مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1395، دوره 16، شماره 4، ص‌ص 135-144

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

حل تقریبی خطای تلاش صفر با فرض شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله

محسن دهقانی محمدآبادی[1]، سید حمید جلالی نائینی[2*]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، کدپستی 13116-14117، shjalalinaini@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 13 بهمن 1394

پذیرش: 23 اسفند 1394

ارائه در سایت: 28 فروردین 1395

کلید واژگان:

خطای تلاش صفر

شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله

حل تکه‌ای

چکیده

در این مقاله، حل تقریبی بردار خطای تلاش صفر در مدل زمین کروی و مختصات مطلق در مرجع اینرسی زمین مرکز ارائه شده است. در این رویکرد، شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله وسیلهٔ پروازی تا مرکز زمین فرض شده است. حل مذکور منجر به یک رابطهٔ صریح بر حسب شرایط اولیه و زمان پرواز می‌شود. بعلاوه، به منظور افزایش دقت، حل تکه‌ای با اعمال نقاط میانی مسیر به این رابطهٔ حل صریح اعمال شده است. زمان پرواز در حل تکه‌ای به چند بازهٔ زمانی تقسیم می‌شود. در هر بازهٔ زمانی، شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله در نظر گرفته می‌شود، اما در هر بازه پارامتر ثابت مدل اصلاح و بهنگام می‌شود. دقت و بار محاسباتی روش مذکور به ازای تعداد بازه‌های زمانی مختلف بدست آمده است. به منظور مقایسه، حل تکه‌ای برای تقریب شتاب گرانش خطی نیز به کار برده شده است. نتایج شبیه‌سازی و محاسبهٔ بار محاسباتی نشان می‌دهد که روش ارائه شده نسبت به روش تقریبی شتاب گرانش خطی در مختصات مطلق و روش خطی‌سازی در مختصات نسبی، به ازای بار محاسباتی نسبتاً یکسان، دقت بیشتری دارد.

Approximate solution of zero-effort-miss under gravitational acceleration inversely proportional to the cubic distance

Mohsen Dehghani Mohammad-abadi, Seyed Hamid Jalali-Naini*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

* P.O.B. 14117-13116 Tehran, Iran, shjalalinaini@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 02 February 2016
Accepted 13 March 2016
Available Online 16 April 2016

Keywords:
Zero-effort miss
gravitational acceleration inversely proportional to the cubic distance
piecewise solution

ABSTRACT

In this paper, an approximate solution of zero-effort-miss distance in spherical earth model is obtained in Earth-centered inertial (ECI) coordinates. In this approach, the gravitational acceleration is assumed to be inversely proportional to the cubic distance of space vehicle from the earth center. The present solution gives an explicit formula in terms of initial conditions and flight time. Moreover, the piecewise solution, i.e., the connection of solutions, is utilized in order to increase the accuracy of the algorithm. For this purpose, the total flight time is divided into several intervals using middle points. In each interval, the gravitational acceleration is taken to be inversely proportional to the cubic distance, but the correction constant is updated for each interval. The accuracy of the proposed method and its computational burden are calculated for various numbers of time intervals. For comparison purpose, the piecewise solution is also applied to the linear gravity approximation. The simulation results and calculation of computational burden show that the presented method has better accuracy than linear solution in ECI reference and linearized solution for relative motion with the same computational burden.

1- مقدمه

«خطای تلاش صفر» کمیتی کاربردی در قوانین هدایت دو نقطه‌ای است. مطابق تعریف، «خطای تلاش صفر» برابر خطای نهایی است، اگر شتاب مانوری وسیلهٔ رهگیر بطور فرضی از زمان حاضر تا زمان نهایی، صفر شود. رابطهٔ «خطای تلاش صفر» در مدل زمین کروی بطور صریح بر حسب زمان قابل استخراج نیست و استفاده از روش‌های تکراری نیز سبب افزایش بار محاسباتی می‌شود [1-3].

کاربرد اولیهٔ «خطای تلاش صفر» در مسائل رهگیری در مدل زمین کروی، با استفاده از فرض شتاب گرانشِ برابر در موقعیت رهگیر و هدف صورت پذیرفته که به نوعی معادل فرض بردار شتاب گرانش ثابت می‌شود [4،5]. البته فرض شتاب گرانش نسبی صفر تنها برای بردهای کوتاه کاربردی است. سپس رابطهٔ بردار خطای تلاش صفر با فرض شتاب گرانش نسبی صفر، خطی با زمان و پروفیل چندجمله‌ای مرتبهٔ دوم بر حسب زمان ارائه شده‌است [6]. در ادامه معادلات حرکت نسبی در مدل زمین کروی نسبت به بردار موقعیت خطی‌سازی شده‌است [6-9]. این خطی‌سازی ممکن است حول موقعیت اولیهٔ رهگیر، موقعیت اولیهٔ هدف، موقعیت نهایی هدف (یا رهگیر)، میانگین موقعیت اولیهٔ رهگیر و هدف و همچنین میانگین سه موقعیت اولیهٔ رهگیر، موقعیت اولیهٔ هدف و موقعیت نهایی هدف (یا رهگیر) انجام شود [8،9]. دقت روش خطی‌سازی به نقطهٔ خطی‌سازی بستگی دارد و دقت بیشتری نسبت به فرض شتاب گرانش صفر دارد.

Please cite this article using: / برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Dehghani Mohammad-abadi, S. H. Jalali-Naini, Approximate solution of zero-effort-miss under gravitational acceleration inversely proportional to the cubic distance, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 135 - 144, 2016 (in Persian)

در مرجع [10] در معادلات حرکت نسبی، موقعیت لحظه‌ای رهگیر، تقریبی خطی از بردار موقعیت نسبی فرض شده‌است و با این تقریب، معادلات حرکت نسبی خطی شده و رابطه‌ای صریح برای بردار خطای تلاش صفر بر حسب زمان بدست آمده‌است. دقت این حل برای بردهای کوتاه، بر حسب کاربرد، قابل قبول است. در مرجع [11] معادلهٔ خطای تلاش صفر با فرض شتاب گرانش خطی با بردار موقعیت و اعمال مدل خطی نیروی پسا با بردار سرعت و همچنین لحاظ کردن دینامیک سیستم کنترل استخراج شده‌است؛ اما نتایج عددی آن ارائه نشده‌است. در مرجع [12] با فرض شتاب گرانش خطی بر حسب بردار موقعیت در مختصات مطلق، یک رابطهٔ صریح برای بردار خطای تلاش صفر بر حسب زمان استخراج شده‌است. البته در اکثر مقالات مذکور، هدف استخراج قانون هدایت/هدایت بهینه بوده است و استخراج رابطهٔ خطای تلاش صفر به عنوان دستاورد فرعی این مقالات تلقی می‌شود.

در مقاله حاضر، با فرض شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله به جای مقدار دقیق شتاب گرانش در مدل زمین کروی که متناسب با عکس مجذور فاصله است، معادلات حرکت مطلق در مختصات قطبی حل شده و رابطه‌ای صریح برای بردار خطای تلاش صفر بر حسب زمان بدست آمده‌است، همچنین به منظور افزایش دقت، حل تکه‌ای با اعمال نقاط میانی مسیر به رابطهٔ حل صریح مدل «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» و مدل «شتاب گرانش خطی» [12] اعمال شده‌است. در ادامه دقت و بار محاسباتی روش‌های مذکور مقایسه شده‌است.

2- بردار خطای تلاش صفر

معادلهٔ حاکم بر حرکت وسیلهٔ پروازی که به صورت جرم نقطه‌ای مدل شده‌است، تحت شتاب گرانش به صورت رابطه (1) نوشته می‌شود:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g}(\vec{r}) \tag{1}$$

که در آن، $\vec{r}$ بردار موقعیت فضاپیما و $\vec{g}(\vec{r})$ بردار شتاب گرانش نسبت به مرجع اینرسی زمین‌مرکز (ECI) است. با دو بار انتگرال‌گیری از رابطه (1) می‌توان نوشت [11]:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (t - t_0)\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t}(t-\xi)\vec{g}[\vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, \xi)]\mathrm{d}\xi \tag{2}$$

که پایین‌نویس "0" نمایانگر شرایط اولیه و $\vec{v}$ بردار سرعت فضاپیما است. بنابراین، رابطهٔ بردار موقعیت نهایی در زمان نهایی t_f به صورت (3) نوشته می‌شود [11]:

$$\vec{r}(t_f) = \vec{r}_0 + (t_f - t_0)\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t_f}(t_f - t)\vec{g}[\vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t)]\mathrm{d}t \tag{3}$$

