



توسعه روش المان محدود طیفی تصادفی مرتبه بالا برای تحلیل عدم قطعیت‌های محیط‌های پیوسته دوبعدی

پویا زکیان¹، ناصر خاجی^{2*}

1- دانشجوی دکترا، مهندسی زلزله، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی زلزله، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی 14115-397، nkhaji@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 29 اسفند 1394

پذیرش: 01 خرداد 1395

ارائه در سایت: 23 تیر 1395

کلید واژگان:

المان محدود طیفی

مکانیک تصادفی

چندجمله‌ای‌های آشوبی

بسط کارهیونز لو

تابع درون‌یابی لوباتو

چکیده

وجود عدم قطعیت مشخصات کمی یک سامانه (مانند بارگذاری یا ضریب ارتجاعی یک سازه)، امری اجتناب‌ناپذیر بوده و اثرات آن همواره مورد توجه مهندسين بوده است. در این میان، روش‌های عددی نقش به‌سزایی در مکانیک محاسباتی تصادفی دارند، به‌خصوص برای مسائل کاربردی که حل تحلیلی ندارند. در این مقاله به توسعه المان‌های طیفی مرتبه بالای خانواده لوباتو در روش المان محدود طیفی تصادفی برای تحلیل اتفاقی محیط‌های پیوسته دوبعدی و بررسی عدم قطعیت مصالح پرداخته شده است. اثر شبکه و مرتبه تابع درون‌یابی در پاسخ این سازه‌ها مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است. علاوه بر این معادله انتگرالی فردهولم ناشی از بسط کارهیونز لو توسط روش یادشده حل و اثر مرتبه المان و شبکه در آن‌ها نیز دیده شده است. روش یادشده نیازمند تعداد المان کمتری نسبت به روش المان محدود تصادفی استاندارد بوده و به‌ویژه در مسائل دینامیکی دارای دقت مناسب و ماتریس جرم قطری است. همچنین به‌کارگیری این المان‌های طیفی به همراه بسط کارهیونز لو و چندجمله‌ای‌های آشوبی، منجر به تسریع فرایند محاسبه شده که این امر مشمول حل عددی معادله انتگرالی فردهولم نیز می‌شود. در این پژوهش نمونه‌های مبنای الاستواستاتیکی و الاستودینامیکی تحلیل شده که به بررسی دقت این روش و تأثیر پارامترهای مورد بررسی می‌پردازد. نتایج حاکی از نقش المان‌های مرتبه بالا در سرعت، دقت و کارایی تحلیل دینامیکی و استاتیکی محیط‌های پیوسته است.

Development of higher-order stochastic spectral finite element method for uncertainty analysis of 2D continua

Pooya Zakian, Naser Khaji*

Faculty of Civil and Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

* P.O.B. 14115-397 Tehran, Iran, nkhaji@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 19 March 2016
Accepted 21 May 2016
Available Online 13 July 2016

Keywords:
Spectral finite element
Stochastic mechanics
Polynomial chaos
Karhunen Loève expansion
Lobatto interpolation function

ABSTRACT

Uncertainty inherently exists in quantity of a system's parameters (e.g., loading or elastic modulus of a structure), and thus its effects have always been considered as an important issue for engineers. Meanwhile, numerical methods play a significant role in stochastic computational mechanics, particularly for the problems without analytical solutions. In this article, spectral finite element method is utilized for stochastic spectral finite element analysis of 2D continua considering material uncertainties. Here, Lobatto family of higher order spectral elements is extended, and then influence of mesh configuration and order of interpolation functions are evaluated. Furthermore, Fredholm integral equation due to Karhunen Loève expansion is numerically solved through spectral finite element method such that different meshes and interpolation functions' orders are also chosen for comparison and assessment of numerical solutions are solved for this equation. This method needs fewer elements compared to the classic finite element method, and it is specifically useful in dynamic analysis as it supplies desirable accuracy by having diagonal mass matrix. Also, these spectral elements accelerate the computation process along with Karhunen Loève and polynomial chaos expansions involving numerical solution of Fredholm integral equation. This research examines elastostatic and elastodynamic benchmark problems to demonstrate the effects of the undertaken parameters on accuracy of the stochastic analysis. Moreover, results demonstrate the effects of higher-order spectral elements on speed, accuracy and efficiency of static and dynamic analysis of continua.

1- مقدمه

مقیاس شده است. روش‌های عددی در مکانیک محاسباتی تصادفی جایگاه وسیع‌تری پیدا کرده‌اند. روش المان محدود تصادفی از میان روش‌های عددی موجود یکی از روش‌های قوی و پرکاربرد است که امروزه توانسته مخاطبان بسیاری پیدا کند. این روش برای کمی‌سازی عدم قطعیت یک مسئله به‌کار می‌رود، که شامل مشخصاتی چون مصالح تصادفی، بارگذاری تصادفی و غیره

با توجه به تأثیر عدم قطعیت در سامانه‌های مهندسی، اهمیت تحلیل قابلیت اعتماد و کمی‌سازی عدم قطعیت بر کسی پوشیده نیست. پیشرفت قابل توجه رایانه‌ها در دهه اخیر منجر به مدل‌سازی‌های نزدیک به واقعیت و بزرگ

Please cite this article using:

P. Zakian, N. Khaji, Development of higher-order stochastic spectral finite element method for uncertainty analysis of 2D continua, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp. 51-60, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

P. Zakian, N. Khaji, Development of higher-order stochastic spectral finite element method for uncertainty analysis of 2D continua, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp. 51-60, 2016 (in Persian)

2- روش المان محدود طیفی تصادفی

1-1- تعاریف اولیه

روش طیفی ابتدا در دینامیک سیالات محاسباتی⁹ توسط پترا [10] ارائه شد و پیشرفت‌های بسیاری در ترکیب با المان محدود استاندارد داشته که منجر به روش المان محدود طیفی [11-13] شده است. المان‌های محدود طیفی اساساً برای مسائل دینامیکی پیشنهاد شده و دارای همگرایی و دقت مناسب در این مسائل است.

این المان‌ها نوعی المان مرتبه بالا هستند که توزیع مقارن نقاط در فواصل غیریکسان شکل می‌گیرد. شکل 1 یک المان طیفی لوباتو¹⁰ مرتبه 4 را نشان می‌دهد که دارای 25 گره است. المان‌های محدود طیفی بر پایه چندجمله‌ای‌های لوباتو منجر به فطری شدن ماتریس جرم می‌شوند.

