



## رشد ترک خستگی در اجسام تحت تماس غلتشی در اثر چندین بار متحرک

امیررضا شاهانی<sup>1\*</sup>، رضا دواچی<sup>2</sup>

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
 2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
 \* تهران، صندوق پستی 19395-1999. shahani@kntu.ac.ir

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: 19 شهریور 1393  
 پذیرش: 06 آذر 1393  
 ارائه در سایت: 04 بهمن 1393

کلید واژگان:

تماس غلتشی

عمر باقیمانده

مکانیک شکست خطی

روش گام به گام

معادلات انتگرالی منفرد

## چکیده

یاتاقان‌های غلتشی یکی از اجزای مهم در ماشین‌آلات دوار هستند که تحت اثر خستگی تماس غلتشی قرار دارند لذا جهت تخمین بهتر عمر باقیمانده‌ی این اجزا مدلی با در نظر گرفتن چندین بار متحرک بر مبنای مکانیک شکست خطی ارائه شده است. در نظر گرفتن اثر چند بار متحرک در این مدل نکته‌ی مهمی است که در مراجع در نظر گرفته نشده است. سطح در تماس با یک نیم صفحه‌ی بی‌نهایت دارای یک ترک لبه‌ای مدل گردیده است. تماس سیکلی غلتشی نیز با حرکت یک توزیع بار بر روی مرز نیم صفحه بی‌نهایت شبیه‌سازی شده است. محاسبات مسیر ترک و ضرایب شدت تنش به کمک روش گام به گام بر مبنای معادلات انتگرالی منفرد انجام گردیده است. اثر ضریب اصطکاک و در نظر گرفتن دو بار متمرکز متحرک بر روی مسیر رشد ترک برای زوایای مختلف ترک اولیه نسبت به مرز نیم صفحه و عمر باقیمانده‌ی سطح تحت خستگی تماس غلتشی برای فولاد 75XГCT مورد بررسی قرار گرفته و نتایج حاصل از این تحلیل با نتایج مدل قبلی مورد مقایسه قرار گرفته است. با توجه به نتایج به دست آمده برای عمر باقیمانده مشخص است که با افزایش تعداد بارهای تماسی متحرک بر روی سطح تماس مقدار عمر باقیمانده کاهش پیدا کرده و به حالت واقعی نزدیک‌تر می‌گردد، همچنین با افزایش ضریب اصطکاک عمر باقیمانده کاهش می‌یابد.

## Fatigue crack growth in bodies under rolling contact with multiple moving loads

Amir RezaShahani\*, Reza Davachi

Department of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran  
 \* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran. shahani@kntu.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 10 September 2014  
 Accepted 27 November 2014  
 Available Online 24 January 2015

## Keywords:

Rolling Contact  
 Remaining Life  
 Linear Fracture Mechanics  
 Step-by-Step Process  
 Singular Integral Equations

## ABSTRACT

Rolling bearings is one of the important elements in rotating machinery that are under rolling contact fatigue, so for better estimation of remaining life of these elements a model which is considered multiple moving loads based on the linear fracture mechanics has been proposed. Considering the effect of the multiple moving loads is a key element of this model that is not considered in literature. The contact surface is modeled by a half-plane with an edge crack. Rolling contact is simulated by moving a load distribution on the boundary of a half-plane. The calculation of the crack path and stress intensity factors is carried out by the step-by-step process on the basis of the singular integral equations method. The effect of the friction coefficient and considering two concentrated moving load on the crack growth path for different angles between the initial crack and boundary of the half-plane and remaining life of a surface under the fatigue rolling contact for 75XГCT steel is analyzed. The results of this analysis are compared with results from a previous model. According to the results of the remaining life obtained by increasing the numbers of moving loads on the contact surface, the remaining life decrease and become closer to the real state. Furthermore, the remaining life decreases with increasing friction coefficient.

## 1- مقدمه

تماس غلتشی باعث ایجاد ترک در اجسام تحت تماس می‌گردد به همین دلیل بررسی رشد ترک در اجسام تحت تماس غلتشی از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. برای اولین بار در سال 1935 وی به صورت آزمایشگاهی به بررسی ترک‌های ناشی از خستگی تماس غلتشی پرداخته است [1]. او مشاهده کرد که رشد این ترک‌ها دارای دو مرحله می‌باشد. در مرحله اول ترک تحت مود برشی و به صورت خطی تحت زاویه 10 تا 30 درجه نسبت به سطح غلتشی رشد می‌کنند. در مرحله‌ی دوم ترک تحت مود بازشوندگی و به صورت منحنی

چرخ‌دنده‌ها، یاتاقان‌ها و چرخ‌های ریل راه‌آهن مثال‌هایی از اجسام دوار هستند که تحت بارگذاری تماسی قرار دارند. این اجسام به طور گسترده در ماشین‌های دوار مورد استفاده قرار می‌گیرند و از حساس‌ترین عضوهای این ماشین‌آلات می‌باشند. اگر در این اجسام از دیگر حالت‌های خرابی<sup>1</sup> جلوگیری شود، نهایتاً خستگی تماس غلتشی<sup>2</sup> باعث خرابی آن‌ها می‌گردد. خستگی

1- Failure Modes  
 2- Rolling Contact Fatigue

رشد ترک به گام به گام جهت ایجاد مسیر رشد ترک [10,9] بر مبنای روش معادلات انتگرالی منفرد مورد استفاده قرار گرفته است. جسم تحت تماس غلتشی نیز با یک نیم صفحه بی‌نهایت دارای یک ترک لبه‌ای مدل گردیده است. تماس سیکیلی غلتشی نیز با حرکت یک توزیع بار معادل با تماس (بار متمرکز، توزیع بیضوی و...) بر روی مرز نیم صفحه بی‌نهایت مدل‌سازی شده است. با در نظر گرفتن دو گام مستقل (یکی برای حرکت توزیع بار بر روی مرز نیم صفحه بی‌نهایت و دیگری برای رشد ترک) در حل مسئله امکان در نظر گرفتن توزیع تنش مربوط به رشد ترک و حرکت ناحیه تماس فراهم شده است.

نتایج عددی حاصل از تحلیل برای زمانی که جسم تحت یک بار متمرکز و دو بار متمرکز متحرک قرار دارد استخراج گردیده است. معیار ماکزیمم تنش مماسی  $\sigma_{\theta\theta}$  به عنوان معیار شکست محلی انتخاب و نرخ رشد ترک بر اساس رابطی پاریس محاسبه گردیده است. مسیر رشد ترک برای زوایای مختلف ترک اولیه نسبت به مرز نیم صفحه بدست آمده و عمر باقیمانده‌ی سطح تحت خستگی تماس غلتشی برای فولاد 75XFGT محاسبه گردیده است. نتایج به‌دست آمده حاصل از این تحلیل با نتایج داتسیشین و همکارانش [5] مورد مقایسه قرار گرفته است.

## 2- مدل محاسبی عمر باقیمانده‌ی سطح تحت خستگی تماس غلتشی

در یاتاقان‌های غلتشی با آگاهی از میزان باری که به یاتاقان وارد می‌گردد، می‌توان نحوه‌ی توزیع بار خارجی وارد بر یاتاقان را در میان عضوهای غلتشی محاسبه نمود. برای این منظور، لازم است تا رابطه‌ی بین بار و جابجایی برای المان‌های غلتشی استخراج گردد. در یاتاقان‌های غلتشی، معمولاً رینگ داخلی یا خارجی (گاهی اوقات هر دو رینگ) دارای چرخش پایدار می‌باشند. در اکثر مواقع، شرایط کاری یاتاقان‌های غلتشی به گونه‌ای می‌باشد که این سرعت چرخش به اندازه‌ی بزرگ نیست تا بر روی توزیع بار خارجی بر روی المان‌های غلتشی تأثیر بگذارد. همچنین، نیروهای اصطکاکی و ممان‌هایی که بر روی المان‌های غلتشی عمل می‌کنند نیز در بیشتر کاربردها، بر روی توزیع بار بین المان‌های غلتشی تأثیر قابل توجهی نمی‌گذارند. در نتیجه در بیشتر موارد می‌توان توزیع بار داخلی یاتاقان‌های غلتشی را به صورت استاتیکی و با استفاده از روابط بار-جابجایی محاسبه نمود.

در حالت کلی رابطه‌ی بین جابجایی یا تغییر شکل ناحیه تماس و نیروی عمودی بین رینگ یاتاقان و المان‌های غلتشی به‌صورت رابطه (1) بیان می‌گردد [6]:

$$Q = K\delta^n \quad (1)$$

که در آن  $Q$  نیروی عمودی بین رینگ یاتاقان و المان‌های غلتشی،  $\delta$  جابجایی یا تغییر شکل ناحیه تماس و  $n$  برای بلبرینگ‌ها برابر  $3/2$  و برای رولبرینگ‌ها برابر  $10/9$  می‌باشند. موقعیت المان غلتشی قبل از بارگذاری در شکل 1 نشان داده شده است.

برای یک یاتاقان غلتشی با پایه نگه‌دارنده‌ی صلب که تحت بار شعاعی قرار گرفته است، میزان جابجایی شعاعی در هر موقعیت زاویه‌ای المان غلتشی به صورت رابطه (2) می‌باشد [6]:

$$\delta_\psi = \delta_r \cos \psi - \frac{1}{2} P_d \quad (2)$$

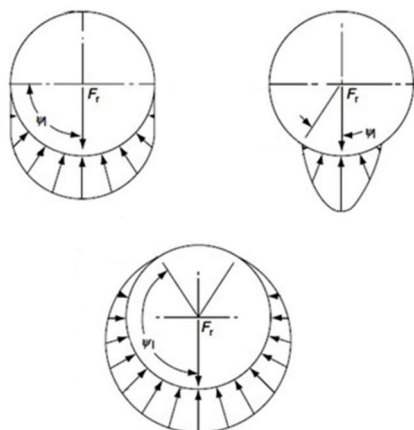
در این رابطه  $\psi$  موقعیت زاویه‌ای المان غلتشی بوده که در شکل 2 مشخص گردیده است.  $\delta_r$  میزان جابجایی شعاعی رینگ است که در زاویه  $\psi$  رخ

شکل رشد می‌کند. از آن زمان به بعد تحقیقات تئوری و آزمایشگاهی بسیاری در مورد جوانه‌زنی و رشد ترک در اجسام تحت خستگی تماس غلتشی صورت گرفته است. در تحقیقات تئوری، توجه اصلی معطوف به تحلیل عددی ضرایب شدت تنش بوده و کمتر به تعیین عمر باقیمانده اجسام تحت تماس غلتشی پرداخته شده است. برینانت و همکارانش در سال 1982 اولین مدل قطعی-پژوهشی را جهت تخمین عمر اجسام تحت بارگذاری تماسی غلتشی دارای ترک سطحی ارائه نموده‌اند [2]. در این مدل از نتایج تجربی وی استفاده گردیده است. آن‌ها رشد ترک در مرحله‌ی اول را مدل‌سازی نموده و فرض کرده‌اند که ترک تحت مود برشی و به صورت خط رشد می‌نماید. در این مدل مسئله تماس غلتشی به صورت دو بعدی مدل شده و از معادلات انتگرالی منفرد و توابع توزیع نابجایی جهت تخمین عمر استفاده گردیده است. مدل ارائه شده توسط برینانت و همکارانش پایه و اساس مدل‌های قطعی-پژوهشی دیگر به منظور تخمین عمر اجسام تحت تماس غلتشی قرار گرفته است. آن‌ها همچنین در [3] به ارائه‌ی مدلی دیگر در این زمینه پرداخته و در [4] به بررسی مسئله‌ی تماس خطی در تماس یک گوه با یک جسم الاستیک پرداخته‌اند.