بردار خطای تلاش صفر، $\overrightarrow{\mathrm{ZEM}}$، بردار فاصلهٔ نهایی فضاپیما نسبت به موقعیت نهایی مطلوب، $\vec{r}_f^*$، است؛ مشروط به اینکه به‌طور فرضی، شتاب مانوری فضاپیما از زمان کنونی تا زمان نهایی، صفر منظور شود. به عبارت دیگر،

$$\overrightarrow{\mathrm{ZEM}}(t) = \vec{r}_f^* - \vec{r}(t_f)\big|_{\vec{a}(\xi)=\vec{0}\ \mathrm{for}\ \xi \geq t} \tag{4}$$

که در آن، $\vec{a}$ بردار شتاب کنترلی فضاپیما است. بنابر رابطهٔ اخیر و رابطه (3)، می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{\mathrm{ZEM}}(t_0) = \vec{r}_f^* - \vec{r}_0 - (t_f - t_0)\vec{v}_0 - \int_{t_0}^{t_f}(t_f - t)\vec{g}[\vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t)]\mathrm{d}t \tag{5}$$

در حالت کلی، حل صریح و دقیق رابطه (5) با فرض مدل زمین کروی غامض است و تاکنون ارائه نشده‌است. البته در حالت خاص، به طور نمونه با شتاب گرانش ثابت، بردار خطای تلاش صفر به صورت صریح بدست می‌آید [1]:

$$\overrightarrow{\mathrm{ZEM}}(t_0) = \vec{r}_f^* - \vec{r}_0 - (t_f - t_0)\vec{v}_0 - \frac{1}{2}\vec{g}(t_f - t_0)^2 \tag{6}$$

در ادامه، خطای تلاش صفر با فرض شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله در مختصات قطبی بدست می‌آید.

3- خطای تلاش صفر با فرض گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله

معادلات حرکت وسیلهٔ پروازی که به صورت جرم نقطه‌ای مدل شده‌است، در مختصات قطبی زمین مرکز و با فرض مدل کروی، به صورت روابط (7) و (8) نوشته می‌شود [2]:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = g\,,\quad g = -\frac{\mu}{r^2} \tag{7}$$

$$\frac{dh}{dt} = 0\,,\quad h = r^2\dot{\theta} = r_0^2\dot{\theta}_0 \tag{8}$$

که در آن، r اندازهٔ بردار موقعیت و θ زاویهٔ بردار موقعیت نسبت به محور مختصات مرجع اینرسی و همچنین μ ثابت گرانش زمین است. نمایش روابط (7) و (8) بر حسب ثابت h بصورت زیر نوشته می‌شود [2]:

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2} \tag{9}$$

تاکنون در مسئله فوق، حل صریح r بر حسب زمان استخراج نشده‌است. در اینجا با فرض شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله، $g = -\mu\bar{r}/r^3$، به جای مقدار دقیق شتاب گرانش، حل تحلیلی و صریح بردار خطای تلاش صفر استخراج می‌شود. لازم به ذکر است پارامتر $\bar{r}$ مقدار ثابتی فرض می‌شود که در انتهای این بخش در مورد تقریب آن بحث می‌شود.

با فرض شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله، معادلهٔ حرکت (7) و (8) به صورت رابطه (10) نوشته می‌شود:

$$\ddot{r} = -\frac{C}{r^3}\,,\quad C = -h^2 + \mu\bar{r} \tag{10}$$

انتگرال‌گیری از رابطهٔ اخیر با استفاده از $\mathrm{d}(\dot{r}^2) = 2\ddot{r}dr$ به راحتی میسر است:

$$\dot{r}^2 = A + \frac{C}{r^2} \tag{11}$$

که در آن،

$$A = \dot{r}_0^2 - \frac{C}{r_0^2} = v_0^2 - \frac{\mu\bar{r}}{r_0^2} \tag{12}$$

رابطه (11) برای حالت‌های مختلف شرایط اولیه به‌صورت (13) استخراج می‌شود:

$$\dot{r} = \begin{cases} \dot{r}_0 & , \quad C = 0 \\ \mathrm{sgn}(\dot{r})\sqrt{A + \dfrac{C}{r^2}} & , \quad C \neq 0, A \neq 0 \\ \dfrac{\mathrm{sgn}(\dot{r})\mathrm{sgn}(\dot{r}_0)B}{r} & , \quad C \neq 0, A = 0 \end{cases} \tag{13}$$

که در آن،

$$B = r_0\dot{r}_0 \tag{14}$$

توجه شود، در صورتی که $A = 0$ شود، رابطه C به صورت (15) ساده می‌شود:

$$A = 0 \Longrightarrow C = r_0^2\dot{r}_0^2 = B^2 \tag{15}$$

بنابراین به ازای حالت سوم در رابطه (13)، $\dot{r}_0$ مخالف صفر است.

لازم به ذکر است علامت $\dot{r}$، در زمان اوج و حضیض، t_p، تغییر می‌کند؛ به عبارت دیگر،

$$\mathrm{sgn}(\dot{r}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\dot{r}_0) & , \quad t_0 \leq t < t_p \\ -\mathrm{sgn}(\dot{r}_0) & , \quad t > t_p \end{cases} \tag{16}$$

به منظور محاسبه r در زمان اوج یا حضیض $(t = t_p)$ که با r_p نمایش داده

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.29.8]

می‌شود، رابطه (13) برابر صفر قرار داده می‌شود، بنابراین:

$$r_p=\sqrt{-C/A} \tag{17}$$

البته به ازای حالت اول و سوم رابطه (13) مسیر اکیداً صعودی یا نزولی است.

در ادامه، با استفاده از رابطه $\mathrm{d}t=\mathrm{d}r/\dot{r}$ و جایگذاری از رابطه (13) به ازای $\dot{r}$ برای حالت $A,C\neq 0$ می‌توان نوشت:

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}r}{\dot{r}}=\frac{\mathrm{sgn}(\dot{r})r\mathrm{d}r}{\sqrt{Ar^2+C}} \tag{18}$$

از آنجایی که در این حالت، امکان وجود نقطه اوج یا حضیض وجود دارد، بازهٔ انتگرال‌گیری به دو بازهٔ زمانی، کمتر از زمان اوج (یا حضیض) و یا بیشتر از آن تقسیم شده‌است؛ بنابراین،

$$t_1-t_0=\mathrm{sgn}(\dot{r}_0)\int_{r_0}^{r_1}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{Ar^2+C}} \quad , \qquad t\leq t_p \tag{19}$$

$$t_2-t_p=-\mathrm{sgn}(\dot{r}_0)\int_{r_p}^{r_2}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{Ar^2+C}} \quad , \qquad t>t_p \tag{20}$$

با انتگرال‌گیری از روابط (19) و (20) می‌توان نوشت:

$$t_1-t_0=\frac{1}{A}\left(\mathrm{sgn}(\dot{r}_0)\sqrt{Ar_1^2+C}-B\right) \tag{21}$$

$$t_2-t_p=\frac{-\mathrm{sgn}(\dot{r}_0)}{A}\sqrt{Ar_2^2+C} \tag{22}$$

با جایگذاری رابطه (17) به ازای $r_1=r_p$ در رابطه (21)، رابطهٔ زمان اوج (یا حضیض) حاصل می‌شود:

$$t_p=t_0-\frac{B}{A} \tag{23}$$

حال با قرار دادن زمان اوج (یا حضیض) از رابطهٔ اخیر در رابطه (22) می‌توان نوشت:

$$t_2-t_0=-\frac{1}{A}\left(\mathrm{sgn}(\dot{r}_0)\sqrt{Ar_2^2+C}+B\right) \tag{24}$$

در نتیجه، رابطهٔ زمان بر حسب موقعیت به صورت زیر بدست می‌آید:

$$t-t_0=\begin{cases}\dfrac{1}{A}\left(\mathrm{sgn}(\dot{r}_0)\sqrt{Ar^2+C}-B\right) & , \quad t\leq t_p\\ -\dfrac{1}{A}\left(\mathrm{sgn}(\dot{r}_0)\sqrt{Ar^2+C}+B\right) & , \quad t>t_p\end{cases} \tag{25}$$

رابطهٔ موقعیت بر حسب زمان با استفاده از رابطهٔ (25)، به‌صورت (26) حاصل می‌شود:

$$r=\sqrt{\frac{[B+A(t-t_0)]^2-C}{A}} \tag{26}$$

اگر از دو حالت دیگر در رابطه (13) نیز انتگرال‌گیری شود، رابطهٔ موقعیت بر حسب زمان به ازای تمام حالت‌ها در رابطهٔ مذکور، استخراج می‌شود:

$$r=\begin{cases}r_0+\dot{r}_0(t-t_0) & , \quad C=0\\ \sqrt{\dfrac{[B+A(t-t_0)]^2-C}{A}} & , \quad A,C\neq 0\\ \sqrt{r_0^2+2B(t-t_0)} & , \quad C\neq 0, A=0\end{cases} \tag{27}$$