روش المان محدود تصادفی نیز رویکردهای مختلفی دارد که پایه روش توسعه‌یافته توسط نگارنده‌های این پژوهش، روش معروف قائم و اسپانوس [3] بوده که از دو بسط کارهیونلو¹¹ و چندجمله‌ای‌های آشوبی¹² به ترتیب برای تجزیه ورودی و پاسخ تصادفی استفاده می‌کند. روش المان محدود طیفی تصادفی اولیه [6]، توسعه المان محدود طیفی به فضای تصادفی بوده که ضمن حفظ ویژگی‌های روش‌های المان محدود طیفی و تصادفی، قابلیت‌های جدیدی نیز اضافه می‌کند. این قابلیت‌ها شامل موارد زیر است:

- ✓ نیاز به گسسته‌سازی درشت‌تری (المان‌های درشت‌تر) نسبت به روش المان محدود تصادفی استاندارد داشته و در مقابل دقت مناسبی دارد.
- ✓ حل عددی معادله انتگرالی فردهولم¹³ با المان محدود طیفی صورت می‌گیرد که سبب عدم نیاز به تشکیل توابع ویژه می‌شود.
- ✓ در مسائل دینامیکی، ماتریس جرم در فضای تصادفی قطری است و این امر موجب کاهش پراکندگی عددی و استفاده از روش‌های صریح¹⁴ تفاضل محدود برای انتگرال‌گیری زمانی می‌شود.
- ✓ صورت غیراستاندارد گسسته مسئله مقدار ویژه ناشی از معادله انتگرالی فردهولم به آسانی قابل تبدیل به حالت استاندارد است، چرا که یکی از ماتریس‌های این مسئله قطری می‌شود.
- ✓ در نهایت روش‌های یادشده موجب کاهش زمان و حجم محاسباتی شده و همچنین دقت قابل توجهی دارند.

2-2- پیاده‌سازی

این بخش به توسعه روش پیشنهادی المان محدود طیفی تصادفی برای حل مسائل الاستودینامیکی می‌پردازد. برای رعایت اختصار، در این جا تنها

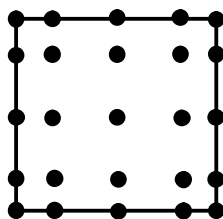


Fig. 1 A typical Lobatto spectral element of fourth order

شکل 1 نمونه یک المان طیفی لوباتو از مرتبه 4

بوده؛ و خروجی را پس از انجام تحلیل به صورت شاخص‌های آماری چون مقدار متوسط، انحراف معیار و توزیع احتمالاتی پاسخ بیان می‌کند. روش‌های المان محدود تصادفی بیشتر به چهار دسته کلی روش مونت کارلو¹ [1]، روش اختلالی² [2]، روش انتگرال وزنی³ [1]، و روش تجزیه طیفی⁴ [3] تقسیم می‌شود. در روش مونت کارلو ابتدا تحقق میدان تصادفی به تعداد نمونه مورد نظر صورت گرفته و سپس مسئله برای هر تحقق به صورت تعیینی حل می‌شود. در پایان پاسخ به صورت شاخص‌های آماری محاسبه می‌گردد. روش اختلالی از سری تیلور برای تجزیه ماتریس‌های تصادفی معادله تعادل (مانند ماتریس سختی) بهره می‌جوید. در روش انتگرال وزنی از بسط انتگرالی ماتریس سختی برای تعریف اثرات تصادفی آن استفاده می‌شود و این امر از طریق انتگرال‌گیری با تابع وزنی رخ می‌دهد. از سوی دیگر روش تجزیه طیفی از دو بسط متفاوت به ترتیب برای ماتریس سختی و پاسخ استفاده می‌کند که در ادامه بیشتر توضیح داده می‌شود. توسعه روش‌های سریع و کارآمد با وجود پیشرفت ابزارهای محاسباتی همواره مورد توجه محققین بوده است تا بتوانند از امکانات موجود بهره‌گیری بهینه کنند. برای چند نمونه، چادهوری و ادھیکاری [4] یک مدل با ابعاد بالا برای تحلیل المان محدود تصادفی ارائه کردند. چوریل و نوی [5] مرتبه مدل را با استفاده از یک تجزیه تعمیم‌یافته در تحلیل عدم قطعیت دینامیک سازه‌ها کاهش دادند. خاجی و زکیان [6] روش المان محدود طیفی تصادفی را برای مسائل الاستودینامیک ارائه کردند. دو و همکاران [7] تحلیل المان محدود تصادفی سازه‌ها را با تحت میدان تصادفی غیردقیق چندگانه انجام دادند. اصنافی [8] تحلیل دوشاخگی پوسته استوانه‌ای را تحت نیروی تصادفی جانبی انجام داد. تحلیل تیر با مقطع متغیر تحت تحریک تصادفی توسط ایرانی و سازش [9] انجام شد.

این پژوهش به توسعه روش المان محدود طیفی تصادفی⁵ با به‌کارگیری المان‌های مرتبه بالا می‌پردازد؛ و سپس اثر مرتبه المان و نوع شبکه⁶ (منظم یا نامنظم) را در روش پیشنهادی بررسی می‌کند. به بیان دیگر روش پیشنهادی یک روش المان محدود طیفی غنی‌سازی شده با روش تجزیه طیفی [3] است. دقت شود که کلمه «طیفی» اولی با دومی معنای متفاوتی دارد. اولی مربوط به المان‌های طیفی و دومی مربوط به نوع تجزیه تصادفی است که از مقادیر ویژه و توابع ویژه بهره می‌جوید. بدیهی است که روش جدید المان محدود طیفی تصادفی تنها با یک نوع مرتبه المان و برای شبکه‌های منظم در مرجع [6] ارائه شده، و نمونه‌های مینا را برای صحت‌سنجی مورد بررسی قرار می‌دهد. در این پژوهش مثال‌های مبنایی با شبکه‌های منظم و نامنظم، گسسته‌سازی مکانی متفاوت برای حل بسط کارهیونلو، تحلیل تصادفی و مرتبه‌های مختلف المان طیفی مورد بررسی قرار گرفته و اثرهای مختلف آن‌ها در دقت و کارایی حل مسئله‌های الاستوستاتیکی و الاستودینامیکی محیط‌های پیوسته دوبعدی نقد شده است، همچنین تابع‌های چگالی طیفی⁷ و توزیع تجمعی احتمال⁸ نیز مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج برنامه‌ریزی رایانه‌ای جدیدی که برای تولید شبکه‌های منظم و نامنظم المان محدود طیفی مرتبه بالا برای این تحقیق نگاشته شده در این مقاله به کار گرفته شده است.