معادلات انتگرالی منفرد اغلب جهت بیان حالت تنش در اجسام الاستیک حاوی ترک مورد استفاده قرار می‌گیرند. همان‌طور که بیان گردید در تحقیقات تئوری توجه اصلی معطوف به تحلیل عددی ضرایب شدت تنش در اجسام دوار جهت تخمین عمر می‌باشد. جهت بررسی این پارامترها استفاده از مدل‌ها و روش‌های مختلفی مرسوم است. در این مدل‌ها اثر تماس بر روی اجسام در گردش به وسیله‌ی نیروهای تماسی هرتزی همراه با مؤلفه‌های مماسی در نظر گرفته می‌شوند. جسم تحت تماس نیز با یک نیم صفحه حاوی ترک لبه‌ای مدل می‌گردد.

داتسیشینو همکارانش [5] مدلی را جهت تخمین عمر باقیمانده‌ی اجسام تحت خستگی تماس غلتشی ارائه کرده‌اند. در این مدل جسم تحت تماس به صورت یک نیم صفحه حاوی ترک لبه‌ای مدل شده و بارگذاری تماسی به صورت یک بار متحرک بر روی مرز نیم صفحه در نظر گرفته شده است. در این مدل از معادلات انتگرالی منفرد جهت مدل‌سازی مسئله و تخمین عمر خستگی استفاده شده است. یاتاقان‌های غلتشی از مهم‌ترین اجزای به کار رفته در ماشین‌آلات دوار می‌باشند، به همین دلیل تعیین عمر باقیمانده‌ی این اجزا از موضوعات مهم در مباحث مربوط به ماشین‌آلات دوار می‌باشد. هریس [6] توضیحات گسترده‌ای را در مورد نحوه بارگذاری در اجزای دوار در تماس در یاتاقان‌های غلتشی آورده است. در هنگام بارگذاری یک یاتاقان غلتشی، بیش از یک المان غلتشی تحت بار قرار خواهد گرفت؛ بنابراین جهت تخمین دقیق‌تر عمر یاتاقان و مدل‌سازی ریاضی واقعی‌تر مسئله، لازم است همه‌ی المان‌های غلتشی تحت بار در مدل ریاضی مسئله لحاظ گردند. تا به حال در مراجع مدلی جهت تخمین عمر باقیمانده‌ی اجزای دوار در تماس با در نظر گرفتن چندین بار متحرک تماسی ارائه نشده است.

با توجه به توضیحات داده شده در مورد نحوه بارگذاری در اجزای دوار در تماس در یاتاقان‌های غلتشی در این مقاله مدلی مشابه مدل داتسیشینو و همکارانش جهت بررسی اثر در نظر گرفتن چندین بار متحرک بر روی مسیر رشد ترک و عمر باقیمانده‌ی اجسام تحت خستگی تماس غلتشی ارائه گردیده است. این مدل، مدلی دو بعدی جهت تخمین عمر باقیمانده این اجسام می‌باشد. نکته مهم در این مدل نحوه ایجاد مسیر رشد ترک در جسم حاوی ترک است. در این مدل دیدگاه مکانیک شکست در بارگذاری سیکیلی [8,7] و

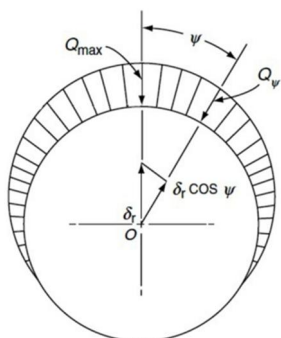


شکل 3 توزیع بار شعاعی برای εهای مختلف [6]

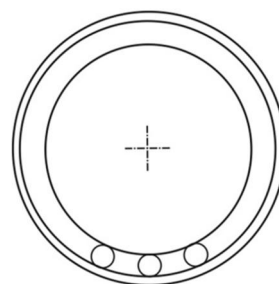
المان‌های غلتشی را محاسبه نمود. جزئیات بیشتر در این زمینه در مرجع [6] موجود می‌باشد. در شکل 4 توزیع بار بین المان‌های غلتشی برای یک یاتاقان تحت بارگذاری ترکیبی نشان داده شده است.

با توجه به توضیحات ارائه شده درباره‌ی نحوه‌ی توزیع بار بین المان‌های غلتشی مشاهده می‌گردد که در یک یاتاقان غلتشی، بیش از یک المان غلتشی تحت بار قرار خواهد گرفت؛ بنابراین جهت تخمین دقیق‌تر عمر یاتاقان و مدل‌سازی ریاضی واقعی‌تر مسئله، لازم است همه‌ی المان‌های غلتشی تحت بار در مدل ریاضی مسئله لحاظ گردند. به همین منظور، هر یک از این المان‌های غلتشی با یک بارگذاری تماسی (تماس هر تزی) بر روی رینگ مدل‌سازی شده‌اند. در نتیجه در مدل ارائه شده، دو بارگذاری تماسی متحرک بر روی مرز نیم صفحه در نظر گرفته شده است که جهت تخمین دقیق‌تر عمر می‌توان تعداد بارگذاری بیشتری نیز در نظر گرفت.

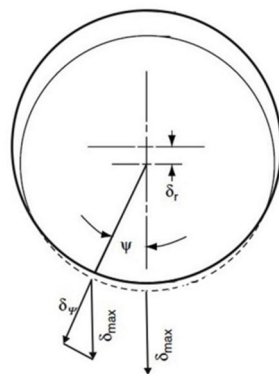
در مدل ارائه شده روابط ضرایب شدت تنش بر مبنای مکانیک شکست الاستیک خطی استخراج و مسئله با استفاده از معادلات انتگرالی منفرد حل شده است. با فرض ایجاد کندگی ناشی از ترک‌های سطحی به عنوان مود اصلی و اماندگی و با توجه به این که ابعاد ترک و ناحیه تماس در مقایسه با شعاع انحنای سطح جسم تحت تماس سیکیلی غلتشی کوچک می‌باشد، جسم تحت تماس غلتشی با یک نیم‌صفحه‌ی بی‌نهایت دارای یک ترک لبه‌ای مدل گردیده است. تماس سیکیلی غلتشی نیز با در نظر گرفتن یک توزیع بار متحرک معادل با تماس (بار متمرکز، توزیع بیضوی و...) بر روی مرز نیم صفحه بی‌نهایت مدل‌سازی شده است. در این مدل با فرض دو گام مستقل (یکی جهت حرکت توزیع بار بر روی مرز نیم صفحه بی‌نهایت و دیگری برای رشد ترک) در حل مسئله امکان در نظر گرفتن توزیع تنش مربوط به رشد ترک و حرکت ناحیه تماس فراهم شده است. مدل فیزیکی ساده‌سازی شده‌ی



شکل 4 توزیع بار بین المان‌های غلتشی برای یک یاتاقان تحت بارگذاری ترکیبی [6]



شکل 1 رینگ یاتاقان قبل از بارگذاری [6]



شکل 2 تغییر شکل رینگ یاتاقان بعد از بارگذاری [6]

می‌دهد. همچنین، مقدار لقی یاتاقان می‌باشد.

معادله‌ی (2) را می‌توان بر اساس بیش‌ترین مقدار جابجایی بیان نمود [6]:

$$\delta_{\psi} = \delta_{\max} \left[ 1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right] \quad (3)$$

که در آن:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{P_d}{2\delta_r} \right) \quad (4)$$

با استفاده از رابطه‌ی (2) می‌توان محدوده‌ی زاویه‌ای که ناحیه‌ی بار در آن قرار دارد را تعیین نمود [6]:

$$\psi_l = \cos \left( \frac{P_d}{2\delta_r} \right)^{-1} \quad (5)$$

همچنین از رابطه‌ی (1) مقدار بار در هر زاویه بر اساس بیش‌ترین تغییر مکان، تغییر مکان شعاعی در هر زاویه و ماکزیمم بار وارده به غلتنده به صورت رابطه (6) قابل محاسبه می‌باشد [6]:

$$\frac{Q_{\psi}}{Q_{\max}} = \left( \frac{\delta_{\psi}}{\delta_{\max}} \right)^n \quad (6)$$

در نهایت می‌توان با ترکیب معادلات (2) و (6) توزیع بار بر روی المان‌های غلتشی را به صورت رابطه (7) تعیین نمود [6]:

$$Q_{\psi} = Q_{\max} \left[ 1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \quad (7)$$

پارامتر  $Q_{\max}$  با استفاده از مقدار بار شعاعی خارجی و با در نظر گرفتن شرایط تعادل استاتیکی محاسبه می‌گردد [6]:

$$F_r = Z Q_{\max} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_l}^{+\psi_l} \left[ 1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \cos \psi \, d\psi \quad (8)$$

توزیع بار شعاعی خارجی در شکل 3 برای چندین ε مختلف نشان داده شده است.