با استفاده از روابط (8) و (27)، رابطهٔ نرخ تغییر زاویهٔ θ بر حسب زمان حاصل می‌شود:

$$\dot{\theta}=\frac{h}{r^2}=\begin{cases}\dfrac{h}{[r_0+\dot{r}_0(t-t_0)]^2} & , \quad C=0\\ \dfrac{Ah}{[B+A(t-t_0)]^2-C} & , \quad C,A\neq 0\\ \dfrac{h}{r_0^2+2B(t-t_0)} & , \quad C\neq 0, A=0\end{cases} \tag{28}$$

با انتگرال‌گیری از رابطهٔ (28)، رابطهٔ θ بر حسب زمان استخراج می‌شود:

$$\theta=\theta_0+\begin{cases}\dot{\theta}_0(t-t_0) & , \quad C=0,\dot{r}_0=0\\ \dfrac{1}{B}\left[1-\dfrac{r_0}{r_0+\dot{r}_0(t-t_0)}\right] & , \quad C=0,\dot{r}_0\neq 0\\ \dfrac{h}{2\sqrt{C}}\ln\dfrac{A(B+\sqrt{C})(t-t_0)+B^2-C}{A(B-\sqrt{C})(t-t_0)+B^2-C} & , \quad C>0,A\neq 0\\ \dfrac{h}{\sqrt{-C}}\tan^{-1}\dfrac{A\sqrt{-C}(t-t_0)}{B[B+A(t-t_0)]-C} & , \quad C<0,A\neq 0\\ \dfrac{h}{2B}\ln\left[1+\dfrac{2\dot{r}_0}{r_0}(t-t_0)\right] & , \quad C\neq 0,A=0\end{cases} \tag{29}$$

بر اساس روابط (27) و (29) به ترتیب اندازهٔ بردار موقعیت و زاویهٔ بردار موقعیت نسبت به دستگاه مختصات مرجع اینرسی بر حسب زمان بدست می‌آید.

3-1- تقریب $\bar{r}$

در مدل «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» برای پارامتر ثابت $\bar{r}$ از تقریب‌های مختلفی می‌توان استفاده کرد. ساده‌ترین تقریب، فاصلهٔ اولیه، $r=r_0$، است. در حالتی که مسیر اکیداً صعودی یا نزولی باشد، از میانگین نقطهٔ اولیه و نهایی استفاده می‌شود:

$$\bar{r}=\frac{r_0+r_f}{2} \tag{30}$$

در صورت وجود نقطهٔ اوج یا حضیض، r_p، می‌توان از میانگین وزنی نقاط اولیه، اوج (یا حضیض) و نهایی استفاده کرد:

$$\bar{r}=\frac{(r_0+r_p)(t_p-t_0)+(r_p+r_f)(t_f-t_p)}{2(t_f-t_0)} \tag{31}$$

که در آن r_p و t_p به ترتیب از روابط (17) و (23) بدست می‌آید. از آنجایی که برای تقریب r_p، r_f و t_p طبق روابط (17)، (27) و (23) به مقادیر ثابت C و A (که خود تابعی از $\bar{r}$ است) نیاز است، لذا برای تخمین اولیهٔ این ثابت‌ها از $\bar{r}=r_0$ استفاده می‌شود. بنابراین، در مجموع می‌توان تقریب (32) را به کار برد:

$$\bar{r}=\begin{cases}r_0+\dfrac{\dot{r}_0}{2}(t-t_0) & , \quad C=0\\ \dfrac{r_0+r_f}{2} & , \quad C,A\neq 0,t\leq t_p\\ \dfrac{(r_0+r_p)(t_p-t_0)+(r_p+r_f)(t_f-t_p)}{2(t_f-t_0)} & , \quad C,A\neq 0,t>t_p\\ \dfrac{r_0}{2}\left[1+\sqrt{1+2\dfrac{\dot{r}_0}{r_0}(t_f-t_0)}\right] & , \quad C\neq 0,A=0\end{cases} \tag{32}$$

که در آن،

$$r_p=-\frac{C_0}{A_0} \tag{33}$$

$$r_f=\sqrt{\frac{\left[B+A_0(t_f-t_0)\right]^2-C_0}{A_0}} \tag{34}$$

$$t_p=t_0-\frac{B}{A_0} \tag{35}$$

$$C_0=-h^2+\mu r_0 \tag{36}$$

$$A_0=\dot{r}_0^2-\frac{C_0}{r_0^2}=v_0^2-\frac{\mu r_0}{r_0^2} \tag{37}$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.29.8]

4- حل تکه‌ای خطای تلاش صفر با فرض شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله

به منظور افزایش دقت در حل تقریبیِ مسئله با فرض «مدل شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» می‌توان با استفاده از چند نقطهٔ میانی به روش تکه‌ای عمل نمود. در حل تکه‌ای ابتدا بازهٔ زمانی $[t_0\ t_f]$ به N بازهٔ زمانی $[t_{i-1}\ t_i]$ تقسیم می‌شود. در اینجا برای سادگی، طول بازه‌های زمانی یکسان فرض می‌شود؛ به عبارت دیگر،

$$\Delta t = t_i - t_{i-1} = \frac{t_f - t_0}{N}\ , i = 1,2,\dots,N \tag{38}$$

در هر بازهٔ زمانی، شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله در نظر گرفته می‌شود؛ اما در هر بازه مقدار $\bar{r}$ اصلاح می‌شود:

$$g_i = -\frac{\mu \bar{r}_{i-1}}{r^3} \tag{39}$$

با استفاده از روابط بخش 3، رابطهٔ اندازهٔ بردار موقعیت و زاویهٔ بردار موقعیت نسبت به دستگاه مختصات اینرسی در نقطهٔ پایان هر بازهٔ زمانی بدست می‌آید. البته برای این منظور و برای حل تکه‌ای نیاز به محاسبهٔ نرخ فاصله و زاویه نیز می‌باشد.

$$r_i = \begin{cases} r_{i-1} + \dot{r}_{i-1}\Delta t & , \quad C_i = 0 \\ \sqrt{\dfrac{[B_i + A_i\Delta t]^2 - C_i}{A_i}} & , \quad C_i, A_i \neq 0 \\ \sqrt{r_{i-1}^2 + 2B_i\Delta t} & , \quad C_i \neq 0, A_i = 0 \end{cases} \tag{40}$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \begin{cases} \dot{\theta}_{i-1}\Delta t & , \quad C_i, \dot{r}_{i-1} = 0 \\ \dfrac{1}{B_i}\left[1 - \dfrac{r_{i-1}}{r_{i-1} + \dot{r}_{i-1}\Delta t}\right] & , \quad C_i = 0, \dot{r}_{i-1} \neq 0 \\ \dfrac{h_i}{2\sqrt{C_i}}\ln\dfrac{A_i\left(B_i + \sqrt{C_i}\right)\Delta t + B_i^2 - C_i}{A_i\left(B_i - \sqrt{C_i}\right)\Delta t + B_i^2 - C_i} & , \quad C_i > 0, A_i \neq 0 \\ \dfrac{h_i}{\sqrt{-C_i}}\tan^{-1}\dfrac{A_i\sqrt{-C_i}\Delta t}{B_i[B_i + A_i\Delta t] - C_{io}} & , \quad C_i < 0, A_i \neq 0 \\ \dfrac{h_i}{2B_i}\ln\left(1 + \dfrac{2\dot{r}_{i-1}}{r_{i-1}}\Delta t\right) & , \quad C_i \neq 0, A_i = 0 \end{cases} \tag{41}$$

$$\dot{\theta}_i = \begin{cases} \dfrac{h_i}{[r_{i-1} + \dot{r}_{i-1}\Delta t]^2} & , \quad C_i = 0 \\ \dfrac{A_i h_i}{[B_i + A_i\Delta t]^2 - C_i} & , \quad C_i, A_i \neq 0 \\ \dfrac{h_i}{r_{i-1}^2 + 2B_i\Delta t} & , \quad C_i \neq 0, A_i = 0 \end{cases} \tag{42}$$

$$\dot{r}_i = \begin{cases} \dot{r}_{i-1} & , \quad C_i = 0 \\ \operatorname{sgn}(\dot{r}_i)\sqrt{A_i + \dfrac{C_i}{r_i^2}} & , \quad C_i, A_i \neq 0 \\ \dfrac{B_i}{r_i} & , \quad C_i \neq 0, A_i = 0 \end{cases} \tag{43}$$

که در آن،

$$h_i = r_{i-1}^2\dot{\theta}_{i-1} \tag{44}$$

$$C_i = -h_i^2 + \mu\bar{r}_{i-1} \tag{45}$$

$$A_i = \dot{r}_{i-1}^2 - \frac{C_i}{r_{i-1}^2} \tag{46}$$

$$B_i = r_{i-1}\dot{r}_{i-1} \tag{47}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، به ازای $i = 1$ ضرایب h_i، C_i، A_i و B_i بر حسب شرایط اولیه r_0، θ_0، $\dot{r}_0$ و $\dot{\theta}_0$ می‌باشد. لازم به ذکر است که در محاسبات روابط اخیر نیاز به تعیین علامت $\dot{r}$ می‌باشد. طبق رابطه (23) اگر در بازهٔ زمانی مورد نظر، نقطهٔ اوج (یا حضیض) وجود نداشته باشد، علامت $\dot{r}$ در نقطهٔ پایانی برای هر بازه، مشابه علامت نقطهٔ ابتدایی در همان بازه است. در غیر اینصورت، علامت $\dot{r}$ تغییر می‌کند.