¹ Monte Carlo method
² Perturbation method
³ Weighted integral method
⁴ Spectral decomposition method
⁵ Stochastic spectral finite element method
⁶ Mesh
⁷ Probability density function
⁸ Cumulative density function

⁹ Computational fluid dynamics (CFD)

¹⁰ Lobatto polynomial

¹¹ Karhunen Loève expansion

¹² Polynomial chaos expansion

¹³ Fredholm integral equation

¹⁴ Explicit

بدهی است که نیروی اعمالی می‌تواند تابعی از زمان باشد (مانند پاسخ)، که به اختصار در فرمول بیان نشده است. پس از تجمیع ماتریس‌های المانی، اعمال بسط کارهیون‌لو با M جمله و انجام عملیات جبری رابطه (9) به دست می‌آید.

$$M\dot{U}(\theta, t) + C\dot{U}(\theta, t) + \left(\sum_{i=0}^M K_i \xi_i(\theta) \right) U(\theta, t) = R_B(t) + R_S(t) + R_C(t) \quad (9)$$

که در آن، M ، C و K به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی هستند. R_B ، R_S و R_C به ترتیب نیروهای کالبدی، سطحی و متمرکز هستند. چندجمله‌ای آشوبی به صورت رابطه (10) تعریف می‌شود.

$$U(\theta, t) = \sum_{j=0}^P U_j(t) \psi_j(\theta) \quad (10)$$

از سویی با پوشاندن پاسخ بر جملات آشوبی با P جمله می‌توان رابطه (11) را نوشت.

$$M \sum_{j=0}^P \ddot{U}_j(t) \psi_j(\theta) + C \sum_{j=0}^P \dot{U}_j(t) \psi_j(\theta) + \left(\sum_{i=0}^M K_i \xi_i(\theta) \right) \sum_{j=0}^P U_j(t) \psi_j(\theta) = R_B(t) + R_S(t) + R_C(t) \quad (11)$$

برای رسیدن به یک تقریب بهینه از حل دقیق روی فضای پوشا توسط بسط جملات آشوبی، مانده حاصل ضرب طرفین در $\psi_k(\theta)$ باید صفر در نظر گرفته شود؛ بنابراین $\psi_k(\theta)$ در طرفین رابطه اخیر ضرب شده و از آن متوسط ریاضی گرفته می‌شود و رابطه (12) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \langle \psi_k(\theta) M \sum_{j=0}^P \ddot{U}_j(t) \psi_j(\theta) \rangle + \langle \psi_k(\theta) C \sum_{j=0}^P \dot{U}_j(t) \psi_j(\theta) \rangle \\ & + \langle \psi_k(\theta) \left(\sum_{i=0}^M K_i \xi_i(\theta) \right) \sum_{j=0}^P U_j(t) \psi_j(\theta) \rangle \\ & = \langle \psi_k(\theta) R_B(t) \rangle + \langle \psi_k(\theta) R_S(t) \rangle + \langle \psi_k(\theta) R_C(t) \rangle \\ & = \langle \psi_k(\theta) R(t) \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

در نهایت معادله تعادلی دینامیکی تصادفی به صورت رابطه (13) خواهد بود.

$$M_{st} \ddot{U} + C_{st} \dot{U} + K_{st} U = F_{st} \quad (13)$$

به طوری که رابطه (14) را نیز خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} M_{st}^k &= \langle \psi_k(\theta) \psi_k(\theta) \rangle M \\ C_{st}^k &= \langle \psi_k(\theta) \psi_k(\theta) \rangle C \\ K_{st}^k &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^P \langle \xi_i(\theta) \psi_j(\theta) \psi_k(\theta) \rangle K_i \\ F_{st}^k &= \langle \psi_k(\theta) R \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

ابعاد ماتریس‌های تصادفی به صورت $N(P+1) \times N(P+1)$ است که N تعداد درجات آزادی در فضای تعینی است و به صورت رابطه (15)، P به شکل زیر است.

$$P + 1 = \frac{(M + n)!}{M! n!} \quad (15)$$

در آن n مرتبه چندجمله‌ای آشوبی است. ابعاد ماتریس در فضای تصادفی بسیار بزرگ‌تر از فضای تعینی همتای خود است و این نیاز محاسباتی، یکی از چالش‌های بزرگ روش‌های المان محدود تصادفی است. در تشکیل توابع

استخراج معادله تعادل دینامیکی آورده شده است.

یک فضای احتمالاتی کامل هیلبرت (Ω, A, P) با فضای نمونه‌ای Ω ، جبر سیگمای A روی Ω ، و اندازه احتمالاتی P تعریف شده است. به بیان دیگر هر نگاشت $w: D \times \Omega \rightarrow R$ یک میدان تصادفی حقیقی را تعریف می‌کند [14] به طوری که $x \in D$ بوده و $w(x, \theta)$ یک عدد حقیقی به ازای هر تحقق $\theta \in \Omega$ است. هر میدان تصادفی $w: D \times \Omega \rightarrow R$ با تابع همبستگی پیوسته را می‌توان به صورت بسط کارهیون‌لو به صورت رابطه (1) نوشت.

$$w(x, \theta) = \bar{w}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \phi_i(x) \xi_i(\theta) \quad (1)$$

این سری در فضای هیلبرت همگرا می‌شود. λ_i مقدار ویژه و ϕ_i تابع ویژه ناشی از تابع همبستگی بوده و ξ_i مجموعه متغیرهای تصادفی غیرهمبسته است. بر اساس اصل کار مجازی رابطه (2) را به صورت زیر داریم.

$$\int_V \bar{\epsilon}^T \tau dV = \int_V \bar{u}^T f_B dV + \int_S \bar{u}_S^T f_S dS + \sum_i u_i^T R_C^i \quad (2)$$

\bar{u} نشان دهنده جابه‌جایی مجازی و $\bar{\epsilon}$ کرنش مجازی متناظر است. f_B ، f_S و R_C^i نیروهای کالبدی، سطحی و نیروهای متمرکز گره‌ای را نشان می‌دهد. پس از بسط دادن و ضرب طرفین در \bar{u}^T ، می‌توان رابطه (3) را نوشت.

$$\begin{aligned} \bar{u}^T \sum_e \int_{V^{(e)}} \bar{\epsilon}^T \tau dV &= \bar{u}^T \sum_e \int_{V^{(e)}} \bar{u}^T f_B dV \\ &+ \bar{u}^T \sum_e \int_{S^{(e)}} \bar{u}_S^T f_S dS \\ &+ \bar{u}^T \sum_i u_i^T R_C^i \end{aligned} \quad (3)$$

با استفاده از رابطه کرنش - جابه‌جایی و توابع درون‌یابی در فضای تصادفی می‌توان روابط (4-6) را نوشت.

$$\tau = C(\theta) \epsilon \quad (4)$$

$$\bar{\epsilon}(x, y, \theta, t) = B \bar{U}(\theta, t) \quad (5)$$

$$\bar{u}(x, y, \theta, t) = H \bar{U}(\theta, t) \quad (6)$$

که H ماتریس توابع درون‌یابی طیفی است. با اعمال روابط بالا، اگر نیروهای اینرسی و میرایی به عنوان مشارکت در نیروی حجمی در نظر گرفته شوند، رابطه (7) قابل نوشتن است.