در حالی که یاتاقان غلتشی تحت ترکیبی از بارگذاری شعاعی و محوری قرار داشته باشد نیز به شیوه‌ای مشابه می‌توان نحوه‌ی توزیع بار بین

$$K_{\max} = \max(|K_{\max}|, |K_{\min}|) = |F[K_I(\lambda^*), K_{II}(\lambda^*), \theta^*(\lambda^*)]| \quad (14)$$

که در آن:

$$\lambda^* = \begin{cases} \lambda' \text{ if } |K_{\max}| > |K_{\min}| \\ \lambda'' \text{ if } |K_{\max}| < |K_{\min}| \end{cases} \quad (15)$$

با برقراری شرط زیر فرض می‌شود که ترک در هر سیکل در جهت زاویه  $\theta^*$  (در رابطه‌ی 11) که متناظر با  $\lambda = \lambda^*$  می‌باشد، رشد می‌کند:

$$\Delta K > \Delta K_{th} \quad (16)$$

که در آن  $\Delta K_{th}$  بازه‌ی آستانه‌ای تابع  $F[K_I, K_{II}, \theta^*]$  است، که یک مشخصه از مقاومت رشد ترک سیکلی ماده می‌باشد.

مسیر ترک به صورت گام به گام ایجاد می‌گردد. در مرحله‌ی اول، مسأله‌ی تئوری الاستیسیته یک نیم صفحه با ترک لبه‌ای اولیه‌ای (در حالت کلی به صورت منحنی شکل) که بر روی کانتور  $L_1$  قرار گرفته است و تحت تأثیر نیروهای داده شده در رابطه‌ی 9 قرار دارد، به ازای مقادیر مختلف  $\lambda$  حل می‌گردد. از حل این مسأله ضرایب شدت تنش مود اول و دوم استخراج می‌گردد. سپس با استفاده از روابط 11، 14 و 15 می‌توان مقدار پارامتر  $\lambda = \lambda^*$  (محل قرار گرفتن مرکز ناحیه تماس)، زاویه رشد ترک متناظر با آن  $\theta^*$  و در نهایت مقدار  $K_{\max}^*$  را محاسبه نمود. با محاسبه‌ی پارامترهای ذکر شده مقدار  $\Delta K$  نیز به دست می‌آید. با فرض برقراری شرایط 16 ترک برای مدت  $N_1$  سیکل به اندازه گام  $\Delta l_1$  در مسیری با زاویه‌ی  $\theta^*_1$  رشد می‌کند. فرض می‌شود که در هر مرحله از رشد ترک مقادیر  $\theta^*_1, \Delta K_1$  و  $\lambda^*_1$  ثابت باقی می‌مانند. مسیر ترک در هر مرحله  $(\Delta l_1)$ ، با یک تابع چند جمله‌ای درجه سه تقریب زده می‌شود. در هر مرحله برای کانتور جدیدی که ترک بر روی آن قرار می‌گیرد یعنی ایجاد قسمت جدید مسیر ترک مراحل قبل تکرار می‌گردد، به این ترتیب مسیر رشد ترک به صورت یک منحنی هموار به دست می‌آید.

عمر کل اجسام تحت بارگذاری سیکلی از دو بخش مختلف تشکیل شده که در رابطه‌ی (17) نشان داده شده است [7]:

$$N = N_0 + N_c = N_0 + \int_{l_1}^{l_c} \frac{dl}{v(\Delta K(l))} \quad (17)$$

در این رابطه  $N_0$  تعداد سیکل‌های بارگذاری لازم برای جوانه‌زنی ترک ماکروی  $l_1$  اولیه‌ای به طول  $l_1$  و  $N_c$  تعداد سیکل‌های بارگذاری لازم جهت رشد ترک اولیه‌ای با طول  $l_1$  تا طول بحرانی  $l_c$  می‌باشند. در واقع می‌توان  $N_c$  را عمر باقیمانده جسمی با ترک اولیه‌ای به طول  $l_1$  در نظر گرفت که در آن ترک تا طول بحرانی  $l_c$  رشد می‌کند. تابع  $v(\Delta K(l))$  در رابطه‌ی (17) بیانگر رابطه‌ی بین نرخ رشد ترک و بازه تغییرات پارامتر  $K$  می‌باشد. این تابع با استفاده از رابطه‌ی پاریس به صورت رابطه (18) بیان می‌گردد:

$$v = C(\Delta K)^n \quad (18)$$

در این رابطه  $C$  و  $n$  وابسته به خواص ماده بوده و به صورت تجربی تعیین می‌گردند. باید توجه داشت که این رابطه برای مود بازشوندگی ترک و میدان تنش سیکلی متقارن تک‌محوره استخراج گردیده است. بسیاری از محققین با تعریف یک ضریب شدت تنش معادل، از این رابطه برای میدان تنش پیچیده<sup>2</sup> و مود ترکیبی رشد ترک استفاده نموده‌اند. در این مدل نیز از همین روش استفاده شده است و در واقع پارامتر  $K$  ضریب شدت تنش معادل در رابطه‌ی پاریس می‌باشد.

مسئله همراه با دو بار متحرک معادل تماسی در شکل 5 نشان داده شده است. در این مسئله در صورت در نظر گرفتن دو بار متحرک بر روی مرز نیم صفحه توزیع نیروهای تماسی به صورت رابطه‌ی (9) بیان می‌گردند:

$$N(x) + iT(x) = -(1 + if)p_1(x) - (1 + if)p_2(x) = -p_{01}(1 + if)s_1(x, x_0) - p_{02}(1 + if)s_2(x, x_0 + x_1) \quad |x - x_0| < c \quad (9)$$

که در آن  $N(x)$  نیروی عمودی و  $T(x)$  نیروی مماسی می‌باشند، که دو مؤلفه‌ی نرمال و مماسی نیروهای تماسی با استفاده از قانون کولمب و به وسیله‌ی ضریب اصطکاک  $f$  به یکدیگر مرتبط گردیده‌اند. در این مدل نیروهای اصطکاک ناشی از لغزش سطوح در مؤلفه‌ی مماسی نیروی تماسی در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به شکل 5 مختصه‌ی افقی مرکز ناحیه‌ی تماس،  $2c$  عرض ناحیه تماس،  $s_1(x, x_0)$  و  $s_2(x, x_0 + x_1)$  فاصله‌ی بین مراکز ناحیه تماس دو بار متحرک  $p_{01}$  و  $p_{02}$  ماکزیمم فشار بر روی ناحیه تماس می‌باشند.

در حالت غلتش دو جسم بر روی یکدیگر، بارگذاری به صورت سیکلی می‌باشد. شکست محلی به صورت شبه استاتیکی فرض شده است. در حالت میدان تنش مختلط پارامتر  $K$  که معرف مکانیزم شکست محلی می‌باشد در نظر گرفته شده است [9]:

$$K = F[K_I(\lambda), K_{II}(\lambda), \theta^*(\lambda)] \quad (10)$$

که در آن  $K_I$  و  $K_{II}$  به ترتیب ضرایب شدت تنش مود اول و دوم در نوک ترک بوده و همچنین  $\lambda$  برابر  $x_0/l_1$  می‌باشد، که در آن  $l_1$  طول ترک اولیه است. کمیت  $\theta^*$  زاویه مسیر رشد ترک بوده و با معلوم بودن مقادیر  $K_I(\lambda)$  و  $K_{II}(\lambda)$  مقدار اکسترمم از تابع  $F[K_I, K_{II}, \theta^*]$  را در اختیار قرار می‌دهد.  $\theta^*$  به وسیله‌ی رابطه‌ی (11) تعریف می‌شود:

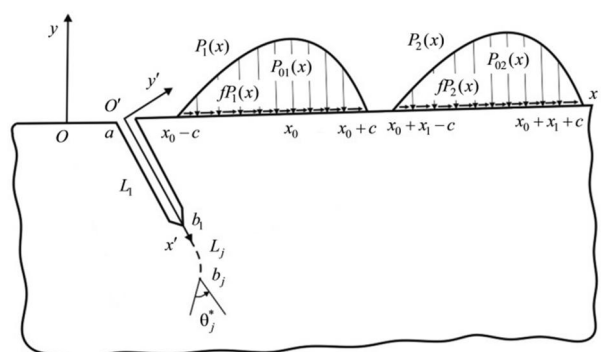
$$\theta^* = f[K_I(\lambda), K_{II}(\lambda)] \quad (11)$$

حرکت ناحیه تماس بر روی مرز نیم صفحه‌ی بی‌نهایت در هر سیکل با تغییر پارامتر  $\lambda$  مدل‌سازی شده است. در هر سیکل تابع  $F[K_I(\lambda), K_{II}(\lambda), \theta^*(\lambda)]$  بین مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود نسبت به پارامتر  $\lambda$  تغییر می‌کند، که این مقادیر در روابط (12) و (13) آمده‌اند:

$$K_{\max} = F[K_I(\lambda'), K_{II}(\lambda'), \theta^*(\lambda')] \quad (12)$$

$$K_{\min} = F[K_I(\lambda''), K_{II}(\lambda''), \theta^*(\lambda'')] \quad (13)$$

کمیت  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  بیانگر بازه‌ی تغییرات تابع  $F$  در یک سیکل غلتش می‌باشد. کمیت  $K_{\max}^*$  نیز که بیانگر مقدار بیشینه‌ی قدر مطلق کمیت  $K$  می‌باشد، به صورت رابطه (14) تعریف می‌گردد:



شکل 5 نمای کلی هندسه و بارگذاری مسئله

1- Macrocrack  
2- Complex Stress Stage

3- معادلات انتگرالی منفرد نیم صفحه شامل ترک لبه‌ای تحت بار

تماسی متحرک

توابع پتانسیل مختلط مسأله یک نیم صفحه بی‌نهایت تحت بار گذاری تماسی بر روی مرز نیم صفحه با در نظر گرفتن دو بار متحرک را می‌توان به صورت روابط (19) و (20) بیان نمود [11]:

$$\phi_0(z) = \frac{p_{01}(1+if)}{2\pi i} \int_{x_{01}-c}^{x_{01}+c} \frac{s_1(\zeta, l_1 \lambda) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{p_{02}(1+if)}{2\pi i} \int_{x_{02}-c}^{x_{02}+c} \frac{s_2(\zeta, l_1 \lambda + x_1) d\zeta}{\zeta - z} \quad (19)$$

$$\Psi_0(z) = \frac{p_{01}}{2\pi i} \int_{x_{01}-c}^{x_{01}+c} \frac{(1-if)z + 2if}{\zeta - z} s_1(\zeta, l_1 \lambda) d\zeta + \frac{p_{02}}{2\pi i} \int_{x_{02}-c}^{x_{02}+c} \frac{(1-if)z + 2if}{\zeta - z} s_2(\zeta, l_1 \lambda + x_1) d\zeta \quad (20)$$

پارامترهای توابع فوق در رابطه‌ی (9) توضیح داده شده‌اند. در این مفهوم توابع پتانسیل مختلط اصلاح شده<sup>1</sup> در الاستیسیته صفحه‌ای جهت استخراج توابع پتانسیل مختلط یک نیم‌صفحه حاوی ترک لبه‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. این مفهوم در مراجع [12] و [13] مورد بحث قرار گرفته است. جزئیات روش استخراج توابع پتانسیل مختلط یک نیم‌صفحه حاوی ترک لبه‌ای از این طریق در [14] توضیح داده شده است.