5- حل تکه‌ای خطای تلاش صفر با فرض شتاب گرانش خطی

بردار شتاب گرانش در مرجع [12] به صورت یک رابطهٔ برداری خطی به صورت (48) فرض شده‌است:

$$\vec{g} = -\eta\vec{r} \tag{48}$$

که در آن،

$$\eta = \mu / r_0^3 \tag{49}$$

حل تحلیلی و صریح بردار موقعیت و سرعت نهایی با مدل گرانش (48) به صورت (50) و (51) نوشته می‌شود [12]:

$$\vec{r}(t_f) = \vec{r}_0\cos\left(\sqrt{\eta}t_f\right) + \frac{\vec{v}_0}{\sqrt{\eta}}\sin\left(\sqrt{\eta}t_f\right) \tag{50}$$

$$\vec{v}(t_f) = -\vec{r}_0\sqrt{\eta}\sin\left(\sqrt{\eta}t_f\right) + \vec{v}_0\cos\left(\sqrt{\eta}t_f\right) \tag{51}$$

در حالتی که هدف در حال سقوط آزاد است، موقعیت نهایی مطلوب و سرعت نهایی هدف از روابط (52) و (53) بدست می‌آید [12]:

$$\vec{r}_f^* = \vec{r}_{\mathrm{T}}(t_f) = \vec{r}_{\mathrm{T}_0}\cos\left(\sqrt{\eta_T}t_f\right) + \frac{\vec{v}_{\mathrm{T}_0}}{\sqrt{\eta_T}}\sin\left(\sqrt{\eta_T}t_f\right) \tag{52}$$

$$\vec{v}_T(t_f) = -\vec{r}_{\mathrm{T}_0}\sqrt{\eta_T}\sin\left(\sqrt{\eta_T}t_f\right) + \vec{v}_{\mathrm{T}_0}\cos\left(\sqrt{\eta_T}t_f\right) \tag{53}$$

که در آن،

$$\eta_T = \mu / r_{T_0}^3 \tag{54}$$

در ادامه به منظور افزایش دقت، نتایج حل تحلیلی مرجع [12] با روش حل تکه‌ای توسعه داده می‌شود. برای این منظور، مشابه بخش قبل، زمان نهایی به N بازهٔ زمانی کوچکتر تقسیم می‌شود و در هر بازهٔ زمانی، شتاب گرانش مطابق رابطه (48) به صورت خطی فرض می‌شود؛ به عبارت دیگر،

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1}\cos\left(\sqrt{\eta_{i-1}}\Delta t\right) + \frac{\vec{v}_{\mathrm{i-1}}}{\sqrt{\eta_{i-1}}}\sin\left(\sqrt{\eta_{i-1}}\Delta t\right) \tag{55}$$

$$\vec{v}_i = -\vec{r}_{i-1}\sqrt{\eta_{i-1}}\sin\left(\sqrt{\eta_{i-1}}\Delta t\right) + \vec{v}_{i-1}\cos\left(\sqrt{\eta_{i-1}}\Delta t\right) \tag{56}$$

که در آن، i و Δt مشابه رابطه (38) است و

$$\eta_{i-1} = \mu / r_{i-1}^3 \tag{57}$$

بنابراین با حل روابط (55) و (56) تا تکرار $i = N$، بردار موقعیت نهایی بدست می‌آید.

6- بار محاسباتی

بار محاسباتی عموماً با شمارش اعمال اصلی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) با واحد فلاپس محاسبه می‌شود. بار محاسباتی عملیات‌های دیگر ریاضی مانند جذر، توابع مثلثاتی، لگاریتم و غیره نسبت به بار محاسباتی اعمال اصلی سنجیده می‌شود، که بر حسب نوع پردازشگر متفاوت است. در اینجا، بار محاسباتی توابع مثلثاتی با S، بار محاسباتی جذر با Q و بار محاسباتی لگاریتم با L نمایش داده می‌شود. بر این اساس، تقریب بار محاسباتی رابطهٔ خطای تلاش صفر در روش تکه‌ای با مدل عکس مکعب فاصله، بر حسب تعداد نقاط میانی ($n = N - 1$) در حالت هدف ثابت و با فرض معلوم بودن موقعیت نهایی هدف برای تقریب $\bar{r} = r_0$ و تقریب رابطه (32) به ترتیب به صورت (58) و (59) بدست می‌آید:

$$\text{بار محاسباتی (فلاپس)} \simeq 58 + 64n + (4 + 6n)Q + 2(n + 1)L + 4S \tag{58}$$

$$\text{بار محاسباتی (فلاپس)} \simeq 72 + 78n + (5 + 7n)Q + 2(n + 1)L + 4S \tag{59}$$

در صورت نیاز به محاسبهٔ موقعیت نهایی هدف در حال سقوط آزاد از همین روش، بار محاسباتی دو برابر روابط اخیر می‌شود. در اینجا، به منظور مقایسهٔ بار محاسباتیِ روش فوق‌الذکر با روش خطی‌سازی شتاب گرانش [6،8،9] و روش شتاب گرانش خطی [12]، بار محاسباتی دو روش اخیر به صورت تقریبی محاسبه شده‌است، که به ترتیب عبارتند از:

بار محاسباتی $\simeq 140 + Q$ (فلاپس) (60)

بار محاسباتی $\simeq 25 + 46n + 2(n+1)S + (2n+1)Q$ (فلاپس) (61)

لازم به ذکر است که بار محاسباتی روش شتاب گرانش خطی نیز برای هدف در حال سقوط آزاد در حالتی که موقعیت نهایی آن مشخص نباشد، دو برابر رابطه (61) می‌شود.

با توجه به اینکه بار محاسباتی Q، L و S، به نوع پردازشگر بستگی دارد، مقدار بار محاسباتی روش‌های فوق، بر حسب نوع پردازشگر متفاوت خواهد بود. با فرض آن‌که بار محاسباتی Q، L و S، برابر یک فلاپس باشد، رابطه (58) تا (61) به ترتیب به صورت (62) تا (65) ساده می‌شود:

بار محاسباتی $\simeq 68 + 72n$ (فلاپس) (62)

بار محاسباتی $\simeq 83 + 87n$ (فلاپس) (63)

بار محاسباتی $\simeq 141$ (فلاپس) (64)

بار محاسباتی $\simeq 28 + 50n$ (فلاپس) (65)

بار محاسباتی سه روش مدنظر بر حسب تعداد نقاط میانی در شکل 1 و 2 به ترتیب برای موقعیت نهایی معلوم (هدف ثابت) و مجهول (هدف در حال سقوط آزاد) ترسیم شده‌است. با توجه به شکل 1، بار محاسباتی روش «عکس مکعب فاصله» نسبت به روش شتاب گرانش خطی کمی بیشتر است؛ اما در مجموع بار محاسباتی هر دو روش حتی با در نظر گرفتن ده نقطهٔ میانی قابل توجه نیست و انتخاب روش با توجه به دقت محاسبه تعیین می‌شود که در بخش بعد به آن پرداخته شده‌است.

همانطور که در شکل 2 ملاحظه می‌شود، بار محاسباتی «روش عکس مکعب فاصله» در حالتی که موقعیت نهایی هدف در هر لحظه دردسترس نباشد (نیاز به محاسبه داشته باشد)، نسبت به روش شتاب گرانش خطی

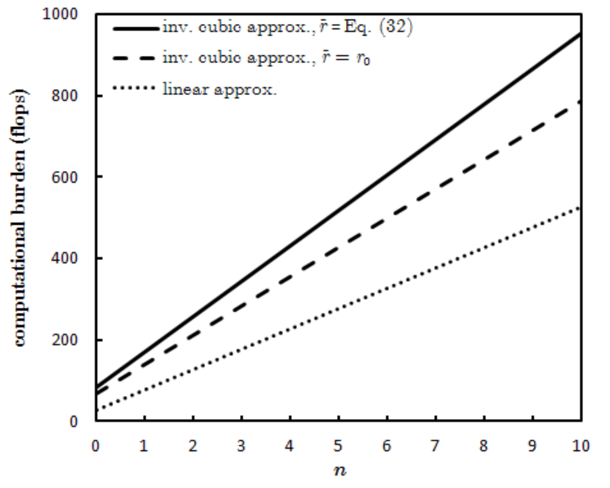

Fig. 1 Computational burden of inverse cubic and linear gravity approximations vs. the number of middle points for stationary target ($S = Q = L = 1$)