$$\begin{aligned} \bar{u}^T \sum_e \int_{V^{(e)}} B^T C B dV &= \bar{u}^T \sum_e \int_{V^{(e)}} H^T [f_B \\ &- \rho H \ddot{U} - \kappa H \dot{U}] dV \\ &+ \bar{u}^T \sum_e \int_{S^{(e)}} H^T f_S dS \\ &+ \bar{u}^T R_C \end{aligned} \quad (7)$$

ρ و κ به ترتیب پارامترهای میرایی و چگالی هستند. ماتریس‌های المانی ناشی از رابطه بالا به صورت رابطه (8) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} K^e &= \int_{V^{(e)}} B^T C B dV \\ C^e &= \int_{V^{(e)}} H^T \kappa H dV \\ M^e &= \int_{V^{(e)}} H^T \rho H dV \\ R_B^e &= \int_{V^{(e)}} H^T f_B dV \\ R_S^e &= \int_{S^{(e)}} H^T f_S dS \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sum_{e_1=1}^{N_s} \iint_{D^{e_1}} c(x_1, y_1; x_2, y_2) \varphi_n(x_2, y_2) dD^{e_1} = \lambda_n \varphi_n(x_1, y_1) \quad (26)$$

در نهایت به فرم مسئله مقدار ویژه گسسته ماتریسی رابطه (27) می‌توان دست یافت.

$$\hat{C}D = \Lambda \hat{B}D \quad (27)$$

در آن Λ و D به ترتیب ماتریس‌های مقادیر و بردارهای ویژه هستند. ماتریس‌های \hat{C} و \hat{B} از تجمیع ماتریس‌های (28,29) به دست می‌آیند.

$$C_{e_1 e_2} = \iint_{D^{e_1}} \iint_{D^{e_2}} c(x_1, y_1; x_2, y_2) H^{e_1 T} H^{e_2} dD^{e_1} dD^{e_2} \quad (28)$$

و

$$B_{e_1 e_2} = \iint_{D^{e_1}} H^{e_1 T} H^{e_2} dD^{e_1} \quad (29)$$

با به کارگیری روش المان محدود طیفی برای حل انتگرال فردهولم ماتریس \hat{B} قطری می‌شود که این امر به سهولت حل مسئله مقادیر ویژه می‌انجامد، چرا که به آسانی قابل تبدیل به شکل استاندارد مسئله مقدار ویژه است.

3- مثال‌های عددی

در این بخش چهار مثال عددی برای ارزیابی اثر المان‌های طیفی مرتبه بالا و شبکه آن‌ها روی پاسخ‌های تصادفی سازه و حل عددی معادله انتگرالی فردهولم مورد بررسی قرار گرفته است. این مثال‌ها دقت روش المان محدود طیفی تصادفی را نیز در حل مسائل مختلف مبنا نشان می‌دهند. مثال اول، دوم و سوم به صورت دینامیکی و مثال چهارم تحت بار استاتیکی است که خروجی‌های تابع چگالی طیفی و تابع تجمعی احتمال آن‌ها نیز مورد بررسی قرار گرفته است. تابع همبستگی در تمامی مثال‌ها به صورت نمایی بوده و توزیع میدان تصادفی گاوسی است. برنامه‌هایی برای تولید شبکه‌های منظم و نامنظم المان طیفی مرتبه بالا برای این تحقیق در تمام مثال‌ها نوشته شده است.

3-1- میله مستطیلی تحت بار دینامیکی مثلثی

یک میله مستطیلی مطابق شکل 2 در حالت تنش مسطح تحت بار دینامیکی مثلثی قرار گرفته است. این مثال در مرجع [15] به صورت تعینی حل شده که در این جا تحلیل تصادفی آن انجام شده است. ضریب ارتجاعی با مقدار متوسط 1 و انحراف معیار 0.1 لحاظ شده است. مقادیر چگالی، ضریب پواسن و ضخامت میله به ترتیب 1، 1 و 0.3 لحاظ شده‌اند. 4 مود از بسط کارهیون‌لو در نظر گرفته شده و طول همبستگی در راستای x و y به ترتیب 1 و 0.5 است. مطابق جدول 1، چهار نوع شبکه با دو نوع مرتبه المان تعریف شده است. این جدول مقادیر ویژه بسط کارهیون‌لو را مقایسه می‌کند. تفاوت مقادیر در مودهای بالاتر مشهودتر است. بدیهی است که شبکه‌های ریزتر منجر به پاسخ بهتری شده‌اند. اما نکته قابل توجه دقت قابل رقابت المان مرتبه 4 با شبکه درشت‌تر نسبت به مرتبه 3 است. مقدار متوسط و انحراف معیار پاسخ جابه‌جایی قائم میله در گره A توسط شکل‌های 2 و 3 نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تفاوت پاسخ در مقادیر انحراف معیار مشهودتر است. جدول 2 تعداد درجه‌های آزادی هر شبکه را در فضای تصادفی نشان می‌دهد و بیشترین جابه‌جایی در تاریخچه زمانی پاسخ در گره A را با هم مقایسه می‌کند. این جدول نشان می‌دهد که شبکه ریزتر برای هر مرتبه المان

درون‌یابی و انتگرال‌گیری عددی، در این المان‌های طیفی، از مقادیر مختصاتی X و وزنی W لوباتوی زیر استفاده می‌شود. مرتبه 3 به صورت رابطه (16) است.

$$x = [-1.0000, -0.4472, 0.4472, 1.0000] \\ w = [0.1667, 0.8333, 0.8333, 0.1667] \quad (16)$$

مرتبه 4 به صورت رابطه (17) است.

$$x = [-1.0000, -0.6547, 0.0000, 0.6547, 1.0000] \\ w = [0.1000, 0.5444, 0.7111, 0.5444, 0.1000] \quad (17)$$

مرتبه 5 به صورت رابطه (18) است.

$$x = [-1.0000, -0.7651, -0.2852, 0.2852, 0.7651, 1.0000] \\ w = [0.0667, 0.3785, 0.5549, 0.5549, 0.3785, 0.0667] \quad (18)$$

همچنین H یک ماتریس به ابعاد $2 \times 2nm$ بوده که nm تعداد گره‌های هر المان است. یک نمونه از تابع درون‌یابی برای هر المان در زیر آمده است.

