ( $R/h = 20, \Delta T = 0$ )

نوع مدرج تابعی	$V_{cn}^*$	$L/R$	$(k_w, k_g)$			
			(0.0)	(100.0)	(.10)	(100.10)
UD	0/12	2	8/327	7/732	7/811	7/1173
			8/259	7/658	7/738	7/1093
			7/862	7/228	7/312	6/627
			8/771	8/208	8/282	7/684
FGA	0/17	2	10/010	9/525	9/589	9/082
			9/975	9/488	9/552	9/042
			9/438	8/922	8/990	8/447
			10/611	10/155	10/215	9/741
FGO	0/28	2	10/862	10/428	10/484	10/034
			10/989	10/558	10/615	10/168
			10/113	9/645	9/707	9/218
			11/839	11/443	11/494	11/085
FGX	0/12	2	6/249	5/540	5/547	4/733
			6/233	5/520	5/527	4/708
			6/105	5/376	5/384	4/540
			6/411	5/721	5/728	9/944
UD	0/17	3	7/288	6/696	6/702	6/052
			7/301	6/709	6/715	6/066
			7/096	6/486	6/493	5/820
			7/542	6/972	6/977	6/356
FGA	0/28	2	7/651	7/102	7/108	6/513
			7/793	7/253	8/257	6/674
			7/392	6/823	6/829	6/208
			8/154	7/641	7/647	7/098

تاثیر شرایط مرزی و وجود بستر الاستیک بر فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای در جدول 7 مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که در نسبت طول به شعاع  $L/R = 2$ ، شرایط مرزی تاثیر بسزایی بر رفتار ارتعاشی سازه داشته، به گونه‌ای که با شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار در دو انتها (CC)، پوسته بیشترین پایداری را داشته و در نتیجه بیشترین فرکانس طبیعی بی‌بعد را دارا می‌باشد. همچنین شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار در یک انتها و تکیه‌گاه آزاد در انتهای دیگر (CF)، کمترین فرکانس طبیعی بی‌بعد را دارد. از طرفی مشاهده می‌گردد که وجود بستر الاستیک، تا اندازه‌ای تاثیر شرایط مرزی را کاهش می‌دهد. علاوه بر این ملاحظه می‌گردد که نوع توزیع نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت در تمامی حالات روند یکسانی داشته، به گونه‌ای که نوع FGX و FGA به ترتیب بیشترین و کمترین فرکانس طبیعی بی‌بعد را دارند.

در شکل 1 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد بر حسب نسبت طول به شعاع به ازای شرایط مرزی متفاوت رسم شده است. توزیع نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت سازه از نوع FGX بوده و فرض شده است که پوسته توسط بستر الاستیک احاطه شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود و از شکل نیز استنباط می‌گردد، با افزایش نسبت طول به شعاع، تاثیر شرایط مرزی کاهش می‌یابد، به گونه‌ای که در نسبت  $L/R = 8$ ، شرایط مرزی CC، CS و SS تقریباً نتایج مشابهی را گزارش می‌کنند.

**جدول 7** تاثیر شرایط مرزی و بستر الاستیک بر فرکانس طبیعی پایه بی بعد شده نانوکامپوزیت (نسبت طول به شعاع) ساخته شده از نانوکامپوزیت ( $R/h = 20, L/R = 2, \Delta T = 0$ )

شرایط مرزی	نوع مدرج تابعی	$V_{cn}^*$	$(k_w, k_g)$			
			CF	SS	CS	CC
UD	0/12	2	4/123	7/173	8/478	10/018
			3/927	7/093	7/951	9/130
			3/921	6/627	7/556	8/695
			4/314	7/684	9/214	10/950
FGA	0/17	2	5/258	9/082	10/656	12/535
			5/045	10/042	10/054	11/451
			4/996	8/447	9/542	10/902
			5/544	9/741	11/611	13/768
FGO	0/28	2	5/698	10/034	11/978	14/224
			5/565	10/167	11/435	13/176
			5/366	9/218	10/637	12/367
			6/228	11/085	13/321	15/810
FGX	0/12	2	5/474	8/327	9/483	10/883
			5/333	8/259	9/016	10/074
			5/343	7/862	8/670	9/682
			5/592	8/771	10/145	11/744
UD	0/17	3	6/491	10/010	11/464	13/230
			6/324	9/975	10/908	12/210
			6/329	9/438	10/443	11/697
			6/607	10/611	12/355	14/402
FGA	0/28	2	6/805	10/862	12/686	14/825
			6/781	10/989	12/177	13/827
			6/641	10/113	11/430	13/057
			7/189	11/839	13/960	16/351