شکل 1 بار محاسباتی تقریب شتاب گرانش عکس مکعب فاصله و شتاب گرانش خطی بر حسب تعداد نقاط میانی برای هدف ثابت ($S = Q = L = 1$)

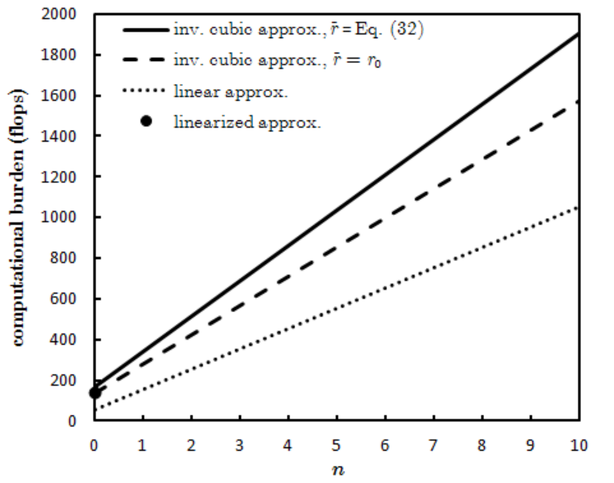

Fig. 2 Computational burden of inverse cubic, linearized and linear gravity approximations vs. the number of middle points for a free-falling target ($S = Q = L = 1$)

شکل 2 بار محاسباتی روش شتاب گرانش عکس مکعب فاصله، خطی‌سازی و خطی بر حسب تعداد نقاط میانی برای هدف در حال سقوط آزاد ($S = Q = L = 1$)

تا حدودی بیشتر است. از آنجایی که حل تکه‌ای روش خطی‌سازی (پیوست الف) با روش حاضر میسر نمی‌باشد، لذا بار محاسباتی این روش در شکل 2 تنها در یک نقطه با دایره توپر نمایش داده شده‌است. با افزایش تعداد نقاط میانی، تفاوت بار محاسباتی به‌صورت خطی افزایش می‌یابد؛ اما در مجموع، بار محاسباتی روش‌های مذکور حتی با در نظر گرفتن ده نقطهٔ میانی نیز قابل توجه نیست. لازم به ذکر است که برتری روش را «دقت محاسبه به ازای بار محاسباتی یکسان» تعیین می‌کند و در بخش بعد به آن پرداخته می‌شود.

7- نتایج و بحث

به منظور مقایسهٔ دقت و بار محاسباتی سه روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله»، «شتاب گرانش خطی» و «خطی‌سازی شتاب گرانش» از کد شبیه‌سازی پرواز با فرض جرم نقطه‌ای در مدل زمین کروی استفاده می‌شود. در نتایج شبیه‌سازی، هدف به دو صورت ثابت یا در حالت سقوط آزاد فرض شده‌است. در حالت سقوط آزاد فرض شده‌است، هدف به صورت یک جرم نقطه‌ای است، که تنها تحت تأثیر شتاب گرانش زمین در مسیر حداقل انرژی برای رسیدن به موقعیت اولیهٔ وسیلهٔ رهگیر حرکت می‌کند. برای هر دو حالت هدف ثابت و در حال سقوط آزاد، فرض شده‌است که رهگیر در مدار حداقل انرژی به هدف اصابت می‌کند و زمان نهایی بر این اساس به‌صورت عددی محاسبه شده‌است. با این شرایط، رهگیر به هدف اصابت می‌کند و به عبارتی خطای تلاش صفر، صفر است؛ اما بر اساس روابط تقریبی سه روش مذکور، خطایی ایجاد می‌شود. لذا این خطاها با یکدیگر مقایسه شده‌است. البته شرایط اولیه مفروض سبب می‌شود که روش خطی‌سازی منطقاً از لحاظ دقت در شرایط مطلوبتری نسبت به اعمال خطای اولیهٔ زیاد قرار گیرد.

لازم به ذکر است که در روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله»، معادلات حرکت در مختصات مطلق حل شده‌است، لذا برای کاربردهای هدف ثابت و هدف در حالت سقوط آزاد (یا با پروفیل آتی مشخص) قابل استفاده است. بعلاوه، استفاده از مختصات مطلق اعمال روش تکه‌ای خطی را میسر ساخته است.

در ادامه، خطای سه روش مذکور برای اهداف ثابت و هدف در حال سقوط آزاد در زوایای برد مختلف بررسی شده است. نتایج مذکور به ازای

فاصلهٔ اولیهٔ 6400 کیلومتری رهگیر و هدف از مرکز زمین لحاظ شده‌است.

7-1- هدف ثابت

در اینجا فرض می‌شود که هدف ثابت است. در این حالت، تنها دقت محاسبهٔ دو روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» و «شتاب گرانش خطی» با اعمال روش حل تکه‌ای مقایسه می‌شود. البته همانطور که اشاره شد، روش خطی‌سازی مراجع [9،8،6] در فرمولاسیون حاضر برای اهداف ثابت قابل استفاده نیست.

خطای محاسبه در خطای تلاش صفر به ازای زوایای برد 10، 60 و 120 درجه در شکل 3 ترسیم شده است. همانطور که از شکل 3 ملاحظه می‌شود، با افزایش تعداد نقاط میانی، دقت حل برای هر دو روش بهبود می‌یابد؛ و دقت روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» به ازای هر دو تقریب $\bar{r}$ خطای کمتری دارد. هر چند بر اساس شکل 1 بار محاسباتی روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» به ازای تعداد نقاط میانی یکسان بیشتر است، با این وجود دقت روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» نسبت به روش «شتاب گرانش خطی» به ازای بار محاسباتی یکسان نیز بیشتر است. به‌طور نمونه، به ازای بار محاسباتی حدود 350 فلاپس که به ترتیب متناسب با تعداد نقاط میانی 3، 4 و 6 برای روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» با تقریب $\bar{r}$ از رابطه (32) و $\bar{r} = r_0$ و «شتاب گرانش خطی» است، خطای محاسبه برای زاویهٔ برد 60 درجه در این روش‌ها به ترتیب حدود 23، 384 و 741 کیلومتر است.

در شکل 4، درصد خطای هر روش نسبت به برد بر حسب زاویهٔ برد برای تعداد نقاط میانی $n = 0, 5, 10$ ترسیم شده‌است. در ابتدا مقایسه روش‌ها به ازای $n = 0$ (بدون نقطه میانی) که در شکل 4(a) نمایش داده شده‌است، مورد بحث قرار گرفته است. همانطور که مشاهده می‌شود، در این حالت روش «شتاب گرانش خطی» تا زاویهٔ برد حدود 125 و 140 درجه به ترتیب نسبت به روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» با تقریب $\bar{r}$ از رابطه (32) و تقریب $\bar{r} = r_0$ دقت کمتری دارد. توجه شود که در این حالت بار محاسباتی روش‌های مختلف با توجه به شکل 1 تقریباً یکسان و بسیار ناچیز است، ضمن آن‌که دقت روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» به ازای هر دو تقریب $\bar{r}$ تا زاویهٔ برد حدود 100 درجه بقدری بهتر از روش «شتاب گرانش خطی» است که افزایش بسیار ناچیز بار محاسباتی این روش قابل اعتنا نیست. حال مقایسه روش‌ها با اعمال نقاط میانی صورت می‌پذیرد. همانطور که از شکل 4(b) و 4(c) ملاحظه می‌شود، برای تعداد نقاط میانی 5 و 10 خطای روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» به ازای تقریب $\bar{r}$ از رابطه (32) برای زوایای برد مفروض، بسیار کمتر از دو روش دیگر است و به ازای تعداد نقاط میانی بیشتر از 5، درصد خطای این روش صفر است.

در ادامه، سه روش تقریبی مورد مطالعه به ازای یک بار محاسباتی یکسان مقایسه می‌شود. برای این منظور، به ازای هر فاصلهٔ خطای نهایی معین، حداکثر برد قابل استفاده تعیین می‌شود. نتایج بدست آمده به صورت شکل 5 نمایش داده شده‌است که در آن بار محاسباتی 500 فلاپس منظور شده‌است. لازم به ذکر است که بار محاسباتی 500 فلاپس در روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» با تقریب $\bar{r}$ از رابطه (32) و $\bar{r} = r_0$ و «شتاب گرانش خطی» به ترتیب متناظر با 5، 6 و 10 نقطهٔ میانی است. با توجه به این شکل، حداکثر زاویهٔ برد قابل قبول برای روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» با تقریب $\bar{r}$ از رابطه (32) و $\bar{r} = r_0$ بیشتر از روش «شتاب گرانش خطی» است.