طبق این روش، توابع پتانسیل مختلط یک نیم صفحه حاوی تابع نایجابی  $g'(t)$  بر روی کانتور ترک  $L$  به صورت روابط (21) و (22) بیان می‌گردد [9]:

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ \left[ \frac{1}{T-z} - \frac{1}{\bar{T}-z} \right] e^{i\alpha} g'(t) dt + \frac{T-\bar{T}}{(\bar{T}-z)^2} e^{-i\alpha} \overline{g'(t)} dt \right\} \quad (21)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \left[ \frac{1}{(\bar{T}-z)^2} - \frac{1}{(T-z)^2} \right] \bar{T} e^{i\alpha} g'(t) dt + \left[ \frac{1}{T-z} - \frac{1}{\bar{T}-z} \right] \frac{(\bar{T}-T)(\bar{T}+T)}{(\bar{T}-z)^3} e^{-i\alpha} \overline{g'(t)} dt \right\} \quad (22)$$

که در این روابط  $z = z_k e^{i\alpha} + z_0$  و  $T = t e^{i\alpha} + z'_0$  که  $z_k$  و  $t$  متغیر مختلط در دستگاه مختصات محلی هستند.  $z_0$  و  $z'_0$  مختصات مبدأ دستگاه مختصات محلی در دستگاه مختصات مرجع و  $\alpha$  زاویه‌ی بین محور  $x$  از دستگاه مختصات محلی و  $x$  از دستگاه مختصات مرجع می‌باشند.

در یک مسأله تماس غلتشی با استفاده از اصل جمع آثار توابع پتانسیل مختلط این مسأله به صورت مجموع توابع پتانسیل مختلط مسأله تماس یک نیم صفحه و توابع پتانسیل مختلط یک نیم‌صفحه حاوی ترک لبه‌ای به صورت روابط (23) و (24) بیان می‌گردد:

$$\Phi(z) = \phi_1(z) + \phi_0(z) \quad (23)$$

$$\Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_0(z) \quad (24)$$

شرایط مرزی برای حالتی که وجوه ترک عاری از تنش هستند بر روی کانتور

ترک  $L$  به صورت رابطه‌ی (25) بیان می‌گردد:

$$N^\pm(\tau) + iT^\pm(\tau) = 0, \quad \tau \in L \quad (25)$$

علامت‌های  $+$  و  $-$  متناظر با مقادیر حدی تنش بر روی وجوه ترک هنگام میل کردن به سمت کانتور  $L$  به ترتیب از سمت راست و چپ می‌باشند (شکل 6). با ارضای شرایط مرزی (25) به وسیله‌ی توابع پتانسیل مختلط (23) و (24)، می‌توان معادلات انتگرالی مسأله‌ی مورد نظر را برحسب تابع توزیع نایجابی  $g'(t)$  استخراج نمود. شکل نرمالیزه شده‌ی این معادلات به صورت رابطه (26) می‌باشد [15]:

$$\int_{-1}^1 [R(\xi, \eta) \phi(\xi) + S(\xi, \eta) \bar{\phi}(\xi)] d\xi = \pi P(\eta, \lambda), \quad |\eta| < 1 \quad (26)$$

که در آن:

$$R(\xi, \eta) = \text{Re} \left[ \frac{\omega'(\eta)}{(\omega(\xi) - \omega(\eta))} + \frac{\omega'(\eta)}{w(\xi, \eta)} \right] + \frac{1}{2} \frac{w(\xi, \xi)}{w^2(\xi, \eta)} [\omega'(\eta) e^{2i\alpha} + \bar{\omega}'(\eta)] + 2\bar{\omega}'(\eta) e^{2i\alpha} \frac{(\omega(\xi) - \omega(\eta))}{w(\xi, \eta)} \quad (27)$$

$$S(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\omega(\xi) - \omega(\eta)}{\bar{\omega}(\xi) - \bar{\omega}(\eta)} \right] + \frac{\omega'(\eta)}{2} \left[ w^{-1}(\xi, \eta) + \frac{[\omega(\xi) - \omega(\eta)] \bar{\omega}'(\eta)}{w^2(\xi, \eta)} \frac{\omega'(\eta)}{\omega'(\eta)} + \frac{\bar{w}(\xi, \xi)}{\bar{w}^2(\xi, \eta)} e^{-2i\alpha} \right] \quad (28)$$

$$z_k = \omega(\eta) \rightarrow z = z_k e^{i\alpha} + z_0 \rightarrow z = \omega(\eta) e^{i\alpha} + z_0$$

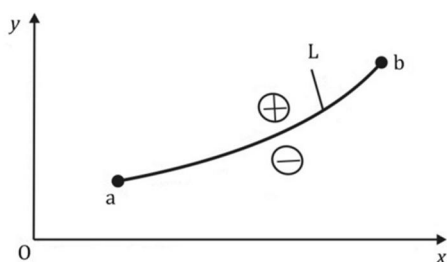
$$t = \omega(\xi) \rightarrow T = t e^{i\alpha} + z_0 \rightarrow T = \omega(\xi) e^{i\alpha} + z_0$$

$$H = z = z_k e^{i\alpha} + z_0, \quad z \in L, \quad H = \omega(\eta) e^{i\alpha} + z_0 \quad (29)$$

$$t = \omega(\xi), \quad t' = \omega(\eta) \quad (30)$$

$$\phi(\xi) = g'(t) \omega'(\xi) \quad (31)$$

$$P(\eta, \lambda) = -2\text{Re}(\phi_0(H)) - \frac{\bar{\omega}'(\eta)}{\omega'(\eta)} e^{-2i\alpha} (H \phi_0'(H)) + \bar{\Psi}_0(H) \quad (32)$$



شکل 6 کانتور  $L$  در صفحه بی‌نهایت

1- Modified Complex Potential (MCP)

#### 4- الگوریتم ایجاد مسیر رشد ترک

در این مدل با فرض این که ترک تحت مود بازشوندگی رشد می کند برای تعیین جهت رشد ترک و همچنین ضریب شدت تنش معادل از معیار ماکزیمم تنش مماسی استفاده گردیده است. براساس این معیار، رشد ترک در جهتی رخ می دهد که تنش مماسی  $\sigma_{\theta\theta}$  دارای بیشترین مقدار باشد. بنابراین براساس این معیار زاویه رشد ترک به صورت رابطه (33) به دست می آید:

$$\theta^* = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{K_{I\theta} - \sqrt{K_{I\theta}^2 + 8K_{II\theta}^2}}{4K_{II\theta}} \right] \quad (33)$$

مقدار ضریب شدت تنش معادل نیز در زاویه  $\theta^*$  با  $K_{I\theta}$  نشان داده می شود که به صورت رابطه (34) در می آید:

$$K = K_{I\theta} = \cos^3 \left( \frac{\theta^*}{2} \right) \left[ K_I - 3 \tan \left( \frac{\theta^*}{2} \right) K_{II} \right] \quad (34)$$

در این مدل با فرض این که در هر مرحله از ایجاد ترک (رشد ترک) بازه ای از تغییرات پارامتر  $\lambda$  وجود دارد که در آن وجوه ترک در تماس نیستند ( $K_I(\lambda) > 0$ )، این امکان وجود دارد تا با حل اولین مسئله اساسی تئوری الاستیسیته برای یک نیم صفحه بی نهایت با ترک لبه ای، بتوان مقدار  $K^*_{I\theta\max}$  را در هر مرحله از ایجاد مسیر ترک تعیین نمود. در حل مسئله مشاهده شده است که با دور شدن از لبه های ترک مقدار  $K_{I\theta}$  بسیار کوچک شده در نتیجه مقدار  $K^*_{I\theta\min}$  برابر صفر در نظر گرفته شده است. بنابراین:

$$K^*_{I\theta\max} = K_{I\theta\max} \quad (35)$$

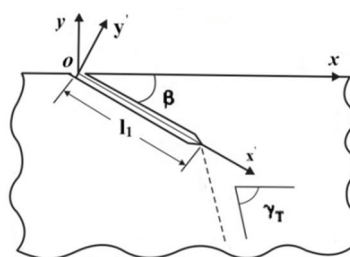
$$\Delta K_{I\theta} = K_{I\theta\max} \quad (36)$$

یک نیم صفحه بی نهایت ایزوتروپیک الاستیک را در نظر بگیرید. این نیم صفحه منطبق بر نیم صفحه پایینی صفحه مختلط  $z = x + iy$  ( $y \leq 0$ ) بوده و دارای ترک لبه ای منحنی شکل هموار اولیه ای به طول  $l_1$  می باشد. این ترک منطبق بر کانتور  $L_1$  بوده که معادله پارامتریک آن در دستگاه مختصات محلی  $x'o'y'$  تعریف شده و از نقطه  $a$  بر روی مرز نیم صفحه آغاز و در نقطه  $b$  پایان می یابد. رابطه بین دستگاه مختصات محلی با دستگاه مختصات مرجع به صورت رابطه (37) تعریف می گردد (شکل 7):

$$z = z' e^{i\alpha} + z'_0 \quad (37)$$

که در آن  $z'$  متغیر مختلط در دستگاه مختصات محلی است ( $z' = x' + iy'$ ).  $z'_0$  مختصات مبدأ دستگاه مختصات محلی در دستگاه مختصات مرجع و  $\alpha$  زاویه بین محورهای  $x'$  از دستگاه مختصات محلی و  $x$  از دستگاه مختصات مرجع می باشد.