**جدول 8** تاثیر بارگذاری حرارتی اولیه بر فرکانس طبیعی پایه بی بعد شده پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت مدرج تابعی  $(\Omega = \omega(R^2/h)\sqrt{\rho^m/Em})$  و به ازای ضرایب مختلف بستر الاستیک  $(R/h = 20, L/R = 3, SS)$

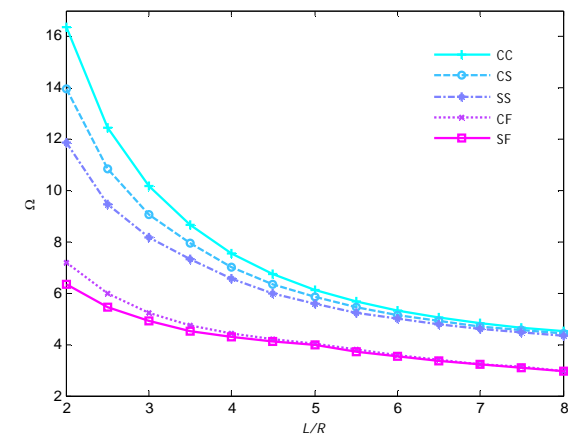
$(k_w, k_g)$	نوع مدرج		$V_{cn}^*$	$\Delta T (^{\circ}C)$
	(0, 0)	(100, 10)		
7/162	6/249	4/733	UD	0
7/152	6/232	4/708	FGA	
7/072	6/105	4/540	FGO	
7/272	6/411	4/944	FGX	
8/342	7/288	6/052	UD	
8/359	7/301	6/066	FGA	
8/175	7/096	5/820	FGO	
8/510	7/542	6/356	FGX	
6/628	5/547	3/807	UD	
6/621	5/532	3/783	FGA	
6/536	5/391	3/576	FGO	
6/752	8/735	4/077	FGX	
7/591	6/442	5/038	UD	150
7/606	6/459	5/056	FGA	
7/413	6/231	4/764	FGO	
7/841	6/735	5/407	FGX	
6/047	4/741	2/566	UD	
6/043	4/727	2/533	FGA	
5/952	4/567	2/227	FGO	
6/189	4/969	2/965	FGX	
6/756	5/466	3/758	UD	
6/775	5/485	3/779	FGA	
6/562	5/224	3/394	FGO	
7/042	5/816	4/250	FGX	

تفاوت نتایج حاصل از تئوری دائل و سندرز برای فرکانس طبیعی پایه بی بعد پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت مدرج تابعی به ازای نسبت‌های مختلف طول به شعاع و ضخامت به شعاع در جدول 9 ارائه شده است. مشاهده می‌گردد که برای نسبت  $L/R = 4$ ، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، تئوری سندرز مقادیری کمتری را گزارش کرده و اختلاف دو تئوری قابل ملاحظه می‌باشد. هنگامی که نسبت طول به شعاع کوچکتر می‌باشد  $(L/R = 2)$ ، اختلاف دو تئوری کمتر می‌باشد. نکته قابل توجه دیگر این است که به ازای انواع مختلف توزیع نانو لوله کربنی در راستای ضخامت، در توزیع نوع FGA، بیشترین اختلاف میان دو تئوری وجود دارد که به واسطه کوپلینگ میان خمش و کشش می‌باشد. حال آن‌که به واسطه تقارن در راستای ضخامت در سایر انواع (UD, FGO و FGX)، این کوپلینگ وجود ندارد.