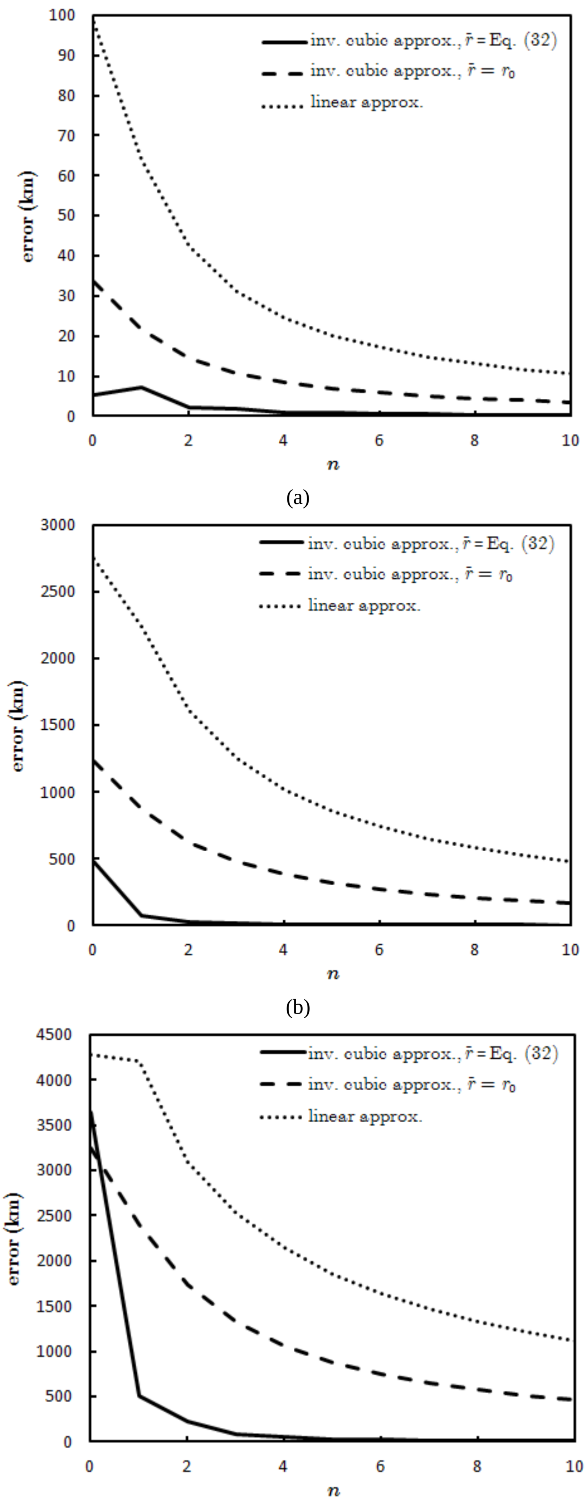

Fig. 3 Range errors vs. the number of middle points of inverse cubic and linear gravity approximations for stationary targets, a) range angle=10 deg, b) range angle=60 deg, and c) range angle=120 deg

شکل 3 خطای برد بر حسب تعداد نقاط میانی برای دو روش تقریب شتاب گرانش خطی و عکس مکعب فاصله برای اهداف ثابت، a) زاویهٔ برد 10 درجه، b) زاویهٔ برد 60 درجه و c) زاویهٔ برد 120 درجه

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.29.8]

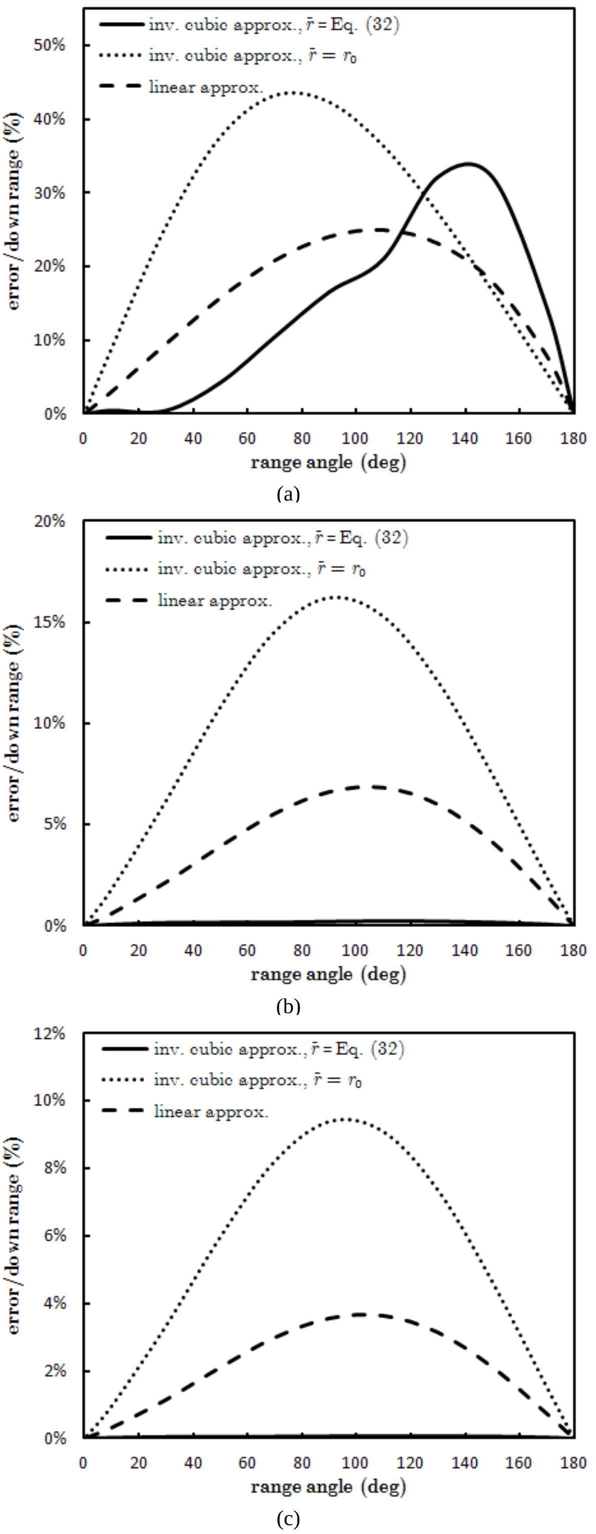

Fig. 4 Error percentage of inverse cubic and linear gravity approximates vs. range angle for stationary targets, a) $n = 0$, b) $n = 5$, and c) $n = 10$

شکل 4 درصد خطا به برد برای تقریب شتاب گرانش خطی و عکس مکعب فاصله بر حسب زاویهٔ برد برای اهداف ثابت، a) $n = 0$، b) $n = 5$ و c) $n = 10$

تاکنون مقایسهٔ سه روش تقریبی مورد مطالعه تنها برای مدار حداقل انرژی بررسی شد. در شکل 6 تأثیر انحراف از مدار حداقل انرژی بررسی می‌شود. در این شکل، حداکثر زاویهٔ برد قابل قبول به ازای بار محاسباتی حدود 500 فلاپس و خطای 5 کیلومتر بر حسب «نسبت زمان نهایی به زمان نهایی مدار حداقل انرژی» ترسیم شده‌است. لازم به ذکر است که زمان نهایی مدار حداقل انرژی با t_f^* نمایش داده شده و نمودار به ازای شرایط اولیهٔ مفروض در ابتدای بخش بحث و نتایج ترسیم شده‌است. همانطور که از شکل 6 ملاحظه می‌شود، نتایج مقایسهٔ بدست آمده برای انحراف نسبی از مدار حداقل انرژی نیز قابل تعمیم است.

بنابراین در مجموع می‌توان این استنتاج را نمود که روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» نسبت به روش «شتاب گرانش خطی» برای اهداف ثابت از دقت بالاتری، به ازای بار محاسباتی نسبتاً یکسان، برخوردار است، که این موضوع به ازای تقریب $\bar{r}$ از رابطه (32) بسیار قابل توجه‌تر از تقریب $\bar{r} = r_0$ است.