با توجه به مطالب و فرضیات ذکر شده، ایجاد قسمت جدید مسیر ترک در مرحله  $\lambda_m$  به حل اولین مسئله اساسی تئوری الاستیسیته برای یک نیم صفحه بی نهایت شامل ترک لبه ای منحنی شکل با معادله پارامتریک  $L_j$  و تحت بارهای تماسی وارد شده در ناحیه تماسی (به مرکز  $x_0 + \lambda$ )، کاهش می یابد. معادله پارامتریک برای کانتور ترک در مرحله  $\lambda_m$  ( $L_j$ ) به صورت رابطه (38) بیان می گردد [9]:



شکل 7 دستگاه مختصات محلی و مرجع

$$t = \omega(\xi) = x'(\xi) + iy'[x'(\xi)] \quad (38)$$

در این رابطه  $x'(\xi)$  برابر  $\text{Re}[(b-a)\xi + b + a]/2$  است. متغیر مختلط  $b$  مختصات نوک ترک در دستگاه مختصات محلی می باشد.  $y'(x')$  نیز تابع مختصات  $y'$  کانتور  $L_j$  در دستگاه مختصات محلی می باشد. دستگاه مختصات محلی  $x'o'y'$  به گونه ای انتخاب می گردد که تابع  $y'(x')$  در تمام مراحل ایجاد مسیر ترک یکتا باشد. در شکل 6 نحوه انتخاب دستگاه مختصات محلی نشان داده شده است.

معادله انتگرالی (26) به صورت عددی و به وسیله روش انتگرال گیری عددی حل می گردد [9]. تابع نامشخص  $\phi(\xi)$  به فرم رابطه (39) تعریف می گردد:

$$\phi(\xi) = \frac{u(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (39)$$

که در آن  $u(\xi)$  در بازه  $[-1, 1]$  پیوسته بوده و شرایط رابطه (40) را ارضا می نماید:

$$u(-1) = 0 \quad (40)$$

به دلیل این که نقطه  $\xi = -1$  رأس ترک لبه ای نمی باشد، تابع  $g'(t)$  باید در این نقطه دارای ناکرانداری مرتبه ی پایین تری از  $\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$  باشد بنابراین این شرط محدود کننده برای حل مسأله در نظر گرفته شده است چرا که نقطه  $\xi = -1$  متناظر با انتهای ترک لبه ای که بر روی مرز نیم صفحه بی نهایت قرار می گیرد، می باشد.

به کمک انتگرال گیری عددی به روش چند جمله ای های چبیشف می توان مقدار انتگرال های زیر را محاسبه نمود و تابع مجهول  $u(\xi)$  را بدست آورد و در نهایت این تابع با استفاده از چند جمله ای های لاگرانژ تقریب زده می شود [9]:

$$\sum_{k=1}^M [R(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) + S(\xi_k, \eta_m) \bar{u}(\xi_k)] = MP(\eta_m, \lambda), \quad |\eta| < 1, \quad m = 1, \dots, M-1 \quad (41)$$

$$\sum_{k=1}^M [(-1)^k \tan\left(\frac{2k-1}{4M}\pi\right) u(\xi_k)] = 0 \quad (42)$$

با استخراج مقادیر  $u(\xi_k)$  ضرایب شدت تنش مود اول و دوم به صورت زیر قابل محاسبه می باشند [9]:

$$K_I - iK_{II} = \frac{1}{M} \frac{\sqrt{\pi\omega'(1)}}{\omega'(1)} \sum_{k=1}^M (-1)^k u(\xi_k) \cot\left(\frac{2k-1}{4M}\pi\right) \quad (43)$$

با محاسبه ضرایب شدت تنش مود اول و دوم، می توان مقادیر  $K_{I\theta}$  و  $\theta^*$  را محاسبه نمود. پس از انجام محاسبات فوق می توان مقدار  $\lambda^*$  را  $\lambda$  هنگامی که  $K_{I\theta}$  مقدار بیشینه خود را ( $K^*_{I\theta\max}$ ) اختیار می کند، به دست آورد. جستجو جهت یافتن مقدار  $\lambda^*$  به صورت عددی و گام به گام انجام می شود. در مرحله اول ایجاد مسیر ترک تمام بازه های مقادیر  $\lambda^*$  که در آن ها دهانه ی ترک باز می باشد، تست می شوند. در مراحل بعدی بازه های در نزدیکی مقدار قبلی  $\lambda^*$  تست می شوند. این موضوع را به فرم ریاضی به صورت رابطه (44) می توان بیان نمود:

$$\lambda_j^* = \lambda_{j-1}^* \pm mH_1, \quad j = 2, 3, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (44)$$

در این رابطه  $H_1 > 0$  گام تغییرات پارامتر  $\lambda$  می باشد، که دارای مقدار ثابتی است و  $m$  تعداد گام ها می باشد. در هر گام معادله (26) حل می گردد. پس از

$$N_c \approx \sum_{k=1}^{j_c} \frac{\Delta l_k}{v_k(K_{I\theta\max})} = H_2 \sum_{k=1}^{j_c} v_k^{-1}(K_{I\theta\max}) \quad (48)$$

نکته‌ی مهم در این رابطه تقریب تغییر طول ترک در هر مرحله، با مقدار  $H_2$  می‌باشد. همچنین  $j_c$  مرحله‌ای است که در آن طول ترک به مقدار بحرانی خود خواهد رسید.

### 5- تحلیل نتایج

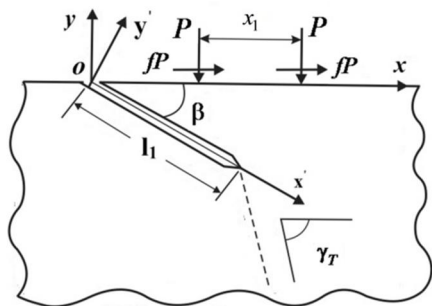
پس از بررسی و معرفی مدل ارائه شده همراه با چندین بار متحرک، در این بخش نتایج حاصل از این مدل برای تخمین عمر باقیمانده جسمی از جنس فولاد پرلیت لایه‌ای 75XFGT تحت تأثیر یک و دو بار متمرکز متحرک ارائه شده است. در ابتدا نتایج به‌دست آمده از مدل حاضر در حالت خاص یک بار متمرکز متحرک بر روی مرز نیم صفحه برای مسیر رشد ترک در حالتی که ترک اولیه با مرز نیم صفحه زاویه  $\frac{\pi}{6}$  می‌سازد با نتایج حاصل از کار داتسیشین و همکارانش [5] مورد مقایسه قرار گرفته است. در نهایت نتایج به‌دست آمده برای عمر با نتایج حاصل از کار داتسیشین و همکارانش [5] که در آن عمر باقیمانده‌ی جسمی تحت تأثیر یک بار متحرک متمرکز تخمین زده شده است، مقایسه شده است.

ترک لبه‌ای اولیه به صورت یک ترک مستقیم به طول 1mm در نظر گرفته شده است. زاویه‌ی بین این ترک و مرز نیم صفحه برابر  $\beta$  فرض شده است. مبدأ دستگاه مختصات محلی و مرجع مطابق شکل 9 منطبق بر هم می‌باشند. در نتیجه،  $a$  و  $z'_0$  برابر صفر می‌باشند. محور  $o'x'$  منطبق بر ترک اولیه در نظر گرفته شده است. در نتیجه  $\alpha$  برابر  $\beta$  برابر  $b_1$  برابر  $l_1$  می‌باشند. بار تماسی غلتشی به‌صورت یک و دو نیروی متمرکز متحرک هر یک با فاصله‌ی  $x_1=3 \text{ mm}$  مدل گردیده‌اند که در شکل 9 نمایش شماتیکی از فیزیک مسئله همراه با دو بار متمرکز متحرک نشان داده شده است. مؤلفه‌ی عمودی این نیروها دارای مقدار یکسان و برابر  $p_0$  و مؤلفه‌ی مماسی آن‌ها برابر  $fp_0$  بوده و این نیروها در نقاط  $x_0 + x_1$  و  $x_0$  بر روی مرز نیم صفحه عمل می‌کنند. با این فرضیات، معادله‌ی پارامتریک کانتور ترک اولیه در دستگاه مختصات محلی به فرم زیر می‌باشد:

$$t = \omega(\xi) = l_1(\xi + 1)/2 \quad (49)$$

همچنین سمت راست معادله انتگرالی (26) عبارت است از:

$$P(\eta, \lambda) = \frac{p_0}{\pi} \left\{ \text{Re} \left[ \frac{(f-i)e^{-i\alpha}}{\zeta(\eta, \lambda)} \right] \omega'(\eta) - \frac{\text{Re}[\zeta(\eta, \lambda)(f+i)e^{i\alpha}]}{\bar{\zeta}^2(\eta, \lambda)} \bar{\omega}'(\eta) \right\} + \frac{p_0}{\pi} \left\{ \text{Re} \left[ \frac{(f-i)e^{-i\alpha}}{\zeta(\eta, \lambda + x_1)} \right] \omega'(\eta) - \frac{\text{Re}[\zeta(\eta, \lambda)(f+i)e^{i\alpha}]}{\bar{\zeta}^2(\eta, \lambda + x_1)} \bar{\omega}'(\eta) \right\} \quad (50)$$



شکل 9 مدل فیزیکی مسئله مورد بررسی همراه با دو بار متمرکز متحرک

تعیین  $\lambda_j^*$ ، زاویه‌ی  $\theta_j^*$  که پارامتر اساسی جهت ایجاد  $j+1$ امین قسمت مسیر است، از طریق معادله‌ی (36) تعیین می‌گردد. مؤلفه‌ی افقی مختصه‌ی نوک ترک (در دستگاه مختصات محلی) در هر مرحله به‌وسیله‌ی رابطه‌ی (45) محاسبه می‌شود:

$$x'_{j+1} = \text{Re}b_1 + \sum_{k=1}^j h_k \quad (45)$$

که در آن  $h_k = H_2 \cos \gamma_k$  تصویر گام افزایشی در هر مرحله از ایجاد ترک، بر روی محور افقی ( $x'$ ) می‌باشد.  $H_2 > 0$  گام افزایشی در هر مرحله از ایجاد ترک در راستای رشد ترک بوده که دارای مقداری ثابتی است.  $\gamma_k$  زاویه‌ی بین محور  $o'x'$  و مسیر رشد ترک می‌باشد. در شکل 7 پارامترهای ذکر شده نشان داده شده‌اند.