مرتبه 3 به صورت رابطه (19) است.

$$H_1 = 0.3906 (r + 0.4472)(s + 0.4472) \\ (r - 0.4472)(s - 0.4472)(r - 1.0)(s - 1.0) \quad (19)$$

مرتبه 4 به صورت رابطه (20) است.

$$H_1 = 0.7656r s (r + 0.6547)(s + 0.6547) \\ (r - 0.6547)(s - 0.6547)(r - 1.0)(s - 1.0) \quad (20)$$

مرتبه 5 به صورت رابطه (21) است.

$$H_1 = 1.723 (r + 0.2852)(s + 0.2852) \\ (r + 0.7651)(s + 0.7651)(r - 0.7651) \\ (s - 0.7651)(r - 0.2852)(s - 0.2852) \\ (r - 1.0)(s - 1.0) \quad (21)$$

در روابط بالا r و s جهت مختصه‌های ایزوپارامتریک هستند. پس از انجام تحلیل برای به دست آوردن آمار پاسخ، مقدار میانگین و انحراف معیار از روابط (22,23) می‌توان بهره جست.

$$\langle u \rangle = u_0 \quad (22)$$

$$\text{cov}[u, u] = \sum_{j=1}^P \langle \psi_j^2 \rangle u_j u_j^T \quad (23)$$

در روابط بالا $\langle u \rangle$ و cov به ترتیب مقدار متوسط و همبستگی¹ پاسخ هستند. از سوی دیگر، تنها برای برخی از توابع همبستگی و برای تعداد اندکی از هندسه‌های ساده حل تحلیلی وجود دارد. معادله انتگرالی فردهولم در حالت دوبعدی به صورت رابطه (24) بیان می‌شود.

$$\iint_D c(x_1, y_1; x_2, y_2) \varphi_n(x_2, y_2) dx_1 dy_1 = \lambda_n \varphi_n(x_1, y_1) \quad (24)$$

همچنین تابع همبستگی نمایی آن به صورت رابطه (25) تعریف می‌شود.

$$c(x_1, y_1; x_2, y_2) = \sigma_E^2 \exp\left(-\frac{|x_2 - x_1|}{b_x} - \frac{|y_2 - y_1|}{b_y}\right) \quad (25)$$

حل عددی انتگرال فردهولم توسط روش المان محدود در مرجع [3] آمده است. در حل به روش المان طیفی از توابع درون‌یابی طیفی و سپس از روش انتگرال‌گیری عددی گاوس-لوباتو-لژاندر استفاده می‌شود. پس از تقسیم دامنه مسئله به N_s المان محدود طیفی می‌توان رابطه (26) را نوشت.

¹ Covariance function

به دست می‌آید که در مورد انحراف معیار مشهودتر است.

3-2- غشای کوک تحت بار دینامیکی مستطیلی

این مثال از مرجع [6] انتخاب شده که تحلیل تصادفی مثال مبنای معروف کوک است (شکل 5). چگالی و ضریب پواسن به ترتیب برابر 0.333 و 0.0001 لحاظ شده و شش مود از بسط کارهیون‌لو در نظر گرفته شده است. طول همبستگی در راستای x و y به ترتیب 48 و 60 است. فرضیات دیگر مانند مثال پیشین است. جدول 3 مقادیر ویژه بسط کارهیون‌لو را مقایسه می‌کند؛ و همان‌طور که مشخص است شش نوع شبکه با سه نوع مرتبه المان طیفی تعریف شده است. با توجه به این جدول مشاهده می‌شود که با تعداد 12 المان مرتبه پنج می‌توان از 130 المان مرتبه سه [6] پاسخ بهتری دریافت کرد. با توجه به تجمیع¹ دوگانه ماتریس C که مطابق معادله (27) در حل معادله انتگرالی حاصل از بسط کارهیون‌لو صورت می‌گیرد، هرچه تعداد المان کمتر باشد، منجر به حل سریع‌تری می‌شود. با توجه به مقادیر ویژه مشاهده می‌شود که دقت حل این معادله انتگرالی بیشتر وابسته به تعداد درجه‌های آزادی است تا مرتبه المان. مقدار متوسط و انحراف معیار تاریخچه زمانی جابه‌جایی نوک سازه در نقطه A در شکل‌های 6 و 7 ترسیم شده‌اند. این

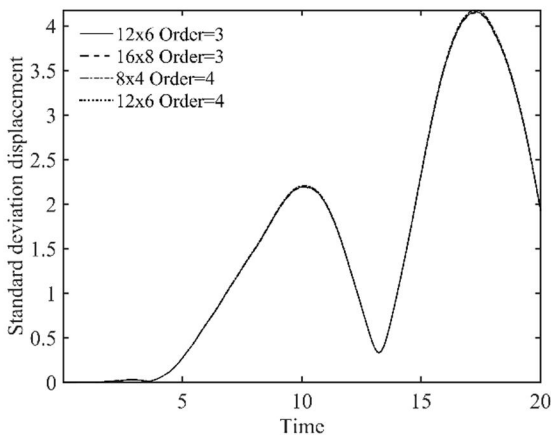


Fig. 4 Standard deviation vertical displacement history of the rod at node A

شکل 4 انحراف معیار تاریخچه جابه‌جایی قائم میله در نقطه A

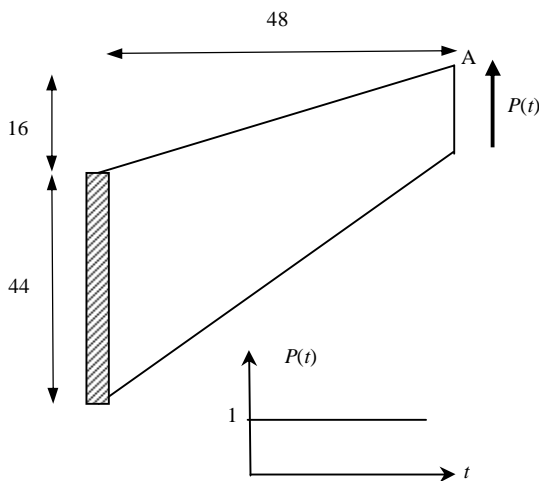


Fig. 5 Cook's membrane under rectangular dynamic loading

شکل 5 غشای کوک تحت بار دینامیکی مستطیلی

جدول 1 مقادیر ویژه حاصل از حل عددی بسط کارهیون‌لو با المان‌های طیفی برای

مثال اول

Table 1 Eigenvalues obtained from numerical solution of the KLE using spectral elements for the first example

نوع شبکه	شبکه 12×6	شبکه 8×4	شبکه 16×8	شبکه 12×6
مقدار ویژه	با مرتبه 4	مرتبه 4	با مرتبه 3	با مرتبه 3
1	0.00273108	0.00273343	0.00273103	0.00273245
2	0.00051137	0.00051336	0.00051133	0.00051253
3	0.00051045	0.00051127	0.00051043	0.00051093
4	0.00016810	0.00017007	0.00016805	0.00016924