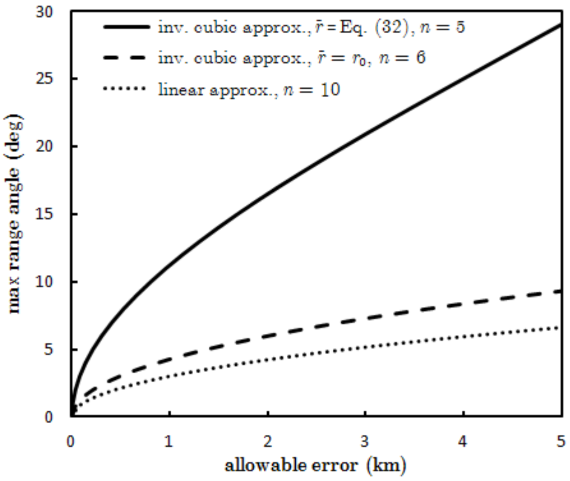

Fig. 5 Comparison of maximum range angle vs. allowable error for a computational burden of 500 flops for three approximate solutions

شکل 5 مقایسه حداکثر زاویهٔ برد بر حسب خطای مجاز به ازای بار محاسباتی 500 فلاپس برای سه روش حل تقریبی

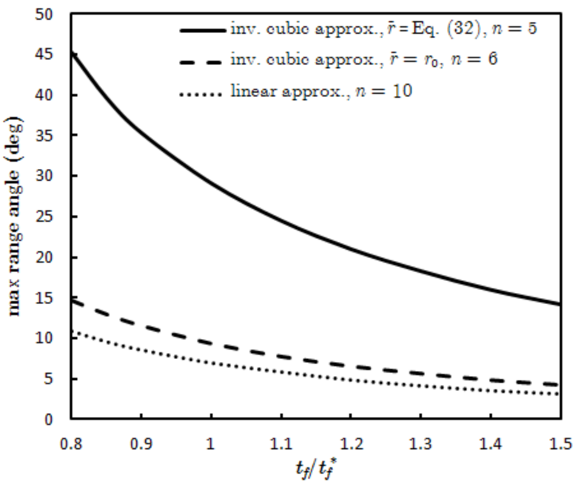

Fig. 6 Comparison of maximum range angle vs. the ratio of the final time to the final time of minimum energy orbit for a computational burden of 500 flops and an allowable error of 5 km for three approximate solutions

شکل 6 مقایسه حداکثر زاویهٔ برد بر حسب «نسبت زمان نهایی به زمان نهایی مسیر حداقل انرژی» به ازای بار محاسباتی 500 فلاپس و خطای نهایی مجاز 5 کیلومتر برای سه روش حل تقریبی

2-7- هدف در حال سقوط آزاد

در اینجا فرض می‌شود که هدف تنها تحت شتاب گرانش زمین در حال سقوط آزاد است. در این حالت، دقت محاسبهٔ روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» و «شتاب گرانش خطی» با اعمال روش حل تکه‌ای و «خطی‌سازی شتاب گرانش» (پیوست الف) مقایسه می‌شود. در روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» و روش «شتاب گرانش خطی» در صورتی که زمان نهایی معلوم فرض شود، موقعیت نهایی هدف قابل محاسبه است. اگر فرض شود موقعیت نهایی هدف به صورت دقیق محاسبه شود (توسط سایت زمینی)، می‌توان مانند حالت هدف ثابت به مسئله پرداخت. در غیراینصورت، ممکن است از روش‌های تقریبی برای محاسبه موقعیت نهایی هدف استفاده شود. لذا در این حالت، خطای نهایی برابر جمع برداری دو خطای محاسبهٔ موقعیت نهایی رهگیر و هدف است. در مقایسهٔ حاضر تنها نتایج بررسی حالت دوم (هدف در حال سقوط آزاد با موقعیت نهایی نامعلوم) مورد بحث قرار گرفته است؛ چرا که نتایج برای حالت اول، مشابه هدف ثابت است. البته روش خطی‌سازی بر مبنای مختصات نسبی است و به موقعیت نهایی هدف نیازی ندارد. لازم به ذکر است درصد خطای برد نشان داده شده به ازای فاصلهٔ اولیهٔ 6400 کیلومتری رهگیر و هدف از مرکز زمین و مدار حداقل انرژی است که در ابتدای بخش نتایج و بحث ذکر شده است.

در شکل 7، درصد خطای هر روش نسبت به برد بر حسب زاویهٔ برد برای نقاط میانی $n = 0, 5, 10$ برای هدف در حال سقوط آزاد ترسیم شده‌است. همانطور که ملاحظه می‌شود، در حالت بدون نقطهٔ میانی که در شکل 7(a) نمایش داده شده‌است، روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» به ازای هر دو تقریب $\bar{r}$ در کلیه زوایای برد از دو روش دیگر دقت بهتری دارد. ضمن آن‌که در این حالت با توجه به شکل 2 بار محاسباتی تمامی روش‌های در نظر گرفته شده کم و نزدیک به هم می‌باشد. هر چند در این حالت دقت روش «شتاب گرانش خطی» کمتر از روش «خطی‌سازی» است، اما می‌توان دقت روش «شتاب گرانش خطی» را با حل تکه‌ای افزایش داد.

همانطور که قبلاً ذکر شد، حل تکه‌ای با فرمولاسیون حاضر برای روش «خطی‌سازی» قابل پیاده‌سازی نیست؛ لذا در شکل 7(b) و 7(c)، مقایسه روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» و «شتاب گرانش خطی» انجام شده‌است. در این حالت‌ها نیز روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» نسبت به روش «شتاب گرانش خطی» از دقت بهتری برخوردار است. به عنوان مثال به ازای بار محاسباتی حدود 1000 فلاپس مطابق شکل 2، حداکثر درصد خطا در زاویهٔ برد مفروض در روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» با 5 نقطهٔ میانی به ازای تقریب $\bar{r}$ از رابطه (32) برابر ٪0.5 و در روش «شتاب گرانش خطی» با 10 نقطهٔ میانی برابر ٪10 است.

بنابراین در مجموع می‌توان گفت که روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» نسبت به دو روش «شتاب گرانش خطی» و «خطی‌سازی» برای هدف در حال سقوط آزاد به ازای بار محاسباتی یکسان، از دقت بالاتری برخوردار است. همچنین دقت روش حاضر را می‌توان با افزایش تعداد نقاط میانی بهبود بخشید در حالی که اعمال حل تکه‌ای بر روی روش خطی‌سازی با فرمولاسیون حاضر میسر نیست.

برای تجسم بهتر زاویای برد اولیه در شکل 7، نمونه‌ای از زاویای برد طی شده توسط وسیله رهگیر در جدول 1 برای شرایط مفروض آورده شده است. به عنوان نمونه، بر اساس شرایط اولیهٔ در نظر گرفته شده، در حالتی که زاویهٔ برد اولیه رهگیر و هدف 30 درجه است، هدف 25.9 درجه و رهگیر 4.1 درجه را در زمان یکسان تا محل برخورد طی می‌کنند.

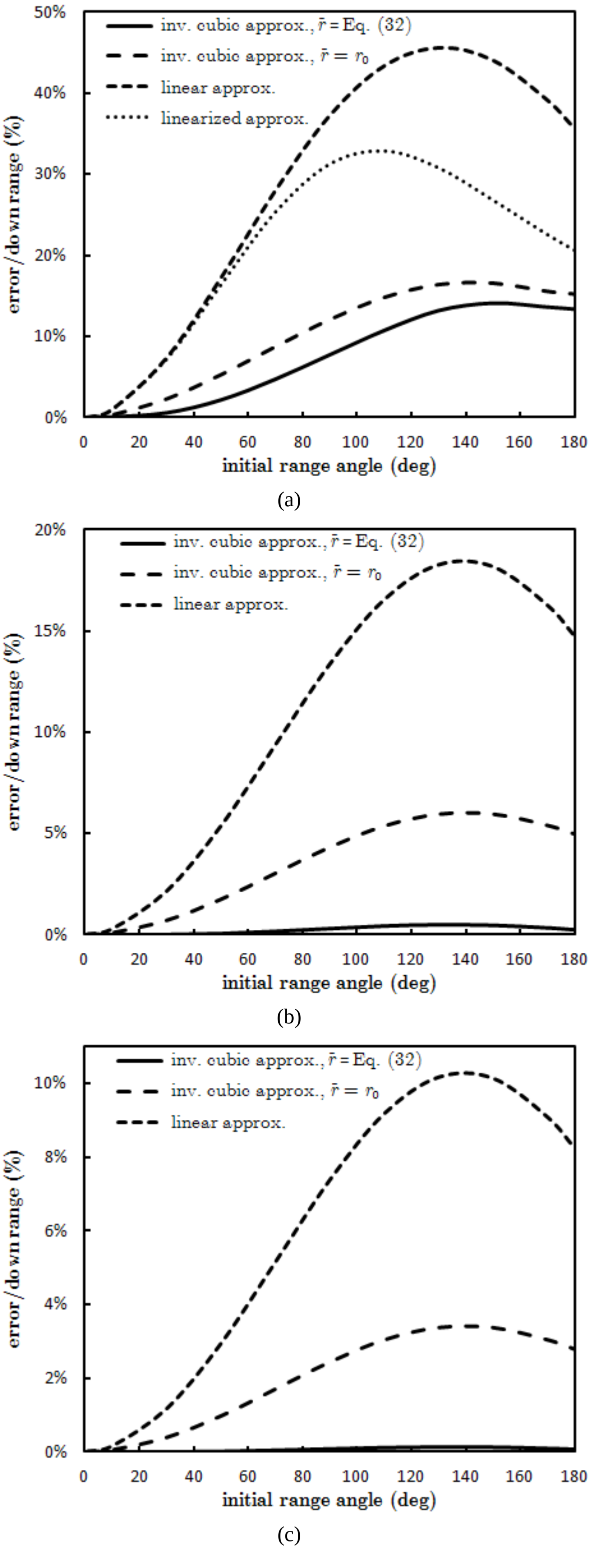

Fig. 7 Error percentage of inverse cubic, linear gravity and linearized approximations vs. range angle for free-falling targets, a) $n = 0$, b) $n = 5$, and c) $n = 10$

شکل 7 درصد خطا به برد برای تقریب شتاب گرانش خطی، عکس مکعب فاصله و خطی‌سازی بر حسب زوایهٔ برد برای اهداف در حال سقوط آزاد، a) $n = 0$، b) $n = 5$ و c) $n = 10$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.29.8]

جدول 1 زاویهٔ برد طی‌شده برحسب زاویهٔ برد اولیه برای شرایط اولیهٔ مفروض

Table 1 Traveled range angle vs. initial range angle for prescribed initial condition

زاویهٔ برد اولیه (درجه)	زاویهٔ برد (درجه)
10	0.7
30	4.1
50	8.7
70	13.9
90	19.2
110	24.6
130	29.9
150	34.9
170	39.5
180	41.7

البته در عمل، خطای الگوریتم هدایت و کنترل توسط هدایت پایانی جبران می‌شود. هر چه این خطا کمتر باشد، انرژی مورد نیاز برای رهگیری پایانی کمتر خواهد بود. به طور نمونه، می‌توان از هدایت ترکیبی مرجع [13] نام برد.