معادله‌ی پارامتریک کانتور ترک اولیه ( $l_1$ ) معلوم بوده که این کانتور هموار می‌باشد. در هر مرحله، به‌منظور هموار باقی ماندن کانتور ترک، قسمت‌های جدید مسیر ترک به وسیله‌ی چند جمله‌ای‌های درجه سه تقریب زده می‌شوند. معادله‌ی قسمت‌های جدید اضافه شده به صورت رابطه‌ی (46) می‌باشند:

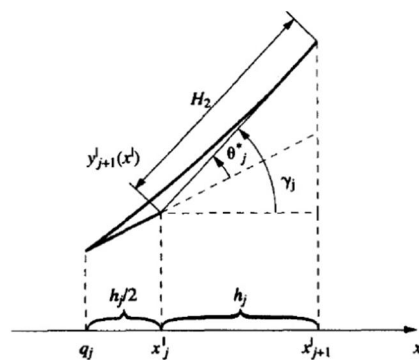
$$y_{j+1} = a_{j+1}(x' - q_j)^3 + b_{j+1}(x' - q_j)^2 + c_{j+1}(x' - q_j) + d_{j+1}(q_j \leq x' \leq x'_{j+1}) \quad (46)$$

که در آن  $q_j = x'_j - \delta_j$  می‌باشد. ضرایب این چند جمله‌ای با توجه به شرط هموار باقی ماندن کانتور ترک در مرحله‌ی  $j+1$ ام، تعیین می‌گردند [9]. در نهایت معادله‌ی کل کانتور ترک در مرحله‌ی  $j+1$ ام (در دستگاه مختصات محلی) به صورت رابطه‌ی (47) در می‌آید:

$$y'(x') = \begin{cases} y_1(x') \text{Re}a \leq x' \leq q_1 = \text{Re}b_1 - \frac{h_1}{2} \\ y_j(x') q_{k-1} \leq x' \leq q_k = \text{Re}b_1 - \frac{h_1}{2} \quad k = 2, \dots, j \\ y_{j+1}(x') q_j \leq x' \leq x'_{j+1} = \text{Re}b_1 - \frac{h_1}{2} \end{cases} \quad (47)$$

در این رابطه  $y_1(x')$  معادله‌ی منحنی اولیه ترک در بازه‌ی  $[\text{Re} a, \text{Re} b_1]$  می‌باشد. در شکل 8 نمودار قسمت  $j+1$ ام ترک و تمامی پارامترهای معرفی شده جهت رشد ترک در این مرحله، نشان داده شده‌اند.

در نهایت با گسسته‌سازی ترم دوم رابطه‌ی (17)، می‌توان عمر باقیمانده‌ی ( $N_c$ ) جسم دارای ترک سطحی و تحت تماس غلتشی را به صورت رابطه (48) محاسبه نمود:



شکل 8 منحنی  $j+1$ امین قسمت ترک

که در آن:

$$\zeta(\eta, \lambda) = \omega(\eta) + (z'_0 - \lambda l_1) e^{-i\alpha} \quad (51)$$

$$\zeta(\eta, \lambda + x_1) = \omega(\eta) + (z'_0 - (\lambda + x_1) l_1) e^{-i\alpha} \quad (52)$$

بار  $p_0$  نیز به صورت رابطه (53) در نظر گرفته شده است [5]:

$$p_0 = BK_{2-3} \sqrt{\pi l_1} \quad (53)$$

در این رابطه  $K_{2-3}$  ضریب شدت تنش جدا کننده ناحیه دوم و سوم نمودار خستگی شکست<sup>1</sup> بوده و مقدار آن برابر  $29/1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  می باشد. همچنین  $K_{1-2}$  ضریب شدت تنش جدا کننده ناحیه اول و دوم نمودار خستگی - شکست<sup>2</sup> بوده و مقدار آن برابر  $5/2 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  می باشد. ضریب  $B$  به گونه ای انتخاب می گردد که شرط (16) و همچنین شرط رابطه ی (54) ارضاء گردد:

$$K_{1-2} \leq K_{I\theta\text{max}} \leq K_{2-3} \quad (54)$$

برای استفاده از رابطه ی (48) طول بحرانی ترک برابر  $4 \text{ mm}$  فرض شده است.

ثوابت رابطه ی پاریس نیز عبارتند از [5]:

$$C = 3.09 \times 10^{-12} \text{ MPa}^{-n} \text{ m}^{1-n/2} \quad (55)$$

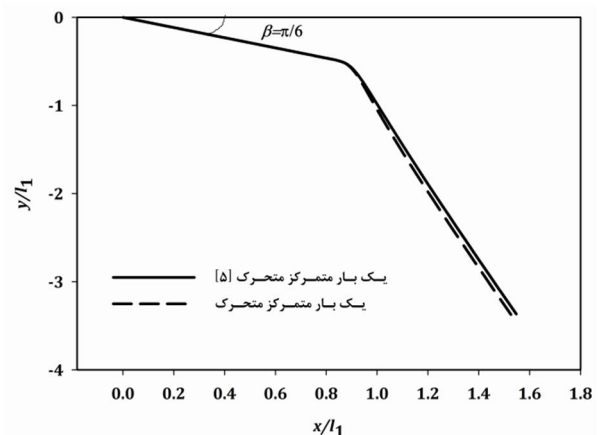
$$n = 3.48 \quad (56)$$

در این تحلیل دو ضریب اصطکاک برابر  $0/25$  و  $0/3$  در نظر گرفته شده است [5].

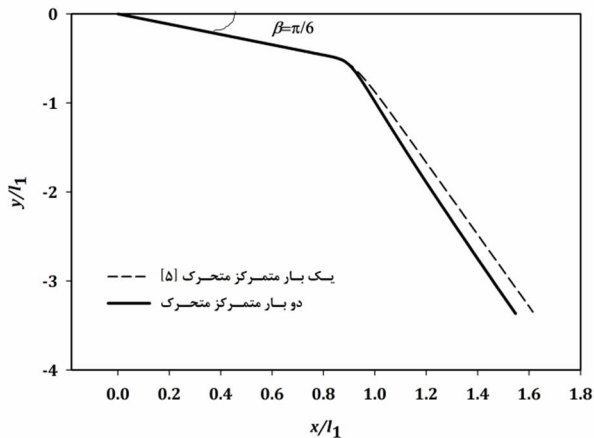
اگر جهت نیروی مماسی مطابق با شکل 9 انتخاب گردد، نتایج حاصل از مدل حاضر و مدل دانسیشین و همکارانش [5] برای مسیر رشد ترک در حالت خاص یک بار متمرکز متحرک بر روی مرز نیم صفحه در حالتی که ترک اولیه با مرز نیم صفحه زاویه  $\pi/6$  می سازد در شکل 10 مورد مقایسه قرار گرفته است. با توجه به این شکل نتایج حاصل از مدل حاضر به خوبی با نتایج مدل مرجع [5] هم خوانی دارد.

متحرک بر روی مرز نیم صفحه در ضریب اصطکاک  $f=0/3$  در زاویه  $\beta = \pi/6$  اگر جهت نیروی مماسی مطابق با شکل 9 انتخاب گردد، مسیر رشد ترک برای زوایای مختلف ترک اولیه نسبت به مرز نیم صفحه برای دو حالت مختلف یک بار متمرکز و دو بار متمرکز متحرک بر روی مرز نیم صفحه و برای ضریب اصطکاک  $f=0/3$  در اشکال 11، 12 و 13 نشان داده شده و با یکدیگر مقایسه گردیده اند.

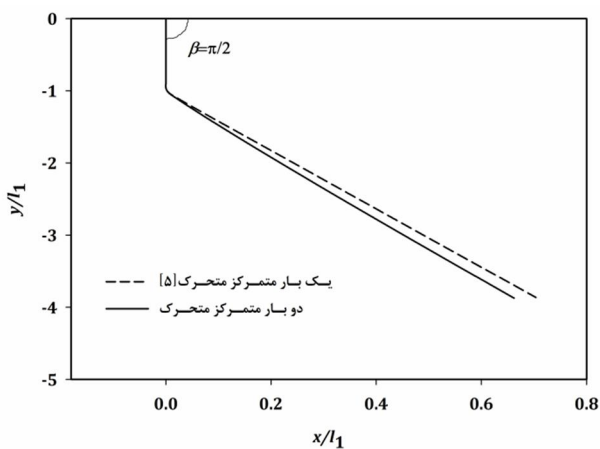
با توجه به شکل های 11 تا 13 با افزایش تعداد بارهای متحرک تماسی بر روی مرز نیم صفحه زاویه رشد ترک نسبت به ترک اولیه بسته تر شده و



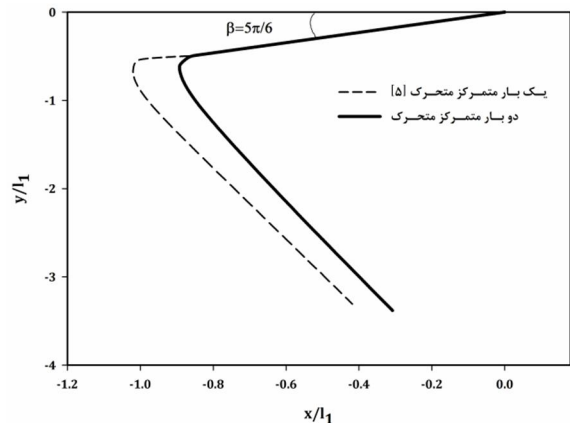
شکل 10 مسیر رشد ترک بر حسب مود بازشوندگی برای حالت یک بار متمرکز



شکل 11 مسیر رشد ترک بر حسب مود بازشوندگی برای دو حالت بارگذاری مختلف در ضریب اصطکاک  $f=0/3$  در زاویه  $\beta = \pi/6$



شکل 12 مسیر رشد ترک بر حسب مود بازشوندگی برای دو حالت بارگذاری مختلف در ضریب اصطکاک  $f=0/3$  در زاویه  $\beta = \pi/2$

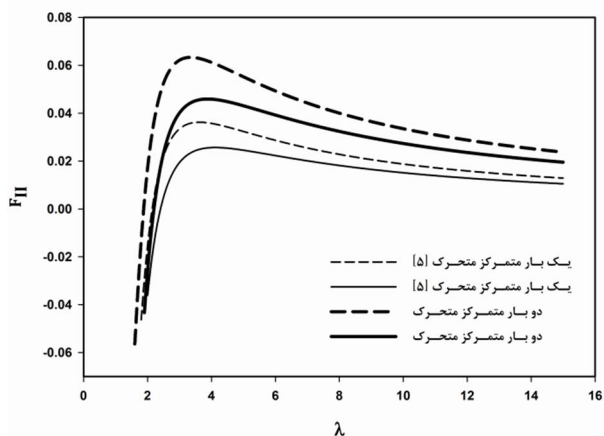


شکل 13 مسیر رشد ترک بر حسب مود بازشوندگی برای دو حالت بارگذاری مختلف در ضریب اصطکاک  $f=0/3$  در زاویه  $\beta = 5\pi/6$

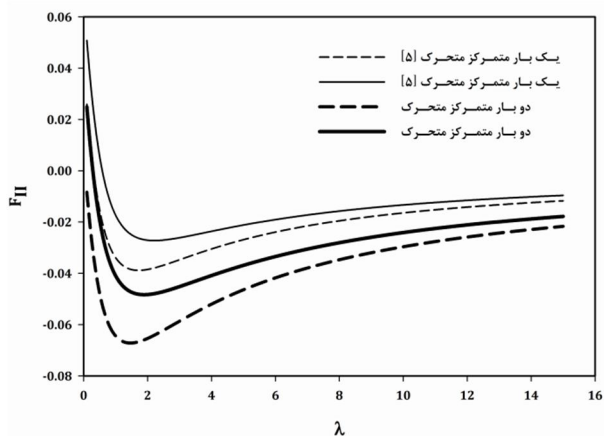
ترک بیشتر به سمت داخل سطح منحرف می گردد در نتیجه امکان این که ترک های سطحی به یکدیگر بپیوندند و به سمت سطح رشد کنند و باعث ایجاد کندگی سطحی<sup>2</sup> شوند کاهش می یابد.