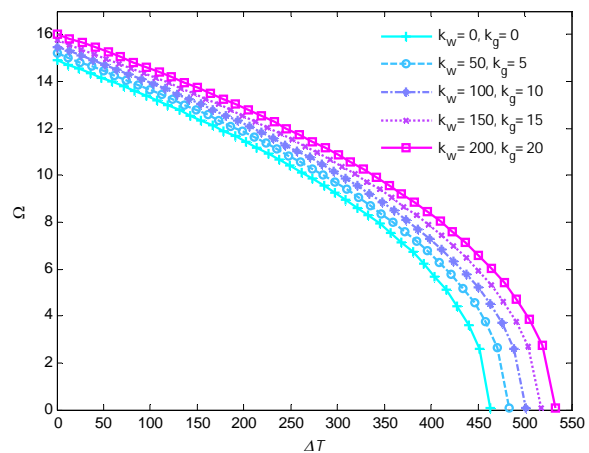
شکل 3 تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی بعد پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت مدرج تابعی برحسب بارگذاری حرارتی اولیه به ازای نسبت‌های مختلف طول به شعاع نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل استنباط می‌گردد، با افزایش بارگذاری حرارتی اولیه، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. اما نکته قابل توجه اینجاست که هرچه نسبت طول به شعاع کوچکتر باشد، تغییرات فرکانس بیشتر تحت تاثیر بارگذاری حرارتی اولیه قرار می‌گیرد و حتی در درجه حرارت‌های پایین نیز بارگذاری حرارتی اثر قابل توجهی بر فرکانس طبیعی دارد. همچنین با توجه به توضیحات ارائه شده در رابطه به

جدول 8، تاثیر بارگذاری حرارتی اولیه بر فرکانس طبیعی پایه بی بعد پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت مدرج تابعی را به ازای ضرایب مختلف بستر الاستیک بیان می‌دارد. شرایط مرزی پوسته در دو انتها به صورت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، با افزایش بارگذاری حرارتی اولیه، به دلیل وجود آمدن تنش‌های حرارتی اولیه، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد. همان‌طور که پیش‌تر نیز ذکر گردید، با افزایش ضریب بستر الاستیک، فرکانس طبیعی بی‌بعد نیز افزایش می‌یابد.

تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های مدرج تابعی برحسب بارگذاری حرارتی اولیه به ازای ضرایب مختلف بستر الاستیک در شکل 2 نشان داده شده است. شرایط مرزی پوسته در یک انتها تکیه‌گاه گیردار و در انتهای دیگر تکیه‌گاه گیردار می‌باشد. همان‌طور که ذکر گردید با افزایش بارگذاری حرارتی اولیه، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد، به گونه‌ای که در یک درجه حرارت خاص که همان دمای بحرانی کمانش سازه می‌باشد، فرکانس طبیعی صفر می‌گردد. با توجه به این مطلب مشاهده می‌گردد که با افزایش ضریب بستر الاستیک علاوه بر افزایش فرکانس طبیعی، دمای بحرانی کمانش سازه نیز افزایش می‌یابد.



شکل 1 تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی بعد شده پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت مدرج تابعی برحسب نسبت طول به شعاع به ازای شرایط مرزی مختلف  $(h/R = 0.05, (k_w, k_g) = (100, 10), V_{cn}^* = 0.28, FGX)$



شکل 2 تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی بعد شده پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت مدرج تابعی برحسب بارگذاری حرارتی اولیه به ازای ضرایب مختلف بستر الاستیک  $(h/R = 0.05, L/R = 2, V_{cn}^* = 0.28, CS, FGX)$

نتایج مربوط به تغییرات فرکانس طبیعی پایه پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانوکامپوزیت مدرج تابعی برحسب بارگذاری حرارتی اولیه به ازای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع براساس تئوری‌های دانل و سندرز در شکل 4 ارائه گردیده است. باید توجه داشت که  $\delta_1 = 0$  بیانگر تئوری دانل و  $\delta_1 = 1$  بیانگر تئوری سندرز می‌باشد. با توجه به شکل، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، اختلاف نتایج حاصل از دو تئوری بیشتر می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که در یک نسبت ضخامت به شعاع ثابت، تئوری سندرز که دقت بیشتری دارد، فرکانس طبیعی بی‌بعد و دمای بحرانی کم‌تر را پیش‌بینی می‌کند. علاوه بر این، در یک بارگذاری حرارتی اولیه یکسان، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، فرکانس طبیعی بی‌بعد سازه افزایش می‌یابد.