8- نتیجه‌گیری

در این مقاله، حل تقریبی بردار خطای تلاش صفر در مدل زمین کروی در مختصات مطلق ارائه شده‌است. در این روش، شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله به‌جای مقدار دقیق شتاب گرانش در مدل زمین کروی که متناسب با عکس مجذور فاصله است، فرض شده‌است. با فرض مذکور، معادلات حرکت مطلق در مختصات قطبی به صورت تحلیلی حل شده‌است. حل مذکور، بر خلاف مدل زمین کروی، منجر به یک رابطهٔ صریح بر حسب شرایط اولیه و زمان پرواز می‌شود. بعلاوه به منظور افزایش دقت، با تقسیم کل زمان پرواز به چند بازهٔ زمانی، حل تکه‌ای برای مدل «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» و همچنین مدل «شتاب گرانش خطی» استخراج شده‌است. دقت و بار محاسباتی دو روش مذکور به ازای تعداد نقاط میانی بدست آمده و با روش «خطی‌سازی شتاب گرانش در مختصات نسبی» مقایسه شده‌است. همانگونه که انتظار می‌رفت اعمال روش حل تکه‌ای سبب افزایش دقت می‌شود. با افزایش تعداد نقاط میانی، دقت نهایی افزایش می‌یابد. نتایج شبیه‌سازی عددی و محاسبهٔ بار محاسباتی نشان می‌دهد که روش «شتاب گرانش متناسب با عکس مکعب فاصله» به ازای بار محاسباتی یکسان، برتری قابل توجه‌ای نسبت به روش «شتاب گرانش خطی» و همچنین روش «خطی‌سازی» دارد.

9- پیوست الف – روش خطی‌سازی

در این روش، معادلات حرکت نسبی حول یک نقطه معلوم (موقعیت فعلی فضاپیما، موقعیت فعلی هدف، میانگین موقعیت فعلی جسم و هدف، موقعیت نهایی هدف یا میانگین سه نقطه مذکور [9]) خطی‌سازی شده‌است و بر این اساس رابطهٔ تقریبی و صریح بردار خطای تلاش صفر بدست آمده‌است [9،8،6]:

$$\overline{\mathrm{ZEM}} = F_1(t_{\mathrm{go}})(\vec{r}_{T_0} - \vec{r}_0) + F_2(t_{\mathrm{go}})(\vec{v}_{T_0} - \vec{v}_0) \tag{66}$$

که در آن، t_{go} زمان باقیمانده تا زمان نهایی ($t_{\mathrm{go}} = t_f - t$)، $\vec{r}_{T_0}$ و $\vec{v}_{T_0}$ به ترتیب، بردار موقعیت و سرعت اولیهٔ هدف است. همچنین توابع F_1 و F_2 به صورت (67) و (68) استخراج می‌شود [9،8،6]:

$$F_1(t_{\mathrm{go}}) = I + \frac{1}{2!}Et_{\mathrm{go}}^2 + \cdots + \frac{1}{(2n_{\max})!}E^{n_{\max}}t_{\mathrm{go}}^{2n_{\max}} \tag{67}$$

$$F_2(t_{\mathrm{go}}) = t_{\mathrm{go}}I + \frac{1}{3!}Et_{\mathrm{go}}^3 + \cdots + \frac{1}{(2n_{\max}+1)!}E^{n_{\max}}t_{\mathrm{go}}^{(2n_{\max}+1)} \tag{68}$$

که در آن، $E = \partial\vec{g}/\partial(\vec{r}_T - \vec{r})$ است که برای محاسبهٔ آن، دو رابطهٔ تقریبی (69) و (70) به ترتیب در مراجع [9،8،6] در مدل زمین کروی پیشنهاد شده‌است:

$$E = \left[E_M I + \frac{E_T - E_M}{(\vec{r}_{T_0} - \vec{r}_0)^{\mathrm{T}}\vec{r}_{T_0}}\vec{r}_{T_0}\vec{r}_{T_0}^{\mathrm{T}}\right], E_M = -\frac{\mu}{r_0^3}, E_T = -\frac{\mu}{r_{T_0}^3} \tag{69}$$

$$E = -\frac{\mu}{R_0^3}\left[I - 3\frac{\vec{R}_0\vec{R}_0^{\mathrm{T}}}{R_0^2}\right] \tag{70}$$

که در آن، $\vec{R}_0$ نقطه‌ای است که خطی‌سازی حول آن انجام شده‌است. در مرجع [9،8]، نقاط (71) تا (75) برای خطی‌سازی پیشنهاد شده‌است:

$$\vec{R}_0 = \vec{r}_0 \tag{71}$$

$$\vec{R}_0 = \vec{r}_{T_0} \tag{72}$$

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{2}(\vec{r}_0 + \vec{r}_{T_0}) \tag{73}$$

$$\vec{R}_0 = \vec{r}_f^* \tag{74}$$

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{3}(\vec{r}_0 + \vec{r}_{T_0} + \vec{r}_f^*) \tag{75}$$

در شبیه‌سازی‌های بخش قبل در مقاله حاضر، از رابطه (75) که نتایج بهتری نسبت به روابط (71-74) دارد، برای خطی‌سازی استفاده شده‌است.

10- مراجع

[1] P. Zarchan, *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 6th Edition, pp. 299-324, AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 239, AIAA, Reston, USA, 2012.

[2] G. M. Siouris, *Missile Guidance and Control Systems*, pp. 365-519, New York: Springer-Verlag, 2004.

[3] R. H. Battin, *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, Revised Edition, pp. 108-123, AIAA Education Series, USA 1999.

[4] B. Newman, Spacecraft intercept guidance using zero effort miss steering, *in Proceeding of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Washington, USA, pp. 1707–1716, 1993.

[5] M. A. Massoumnia, Optimal midcourse guidance law for fixed-interval propulsive maneuvers, *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 3, pp. 465-470, 1995.

[6] B. Newman, Strategic intercept midcourse guidance using modified zero effort miss steering, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No.1, pp. 107-112, 1996.

[7] Z. Liwei, J. Wuxing, Zero effort miss formulation for longer range targeting, *in Proceeding of the 26th Chinese Control Conference*, Zhangjiajie, Hunan, China, pp. 26-31, 2007. (in Chinese)

[8] A. R. Deihoul, M. A. Massoumnia, A near optimal midcourse guidance law based on spherical gravity, *Scientia Iranica*, Vol. 10, No. 4, pp. 436-442, 2003.

[9] A. R. Deihoul, *Anti Ballistic optimal midcourse guidance law*, PhD Thesis, Sharif Univercity of Technology, Tehran, Iran, 2003. (in Persian فارسی)

[10] Z. Liwei, J. Wuxing, A near optimal midcourse guidance law for exoatmospheric interceptor, *in Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*, Zhangjiajie, Hunan, China, pp. 502-506, 2007. (in Chinese)

[11] S. H. Jalali-Naini, *Generalization of zero-effort miss equations in atmospheric guidance laws with application to midcourse flight*, PhD Thesis, Sharif Univercity of Technology, Tehran, Iran, 2008. (in Persian فارسی)

[12] L.G. Li, W.X. Jing, C.S. Gao, Design of midcourse trajectory for tactical ballistic missile intercept on the basis of zero effort miss,

Exoatmospheric Interception, *in The 10th Iranian Aerospace Society Conference*, Tarbiat Modarres University, Tehran, Iran, 2011. (in Persian فارسی)

Applied Mechanics and Materials, Vols. 397-400, pp. 536-545, 2013.

[13] H. Nobahari, S. H. Mousavi-Nejad, A Combination of Lambert Guidance, Generalized Explicit Guidance and Pulsed Guidance for