نحوه ی تغییرات مشخصات حالت تنش از جمله  $F_I$ ،  $F_{II}$  و  $F_{I\theta}$  در نوک ترک در مرحله ی اول ایجاد مسیر ترک بر حسب تغییرات پارامتر  $\lambda$  در اشکال 14 تا 20 برای دو حالت یک بار متمرکز و دو بار متمرکز متحرک نشان داده

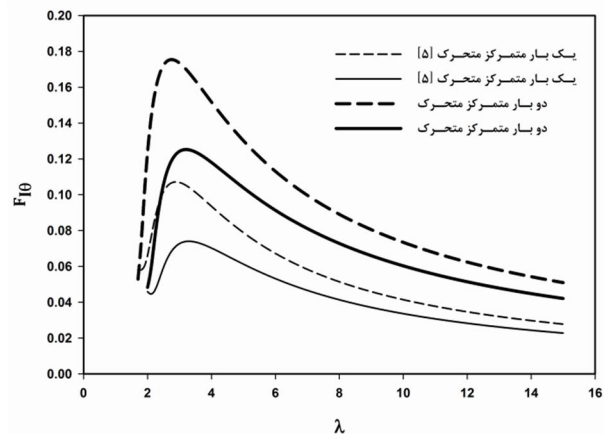




شکل 17 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده  $F_{II} = \sqrt{\pi l_1} K_{II}/P$  برحسب تغییرات  $\lambda$  برای زاویه  $\beta = \pi/6$  (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/3$  و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/25$  می باشند)



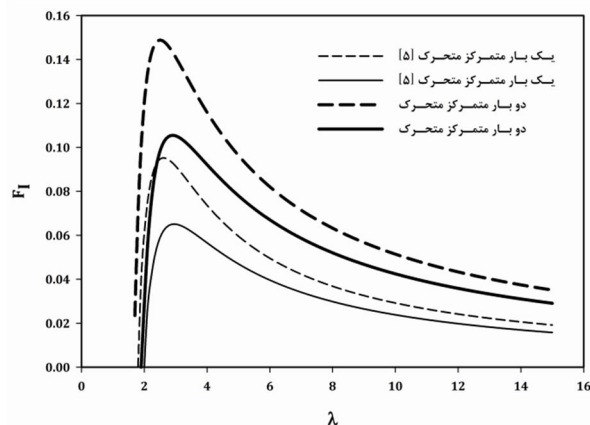
شکل 18 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده  $F_{II} = \sqrt{\pi l_1} K_{II}/P$  برحسب تغییرات  $\lambda$  برای زاویه  $\beta = 5\pi/6$  (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/3$  و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/25$  می باشند)



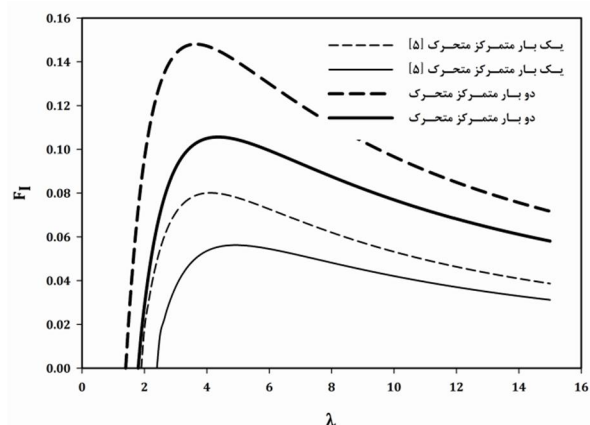
شکل 19 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده  $F_{I0} = \sqrt{\pi l_1} K_{I0}/P$  برحسب تغییرات  $\lambda$  برای زاویه  $\beta = \pi/6$  (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/3$  و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/25$  می باشند)

محدوده تغییرات پارامتر  $\lambda$  برای حالتی که ترک اولیه کاملاً باز می باشد یعنی  $K_I(\lambda) > 0$  براساس تجزیه و تحلیل اطلاعات عددی به دست آمده، استخراج گردیده است. اگر جهت نیروی مماسی مطابق با شکل 9 انتخاب گردد، محدوده‌ی متناظر تغییرات  $\lambda$  در سمت راست دهانه‌ی ترک واقع می شود،

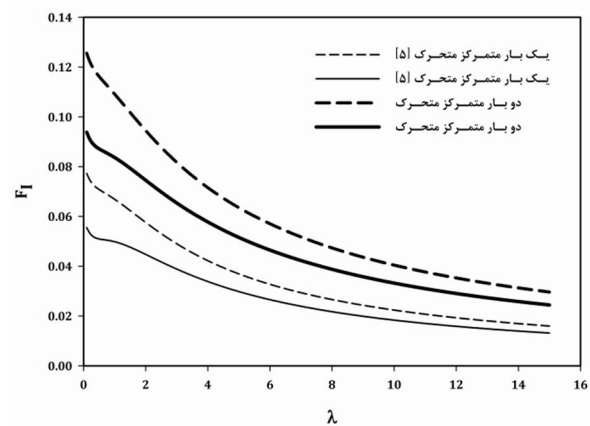
شده است. نتایج در این نمودارها براساس ترک اولیه‌ای به طول  $l_1$  با زاویه‌ی  $\beta$  نسبت به مرز نیم صفحه بدست آمده است که در آن فاصله‌ی نیروهای متمرکز از دهانه‌ی ترک برابر  $x_0 + x_1 = l_1 \lambda$  بوده و خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/3$  و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/25$  می باشند.



شکل 14 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده  $F_I = \sqrt{\pi l_1} K_I/P$  برحسب تغییرات  $\lambda$  برای زاویه  $\beta = \pi/6$  (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/3$  و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/25$  می باشند)



شکل 15 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده  $F_I = \sqrt{\pi l_1} K_I/P$  برحسب تغییرات  $\lambda$  برای زاویه  $\beta = \pi/2$  (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/3$  و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/25$  می باشند)



شکل 16 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده  $F_I = \sqrt{\pi l_1} K_I/P$  برحسب تغییرات  $\lambda$  برای زاویه  $\beta = 5\pi/6$  (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/3$  و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/25$  می باشند)

گسترش ترکی دلخواه با مکانیزم بازشوندگی را در یک ضریب اصطکاک  $f$  معین به دست آورد. پیش‌بینی جهت رشد ترک براساس زاویه اولیه آن یعنی  $\beta$  ممکن است باعث ایجاد خطا گردد، به‌عنوان مثال با توجه به شکل 13 زاویه  $\beta = \frac{5\pi}{6}$  و مسیر مربوط به این زاویه را در نظر بگیرید که مسیر رشد این زاویه به صورت منحنی بوده و پس از کمی رشد تغییر کرده است. نتایج حاصل از مدل بررسی شده برای تخمین عمر فولاد 75XГCT تحت تماس غلتشی در جداول 1 و 2 آورده شده است.

### 6- نتیجه‌گیری

یاتاقان‌های غلتشی از مهم‌ترین اجزای به کار رفته در ماشین‌آلات دوار می‌باشند، به همین دلیل تعیین عمر باقیمانده‌ی این اجزا از موضوعات مهم در مباحث مربوط به ماشین‌آلات دوار می‌باشد. این اجسام تحت تماس سیکلی غلتشی قرار داشته و اگر در این اجسام از دیگر حالت‌های خرابی جلوگیری شود، نهایتاً خستگی تماس غلتشی باعث خرابی آن‌ها می‌گردد. در هنگام بارگذاری یک یاتاقان غلتشی، بیش از یک المان غلتشی تحت بار قرار خواهد گرفت؛ بنابراین جهت تخمین دقیق‌تر عمر یاتاقان و مدل‌سازی ریاضی واقعی‌تر مسئله، لازم است همه‌ی المان‌های غلتشی تحت بار در مدل ریاضی مسئله لحاظ گردند. تا به حال در مراجع مدلی جهت تخمین عمر باقیمانده‌ی اجزای دوار در تماس با در نظر گرفتن چندین بار متحرک تماسی ارائه نشده است.