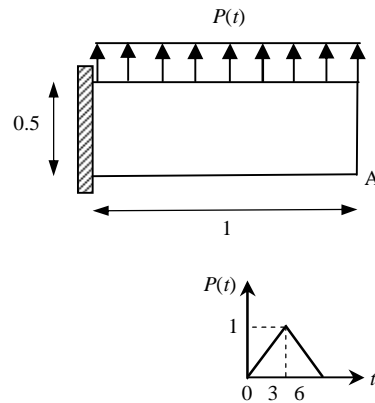


Fig. 2 A rod under triangular dynamic load

شکل 2 یک میله تحت بار مثلثی دینامیکی

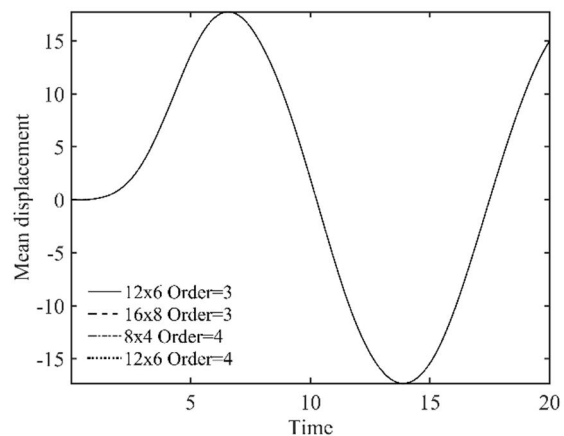


Fig. 3 Mean vertical displacement history of the rod at node A

شکل 3 مقدار متوسط تاریخچه جابه‌جایی قائم میله در نقطه A

جدول 2 مقادیر حداکثر جابه‌جایی‌های قائم نقطه A برای مثال اول

Table 2 Maxima of vertical displacements of node A for the first example

نوع شبکه	شبکه 12×6	شبکه 8×4	شبکه 16×8	شبکه 12×6
	مرتبه 4	مرتبه 4	مرتبه 3	مرتبه 3
درجه آزادی	84000	38080	84000	47880
مقدار متوسط	17.73549	17.73233	17.73346	17.73033
انحراف معیار	4.154355	4.175747	4.146154	4.154585

منجر به انحراف معیار کوچک‌تر و مقدار متوسط بزرگ‌تر می‌شود. با تعداد درجه‌های آزادی یکسان برای دو مرتبه متفاوت المانی، پاسخ‌های متفاوتی نیز

¹ Assembly

المان مرتبه پنج با 208320 درجه آزادی می‌تواند به‌خوبی با المان مرتبه چهار با 526848 درجه آزادی رقابت کند. این امر در مقایسه المان‌های مرتبه چهار و سه نیز صادق است، و نشان از توانایی المان‌های طیفی مرتبه بالا در مسائل دینامیکی با تلاش محاسباتی مطلوب دارد.

3-3- غشای کوک تحت بار دینامیکی مثلثی

مثال پیشین در این بخش تحت بار دینامیکی متفاوتی به‌صورت بار مثلثی قرار گرفته است. تمامی مشخصات مسئله مانند مثال پیشین بوده و تابع بار مثلثی نیز مشابه بار مثال اول تعریف شده است. با توجه به این‌که تمامی موارد یادشده در این‌جا مشابه قبل است، این مثال برای بررسی دقت و همگرایی المان‌های مرتبه بالا، وقتی‌که تابع بارگذاری عوض می‌شود، به‌کار رفته است. شکل‌های 8 و 9 به‌ترتیب مقدار متوسط و انحراف معیار تاریخچه زمانی جابه‌جایی قائم را در گره A مقایسه می‌کنند. همان‌طوری‌که مشاهده می‌شود، بازم تفاوت‌ها در مقدار انحراف معیار مشهودتر است. جدول 5 مقادیر بیشینه پاسخ‌ها را مقایسه می‌کند، که حاکی از دقت خوب المان مرتبه پنج در مقابل المان مرتبه چهار است؛ به‌طوری‌که توانسته با تعداد درجه‌های آزادی تقریباً نصف تعداد درجه‌های آزادی المان مرتبه چهار، به همان دقت، به‌ویژه در انحراف معیار برسد. از جنبه دیگر، دیده می‌شود که المان مرتبه پنج با 208320 درجه آزادی به‌خوبی توانسته با المان مرتبه سه با 463680 درجه آزادی رقابت کند، و از نظر مقدار متوسط و انحراف معیار دقت قابل‌توجهی داشته باشد. پس می‌توان دریافت که تابع بارگذاری تأثیر به‌سزایی در تفاوت نتایج المان‌های مرتبه بالا و پایین دارد، به‌گونه‌ای‌که هر چه تابع بارگذاری پیچیده‌تر باشد، این تفاوت بیشتر مشهود می‌شود. این امر در مطالعات پیشین نیز البته برای تحلیل تعینی (غیرتصادفی) مسائل بزرگ مقیاس انتشار موج نشان داده شده بود [12].

3-4- صفحه مستطیلی حفره‌دار تحت تنش‌های کششی

این مثال مینا حل استاتیکی المان محدود یک صفحه تنش مسطح تحت بارهای گسترده کششی بوده که جزئیات بارگذاری آن در مرجع [16] آمده است. مبدأ مختصات مرکز حفره بوده و جابه‌جایی قائم گره A در حاشیه حفره به مختصات (2, 0) مورد نظر است. مقدار متوسط این جابه‌جایی و انحراف استاندارد آن با روش المان محدود تصادفی به‌ترتیب 0.004891 و 0.00078 گزارش شده‌اند [16]. مقدار متوسط و انحراف معیار ضریب ارتجاعی به‌ترتیب 10^4 و 2×10^3 تعریف شده‌اند. صفحه با ضخامت واحد

جدول 4 مقادیر حداکثر جابه‌جایی‌های قائم نقطه A برای مثال دوم

Table 4 Maxima of vertical displacements of node A for the second example

نوع شبکه	مقدار	ویژه	درجه آزادی
8×6 مرتبه 5	4×3 مرتبه 5	16×12 مرتبه 4	8×6 مرتبه 4
20×15 مرتبه 3	16×12 مرتبه 3	29836	463680
48.3956	48.3325	48.3802	48.3974
10.5305	10.5144	10.5422	10.5206
2	2	9	7

جدول 3 مقادیر ویژه حاصل از حل عددی بسط کارهیونن‌لو با المان‌های طیفی برای مثال دوم

Table 1 Eigenvalues obtained from numerical solution of the KLE using spectral elements for the second example

نوع شبکه	مقدار	ویژه
8×6 مرتبه 5	4×3 مرتبه 5	16×12 مرتبه 4
8×6 مرتبه 4	20×15 مرتبه 3	16×12 مرتبه 3
8.7536	8.7598	8.7524
2.0225	2.0278	2.0214
0.6685	0.6724	0.6677
0.5896	0.5923	0.5891
0.3179	0.3206	0.3174
0.2819	0.2858	0.2811