7- نتیجه گیری

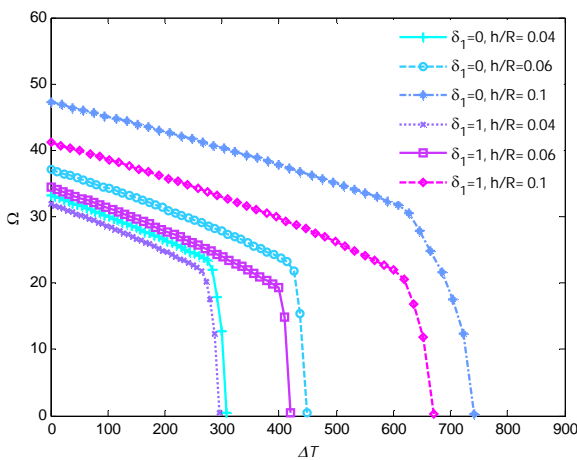
ارتعاشات آزاد پوسته‌های ساخته شده از کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی که توسط بستر الاستیک احاطه شده و تحت بارگذاری حرارتی اولیه قرار گرفته است، بررسی شده است. توزیع نانو لوله‌ها در راستای ضخامت پوسته به دو صورت یکنواخت (UD) و مدرج تابعی (FGO، FGA) در نظر گرفته شده است. تاثیر پارامترهای مختلف اعم از ضرایب بستر الاستیک، بارگذاری حرارتی اولیه، نوع توزیع نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت، شرایط مرزی مختلف و شرایط هندسی متفاوت بر رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای مطالعه گردید. انواع مختلف توزیع نانو لوله‌های کربنی به عنوان تقویت کننده در راستای ضخامت پوسته بر فرکانس طبیعی پوسته تاثیرگذار بوده، به گونه‌ای که نوع توزیع FGX همواره بیشترین فرکانس طبیعی را نتیجه می‌دهد. همچنین افزایش کسر حجمی نانولوله در ترکیب کامپوزیت باعث بالا رفتن فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. از طرفی وجود بستر الاستیک باعث پایداری بیشتر پوسته استوانه‌ای شده و با افزایش ضرایب بستر الاستیک، فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده گردید که شرایط مرزی در دو انتهای پوسته، تاثیر بسزایی در فرکانس طبیعی بی‌بعد داشته، اما با افزایش نسبت طول به شعاع استوانه، تاثیر شرایط مرزی کاهش می‌یابد. علاوه بر این، وجود بارگذاری حرارتی اولیه، بواسطه ایجاد تنش‌های حرارتی، موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی سازه می‌شود.

شکل 2، مشاهده می‌گردد که افزایش نسبت طول به ضخامت، تاثیر چندانی در دمای بحرانی کم‌تر ندارد. البته قابل ذکر است که این نتیجه مربوط به نسبت‌های  $L/R \geq 2$  می‌باشد.

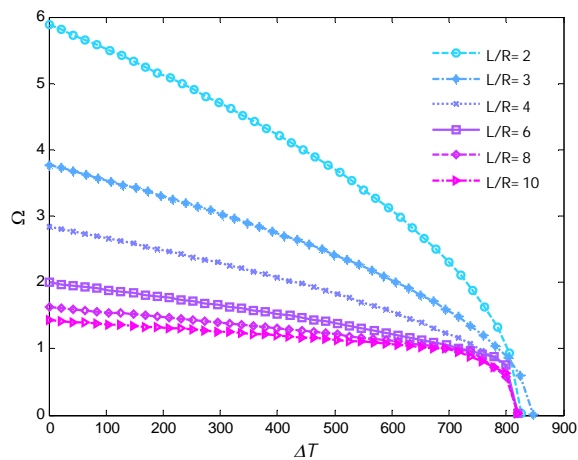
جدول 9 تفاوت نتایج حاصل از تئوری دانل و سندرز برای فرکانس طبیعی پایه بی بعد شده  $(\Omega = \omega(R^2/h)\sqrt{\rho^m/E^m})$  پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانوکامپوزیت مدرج تابعی به ازای نسبت‌های مختلف طول به شعاع و ضخامت به شعاع