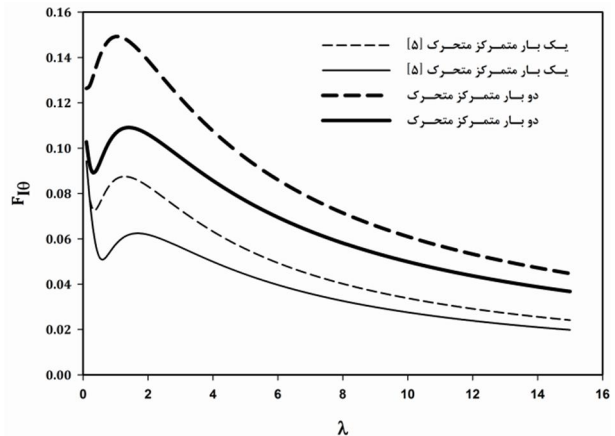
با توجه به توضیحات داده شده در مورد نحوه‌ی بارگذاری در اجزای دوار در تماس در یاتاقان‌های غلتشی در این مقاله مدلی مشابه مدل داتسیشین و همکارانش جهت بررسی اثر در نظر گرفتن چندین بار متحرک بر روی مسیر رشد ترک و عمر باقیمانده‌ی اجسام تحت خستگی تماس غلتشی ارائه گردیده است. این مدل، مدلی دو بعدی جهت تخمین عمر باقیمانده این اجسام

جدول 1 عمر باقیمانده فولاد 75XГCT تحت تماس غلتشی در حالت یک بار

متمركز [5]							
$\beta$ (rad)	B	$H_1$	$H_2$	$\lambda_1^*$	$\lambda_c^*$	$\Delta l$ (mm)	$N_c$ (cycle)
$f=0/25$							
$\pi/6$	10	0/1 $h$	0/05 $h$	3/3	18	3	$2 \times 10^5$
$\pi/2$	10	0/1 $h$	0/05 $h$	4/9	19/5	3	$3 \times 10^5$
$5\pi/6$	10	0/1 $h$	0/01 $h$	0/1	12/8	3	$1 \times 10^5$
$f=0/3$							
$\pi/6$	10	0/1 $h$	0/05 $h$	2/9	15/2	3	$6 \times 10^4$
$\pi/2$	10	0/1 $h$	0/05 $h$	4/1	16/4	3	$8 \times 10^4$
$5\pi/6$	10	0/1 $h$	0/01 $h$	0/1	10/6	3	$5 \times 10^4$

جدول 2 عمر باقیمانده فولاد 75XГCT تحت تماس غلتشی در شرایط متفاوت در

حالت دو بار متمركز							
$\beta$ (rad)	B	$H_1$	$H_2$	$\lambda_1^*$	$\lambda_c^*$	$\Delta l$ (mm)	$N_c$ (cycle)
$f=0/25$							
$\pi/6$	10	0/1 $h$	0/05 $h$	3/1	16/86	3	$1/89 \times 10^4$
$\pi/2$	10	0/1 $h$	0/05 $h$	4/4	18/2	3	$2/66 \times 10^4$
$5\pi/6$	10	0/1 $h$	0/01 $h$	1/4	15/03	3	$1/92 \times 10^4$
$f=0/3$							
$\pi/6$	10	0/1 $h$	0/05 $h$	2/7	14/17	3	$5/49 \times 10^3$
$\pi/2$	10	0/1 $h$	0/05 $h$	3/6	15/3	3	$7/67 \times 10^3$
$5\pi/6$	10	0/1 $h$	0/01 $h$	1/1	12/41	3	$5/58 \times 10^3$



شکل 20 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده  $F_{10} = \sqrt{\pi l_1} K_{I0}/P$  برحسب تغییرات  $\lambda$  برای زاویه  $\beta = 5\pi/6$  (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/3$  و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک  $f=0/25$  می‌باشند)

یعنی در این حالت  $\lambda$  مثبت می‌باشد. تجزیه و تحلیل دقیق‌تر را می‌توان براساس نمودار شکل‌های 14، 15 و 16 که در آن مقادیر ضریب شدت تنش  $K_I$  نرمالیزه شده ارائه شده است، به دست آورد. با توجه به این شکل‌ها در یک ضریب اصطکاک ثابت، محدوده‌ی تغییرات  $\lambda$  ( $K_I(\lambda) > 0$ ) برای زوایای بزرگتر از 90 درجه بیشتر می‌باشد، به طور مثال در ضریب اصطکاک 0/25 برای زاویه‌ی  $\frac{\pi}{6}$  تغییرات  $\lambda$  از تقریباً 2 شروع شده است، اما برای زاویه‌ی  $\frac{5\pi}{6}$  تغییرات  $\lambda$  از صفر شروع می‌شود، که این امر به دلیل جهت فرض شده در شکل 9 برای نیروی مماسی  $fP$  اتفاق می‌افتد. همچنین با توجه به این شکل‌ها در یک زاویه خاص  $\beta$  مثلاً  $\frac{\pi}{6}$ ، با افزایش ضریب اصطکاک محدوده‌ی تغییرات  $\lambda$  که در آن ترک در مود بازشوندگی قرار دارد، پهن‌تر است یعنی در ضریب اصطکاک بزرگ‌تر نمودارها از  $\lambda$ های کوچک‌تری شروع می‌شوند.

براساس نمودار شکل‌های 14، 15 و 16 مقادیر ضریب شدت تنش  $K_I$  نرمالیزه شده با افزایش تعداد بارهای متحرک در نظر گرفته شده به شدت افزایش یافته و همچنین در یک بار خاص نیز با افزایش ضریب اصطکاک مقدار این ضریب شدت افزایش می‌یابد.

با توجه به اشکال 14 تا 18 تغییرات مقادیر ضریب شدت تنش نرمالیزه شده برای  $\lambda$ های کوچک (یعنی مکان‌هایی که نیروی متمركز نزدیک دهانه‌ی ترک می‌باشد) به شدت زیاد بوده، که همین رفتار در نمودارهای  $F_{10}$  نیز مشاهده می‌گردد. با توجه به اشکال 14 تا 16 و اشکال 19 و 20 با افزایش فاصله‌ی نقطه‌ی تماس با دهانه‌ی ترک یعنی افزایش مقدار  $\lambda$ ، مقادیر ضرایب شدت تنش نرمالیزه شده‌ی  $K_I$  و  $K_{I0}$  به تدریج به سمت صفر کاهش پیدا می‌کنند از این رو  $K_{I0,min}$  برابر صفر در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که نتایج عددی به دست آمده برای  $K_I$  و  $K_{II}$  با نتایج تحلیلی ترک عمود بر مرز نیم صفحه برای یک بار متمركز متحرک در مرجع [16] هم‌خوانی خوبی دارند.

براساس تجزیه و تحلیل مسیر رشد ترک در اشکال 11 تا 13 مشخص می‌گردد که جهت انتشار ترک کمی به زاویه اولیه آن وابسته بوده و پس از کمی گسترش، ترک بر روی یک خط صاف در عمق ماده تحت زاویه  $\gamma_T$  نسبت به مرز نیم صفحه رشد می‌کند.

واضح است که، یک زاویه جهت‌گیری اولیه ( $\beta = \gamma_T$ ) برای ترک وجود دارد که در آن  $\theta_1^*$  تقریباً برابر صفر می‌گردد و ترک در امتداد همان زاویه  $\gamma$  گسترش پیدا می‌کند. پس از بدست آوردن مقدار این زاویه، می‌توان جهت

- [4] M. D. Bryant, G. R. Miller and L. M. Keer, Line Contact between a rigid indenter and a damaged elastic body, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 37, pp. 468-478, 1984.
- [5] V. V. Panasyuk, O. P. Datsyshyn and H. P. Marchenko, The Crack Propagation Theory Under Rolling Contact, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 52, pp. 179-191, 1995.
- [6] T. A. Harris and M. N. Kotzalas, *Essential Concepts of Bearing Technology*, Fifth Edition, New York: Taylor & Francis, 2006.
- [7] V. V. Panasyuk, A. Ye. Andreykiv, and V. Z. Parton, *Base of Fracture Mechanics of Materials*, in *Fracture Mechanics and Material Strength (Handbook)*, Kyiv: Naukova Dumka, 1988.
- [8] S. Ye. Yarema and A. I. Zboromirski, Analytical Study of Growth of a Fatigue Crack Arbitrarily Oriented in the Biaxial Nonuniform Stress Fields, *Fiz-Khim. Mekh. Mater.*, Vol. 20, pp. 54-62, 1984.
- [9] M. P. Savruk, *Two Dimensional Elasticity Problems for Bodies With Cracks*, Kyiv: Naukova Dumka, 1981 (in Russian).
- [10] M. P. Savruk and P. N. Osiv, On Calculations of Cracks Propagation Static Path, *Probl. Prochn.*, Vol. 11, pp. 19-23, 1982.
- [11] D. A. Hills, D. Nowell and A. Sackfield, *Mechanics of Elastic Contact*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1993.
- [12] Y. Z. Chen, Stress Intensity Factors in Finite Plate Having Contour with Cusps and Applied by Concentrated Forces, *Engineering Fracture Mech.*, Vol. 22, pp. 635-644, 1985.
- [13] T. Henein and G. Hermmann, On Bonded Inclusions with Circular or Straight Boundaries in Plane Elastostatics, *J. Appl. Mech.*, Vol. 57, pp. 850-856, 1990.
- [14] Y. Z. Chen, A Survey of New Integral Equations in Plane Elasticity Crack Problem, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 51, pp. 97-134, 1995.
- [15] O. P. Datsyshyn and H. P. Marchenko, Curvilinear Cracks and Elastic Half-Plane Boundary Interaction, *Fiz. Khim. Mekh. Mater.*, Vol. 20, pp. 64-71, 1984.
- [16] D. P. Rooke and D. A. Jones, Stress Intensity Factors in Fretting Fatigue, *J. Strain Anal.*, Vol. 14, pp. 1-6, 1979.

می‌باشد. نکته مهم در این مدل نحوه ایجاد مسیر رشد ترک در جسم حاوی ترک بوده است.

با توجه به نتایج بدست آمده برای عمر باقیمانده مشخص است که با افزایش تعداد بارهای تماسی متحرک بر روی سطح تماس مقدار عمر باقیمانده کاهش پیدا کرده و به حالت واقعی نزدیک‌تر می‌گردد. در حالت دو بار متحرک متمرکز مقدار عمر یک دهم برابر شده است بنابراین در نظر گرفتن حالت واقعی‌تر بارگذاری در تخمین عمر باقیمانده‌ی جسم بسیار مهم می‌باشد. همچنین در یک بار خاص به عنوان مثال دو بار متمرکز متحرک با افزایش ضریب اصطکاک عمر باقیمانده سطح تحت خستگی تماس غلتشی کاهش می‌یابد. با توجه به جداول 1 تا 2 مشخص است که با افزایش فاصله‌ی بین نوک ترک اولیه با مرز نیم صفحه، عمر باقیمانده افزایش می‌یابد به‌عنوان مثال در زاویه  $\beta = \frac{\pi}{2}$  نوک ترک بیش‌ترین فاصله نسبت با مرز نیم صفحه را داراست لذا دارای بیش‌ترین عمر باقیمانده می‌باشد.

## 7- مراجع

- [1] S. Way, Pitting due to rolling contact, *Trans. ASME: J. Appl. Mech.*, Vol. 2, pp. 49-58, 1935.
- [2] L. M. Keer, M. D. Bryant, and G. K. Haritos, Subsurface and Surface Cracking due to Hertzian Contact, *Trans. ASME: J. Lubric. Technol.*, Vol. 104, pp. 347-351, 1982.
- [3] L. M. Keer and M. D. Bryant, A Pitting Model for Rolling Contact Fatigue, *Trans. ASME: J. Lubric. Technol.*, Vol. 105, pp. 198-205, 1983.