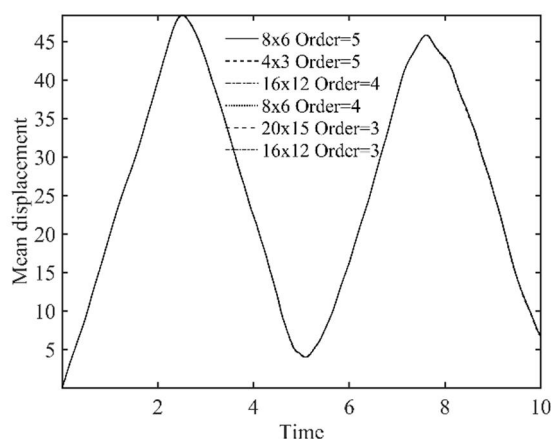


Fig. 6 Mean vertical displacement history of Cook's membrane under rectangular dynamic loading at node A

شکل 6 مقدار متوسط تاریخچه جابه‌جایی قائم غشای کوک تحت بار دینامیکی مستطیلی در نقطه A

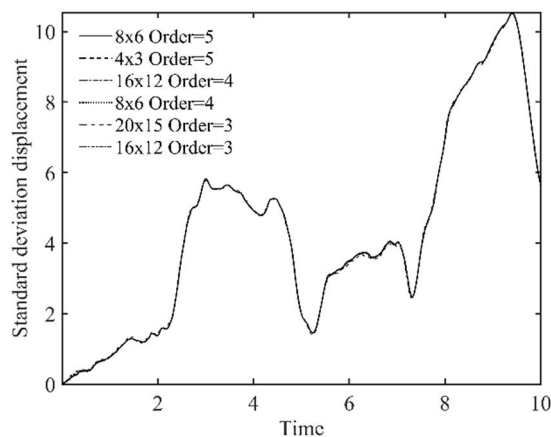
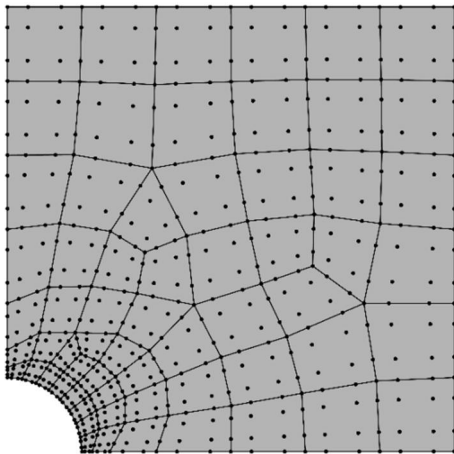


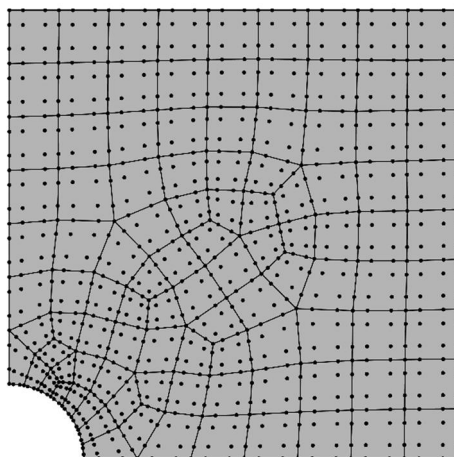
Fig. 7 Standard deviation vertical displacement history of Cook's membrane under rectangular dynamic loading at node A

شکل 7 انحراف معیار تاریخچه جابه‌جایی قائم غشای کوک تحت بار دینامیکی مستطیلی در نقطه A

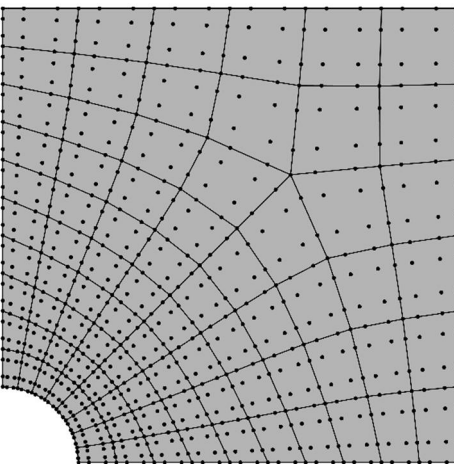
شکل‌ها و جدول 4 نشان می‌دهند که وابستگی انحراف معیار به شبکه و مرتبه المان بیشتر است. در این مثال برخلاف مثال پیشین، برای یک مرتبه مشخص المان، هرچه شبکه ریزتر می‌شود مقدار متوسط بیشینه کمتر شده، و انحراف معیار بیشتر می‌شود. اگر تعداد درجات آزادی را در نظر آوریم، روند تغییر قابل‌پیش‌بینی نیست. در خصوص مرتبه المان می‌توان دریافت که



(الف)



(ب)



(پ)

Fig. 10 Configuration of three various meshes for the plate with a hole
 شکل 10 شبکه برای صفحه حفره‌دار: الف- نامنظم 63 المانی، ب- نامنظم 103 المانی،
 و پ- منظم 84 المانی

شده‌اند. شکل‌های 13 و 14 به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع تجمعی احتمال را مورد بررسی قرار می‌دهند. با توجه به شکل‌های اخیر مشاهده می‌شود که شبکه نامنظم علاوه بر دقت تأثیرهای محلی نیز دارد. به عبارت دیگر نوسانات جابه‌جایی به‌طور محلی در مورد پاسخ‌های شبکه 103 المانی دیده

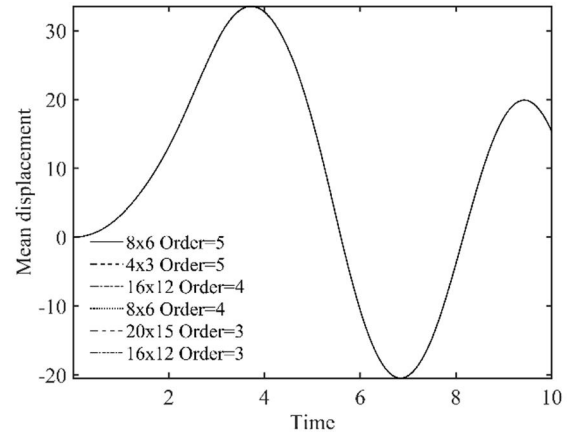


Fig. 8 Mean vertical displacement history of Cook's membrane under triangular dynamic loading at node A