$((k_w, k_g) = (0,0), \Delta T = 0, CF)$

خطا	$h/R = 0.1$		$h/R = 0.05$		نوع مدرج تابعی	$V_{cn}^*$	$L/R$
	تئوری دانل	تئوری سندرز	خطا	تئوری دانل			
3/9	2/617	2/720	4/2	4/123	4/299	UD	0/12
4/5	2/462	2/574	4/7	3/927	4/113	FGA	
4/2	2/463	2/568	4/4	3/921	4/096	FGO	
3/8	2/748	2/853	4/1	4/314	4/494	FGX	
4/1	3/329	3/464	3/4	5/258	5/487	UD	0/17
4/7	3/152	3/300	4/8	5/045	5/288	FGA	
4/2	3/143	3/276	4/4	4/996	5/220	FGO	
4/1	3/508	3/651	4/4	5/544	5/788	FGX	
3/7	3/633	3/768	4/1	5/698	5/930	UD	0/28
3/4	3/510	3/661	4/4	5/565	5/812	FGA	
3/6	3/435	3/559	3/9	5/366	5/579	FGO	
4/1	3/925	4/085	4/3	6/228	6/499	FGX	
13/6	1/353	1/537	5/8	2/129	2/252	UD	0/12
14/7	1/306	1/499	6/2	2/070	2/199	FGA	
13/8	1/307	1/488	5/7	2/085	2/205	FGO	
13/6	1/401	1/591	5/9	2/178	2/307	FGX	
13/9	1/729	1/969	5/9	2/721	2/882	UD	0/17
14/9	1/682	1/933	6/3	2/662	2/831	FGA	
13/8	1/667	1/898	5/7	2/671	2/823	FGO	
14/2	1/807	2/063	6/2	2/798	2/973	FGX	
13/2	1/862	2/107	5/6	2/928	3/092	UD	0/28
14/0	1/848	2/107	5/9	2/922	3/095	FGA	
12/4	1/782	2/004	4/9	2/890	3/033	FGO	
11/7	2/019	2/255	6/4	3/095	3/293	FGX	



شکل 4 تغییرات فرکانس طبیعی پایه پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانوکامپوزیت مدرج تابعی برحسب بارگذاری حرارتی اولیه به ازای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع برای تئوری‌های دانل و سندرز  $(L/R = 8, (k_w, k_g) = (0,0), V_{cn}^* = 0.28, SS, UD)$



شکل 3 تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی بعد شده پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانوکامپوزیت مدرج تابعی برحسب بارگذاری حرارتی اولیه به ازای نسبت‌های مختلف طول به شعاع  $(h/R = 0.05, (k_w, k_g) = (0,0), V_{cn}^* = 0.17, SS, FGO)$

- [16] H.S. Shen, Y. Xiang, Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, *Computer Methods in Applied Mechanics*, Vol. 213, pp. 196–205, 2012.
- [17] H.S. Shen, Y. Xiang, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells under combined axial and radial mechanical loads in thermal environment, *Composite Part B Engineering*, Vol. 52, pp. 311–322, 2013.
- [18] H.S. Shen, Torsional postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments. *Composite Structures*, Vol. 116, pp. 477–488, 2014.
- [19] R. Moradi-Dastjerdi, M. Foroutan, A. Pourasghar, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method, *Material Design*, Vol. 44, pp. 256–266, 2013.
- [20] S.M. Hosseini, Application of a hybrid mesh-free method based on generalized finite difference (GFD) method for natural frequency analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotubes. *CMES-Computer Modeling Engineering Science*, Vol. 95, pp. 1–29, 2013.
- [21] B.S. Aragh, A.H. Nasrollah Barati, H. Hedayati, Eshelby-Mori-Tanaka approach for vibrational behavior of continuously graded carbon nanotube-reinforced cylindrical panels, *Compos B Eng.*, Vol. 43, pp. 1943–1954, 2012.
- [22] J.E. Jam, A. Pourasghar, S. Kamarian, Effect of the aspect ratio and waviness of carbon nanotubes on the vibrational behavior of functionally graded nanocomposite cylindrical panels, *Polymer Composite*, Vol. 33, pp. 2036–2044, 2012.
- [23] M.H. Yas, A. Pourasghar, S. Kamarian, M. Heshmatian, Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded nanocomposite cylindrical panels reinforced by carbon nanotube, *Material Design*, Vol. 49, pp. 583–590, 2013.
- [24] S.J. Mehrabadi, B. Sobhani Aragh, Stress analysis of functionally graded open cylindrical shell reinforced by agglomerated carbon nanotubes, *Thin Wall Structures*, Vol. 80, pp. 130–141, 2014.
- [25] A. Alibeigloo, Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel embedded in piezoelectric layers by using theory of elasticity, *European Journal of Mechanics A/Solid*, Vol. 44, pp. 104–115, 2014.
- [26] H.S. Shen, Y. Xiang, Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *Composite Structures*, Vol. 111, pp. 291–300, 2014.
- [27] Z.X. Lei, K.M. Liew, J.L. Yu, Free Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Panels, *International Journal of Material Science*, Vol. 1, pp. 36–40, 2013.
- [28] F. Tornabene, E. Viola, D.J. Inman, 2-D differential quadrature solution for vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 328, pp. 259–290, 2009.
- [29] M.R. Eslami, R. Javaheri, Buckling of composite cylindrical shell under thermal and mechanical loading, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 22, pp. 527–545, 2010.
- [30] R.B. Hetnarski, M.R. Eslami, *Thermal stresses advanced theory and applications*, Berlin: Springer, 2009.
- [31] E. Bagherizadeh, Y. Kiani, M.R. Eslami, Thermal buckling of functionally graded material cylindrical shells on elastic foundation, *AIAA Journal*, Vol. 50, pp. 500–503, 2012.
- [32] C. Shu, *Differential Quadrature and its Application in Engineering*, London: Springer, 2000.
- [33] R. Ansari, V. Mohammadi, M. Faghieh Shojaei, R. Gholami, H. Rouhi, Nonlinear vibration analysis of Timoshenko nanobeams based on surface stress elasticity theory, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 45, pp. 143–152, 2014.
- [34] C.L. Dym, Some new results for the vibrations of circular cylinders, *Journal of sound and Vibration*, Vol. 29, pp. 189–205, 1973.

همچنین نتایج مربوط به تئوری‌های سندرز و دانل تحت شرایط هندسی مختلف با یکدیگر مقایسه گردید و استنباط گردید که در نسبت ضخامت به شعاع پایین، با افزایش نسبت طول به شعاع، اختلاف دو تئوری افزایش می‌یابد. حال آن‌که در نسبت‌های بالاتر ضخامت به شعاع، اختلاف دو تئوری در نسبت‌های طول به شعاع پایین‌تر بیشتر بوده و با افزایش این نسبت، نتایج حاصل از دو تئوری به یکدیگر نزدیک می‌گردد.

## 8- مراجع

- [1] H.S. Shen, Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 9–19, 2009.
- [2] L.L. Ke, J. Yang, S. Kitipornchai, Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams, *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 676–683, 2010.
- [3] L.L. Ke, J. Yang, S. Kitipornchai, Dynamic stability of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 20, pp. 28–37, 2013.
- [4] M.H. Yas, N. Samadi, Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 98, pp. 119–128, 2012.
- [5] H.S. Shen, Y. Xiang, Nonlinear analysis of nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations in thermal environments, *Engineering Structures*, Vol. 56, pp. 698–708, 2013.
- [6] R. Ansari, M. Faghieh Shojaei, V. Mohammadi, R. Gholami, F. Sadeghi, Nonlinear forced vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams, *Composite Structures*, Vol. 113, pp. 316–327, 2014.
- [7] H.S. Shen, C.L. Zhang, Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates, *Material Design*, Vol. 31, pp. 3403–3411, 2010.
- [8] H.S. Shen, Z.H. Zhu, Buckling and postbuckling behavior of functionally graded nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, *CMC-Computer Material and Continua*, Vol. 18, pp. 155–182, 2010.
- [9] Z.X. Wang, H.S. Shen, Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Materials and Science*, Vol. 50, pp. 2319–2330, 2011.
- [10] Z.X. Wang, H.S. Shen, Nonlinear dynamic response of nanotube-reinforced composite plates resting on elastic foundations in thermal environments, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 70, pp. 735–754, 2012.
- [11] S.J. Mehrabadi, A.B. Sobhani, V. Khoshkharesh, A. Taherpour, Mechanical buckling of nanocomposite rectangular plate reinforced by aligned and straight single-walled carbon nanotubes, *Composite Part B-Engineering*, Vol. 43, pp. 2031–2040, 2012.
- [12] Z.X. Lei, K.M. Liew, J.L. Yu, Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment, *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 128–138, 2013.
- [13] Z.X. Lei, K.M. Liew, J.L. Yu, Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method, *Composite Structures*, Vol. 98, pp. 160–168, 2013.
- [14] Z.X. Lei, K.M. Liew, J.L. Yu, Large deflection analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates by the element-free kp-Ritz method, *Computer Methods in Applied Mechanics*, Vol. 256, pp. 189–199, 2013.
- [15] H.S. Shen, Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells. *Composite Part B Engineering*, Vol. 43, pp. 1030–1038, 2012.