شکل 8 مقدار متوسط تاریخچه جابه‌جایی قائم غشای کوک تحت بار دینامیکی مثلثی در نقطه A

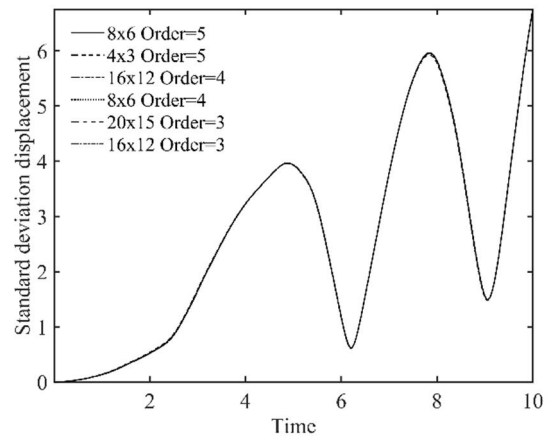


Fig. 9 Standard deviation vertical displacement history of Cook's membrane under triangular dynamic loading at node A

شکل 9 انحراف معیار تاریخچه جابه‌جایی قائم غشای کوک تحت بار دینامیکی مثلثی در نقطه A

جدول 5 مقادیر حداکثر جابه‌جایی‌های قائم نقطه A برای مثال سوم

Table 5 Maxima of vertical displacements of node A for the third example

نوع شبکه	مقدار ویژه	درجه آزادی	مقدار متوسط	انحراف معیار	
8×6 مرتبه 5	4×3 مرتبه 5	16×12 مرتبه 4	8×6 مرتبه 4	20×15 مرتبه 3	16×12 مرتبه 3
20832	53760	52684	13440	46368	29836
0	8	8	0	0	8
33.536	33.487	33.548	33.511	33.534	33.521
95	39	29	18	66	84
6.7447	6.7523	6.7487	6.7512	6.7523	6.7545
23	54	22	84	54	3

در نظر گرفته شده و طول هم‌بستگی در هر دو راستای اصلی 12 واحد است. چهار مود برای بسط کارهیون‌لو در نظر گرفته شده که در جدول 6 به‌دست آمده‌اند. در این‌جا دو شبکه نامنظم 63 و 103 المانی و یک شبکه منظم 84 المانی مطابق شکل 10 در نظر گرفته شده و المان طیفی از نوع مرتبه سه است. مقدار متوسط جابه‌جایی قائم نقطه A در شبکه‌های 63، 103 و 84 المانی به ترتیب 0.0048، 0.0049 و 0.0049 بوده و انحراف معیار آن به ترتیب 0.0008735، 0.0009146 و 0.0008948 هستند. میدان‌های جابه‌جایی متوسط و انحراف معیار در شکل‌های 11 و 12 آمده و مقایسه

جدول 6 مقادیر ویژه حاصل از حل عددی بسط کارهیون‌لو با المان‌های طیفی برای مثال چهارم

Table 6 Eigenvalues obtained from numerical solution of the KLE using spectral elements for the fourth example

نوع شبکه	شبکه اول با 63 المان	شبکه دوم با 103 المان	شبکه سوم با 84 المان	ویژه
مقدار	310061340.0658	309982203.6372	309956779.3013	1
	58888064.9255	58823033.6186	58754160.1487	2
	55471477.7220	55401583.7593	55429788.1184	3
	19307969.0376	19242619.8190	19213038.2428	4

می‌شود که در مورد شبکه 63 المانی این‌گونه نیست که می‌توان یکی از دلایل را اعوجاج موجود در شبکه نامنظم دانست. با توجه به این که از همان شبکه در حل معادله انتگرالی بسط فردهولم استفاده می‌شود، تأثیر روی پاسخ‌ها را بر گشتاورهای تصادفی (به‌خصوص گشتاورهای بالاتر) دوچندان می‌کند. همان‌طور که مقایسه تابع‌های چگالی طیفی و تجمعی احتمال نشان می‌دهند، هنگامی که از تعداد المان بیشتری استفاده می‌شود، حساسیت مزبور زیادتیر است. شکل 13 نشان می‌دهد که مساحت زیر نمودار مربوط به شبکه 103 المانی از شبکه 63 المانی در بازه 0.004 تا 0.005 بیشتر است، و این نشان می‌دهد که شبکه ریزتر منجر به همگرا شدن مقدار حداکثری تابع چگالی احتمال در محل مقدار متوسط جابه‌جایی می‌شود؛ و تابع چگالی احتمال با پهنای نوار کمتری را در اطراف مقدار میانگین به‌دست می‌دهد. از سوی دیگر از این پدیده برداشت می‌شود که نوسانات ناشی از خطای روش المان محدود طیفی با شبکه درشت پراکندگی بیشتری دارد. از آن‌جایی که انحراف معیار یک شاخص پراکندگی است، مقدار کمتری به خود گرفته است، چرا که حساسیت پاسخ در شبکه‌های ریز بیشتر است و در نتیجه مقدار میانگین و انحراف معیار برای شبکه ریزتر کمی بیشتر شده است. در مورد شبکه منظم می‌توان مشاهده کرد که مقادیر ویژه حاصل از حل معادله فردهولم توسط این شبکه قابل رقابت با شبکه نامنظم 103 المانی است. این نشان می‌دهد که شبکه منظم حل دقیق‌تری از این معادله به‌دست می‌دهد و این تأثیر در جابه‌جایی یادشده هم دیده می‌شود.

4- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا روش المان محدود طیفی تصادفی به المان‌های طیفی مرتبه بالا توسعه داده شده و سپس برای تحلیل الاستوستاتیکی و الاستودینامیکی محیط‌های پیوسته به‌کار گرفته شده، و دقت آن نسبت به نوع شبکه و مرتبه المان مورد ارزیابی قرار گرفته است. روش یادشده دارای مزیت‌های قابل توجهی نسبت به روش المان محدود تصادفی استاندارد است که از آن جمله می‌توان ماتریس جرم قطری، بهره‌گیری از تعداد المان کمتر، حل عددی و اعمال مؤثر و سریع بسط کارهیون‌لو، دقت خوب، و همگرایی مناسب در مسائل الاستوستاتیکی و الاستودینامیکی را نام برد. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که اعوجاج شبکه در حل عددی معادله انتگرالی ناشی از بسط کارهیون‌لو تأثیرگذار بوده و نه تنها از جهت حل تعیینی، بلکه در پاسخ تصادفی نیز مؤثر است، به‌طوری‌که در گشتاورهای آماری مرتبه بالا (نظیر انحراف معیار و تابع چگالی احتمال) خود را نشان می‌دهد. محاسبات نشان می‌دهد که حل عددی معادله انتگرالی وابستگی چندانی به مرتبه المان نداشته و بیشتر به تعداد درجات آزادی بستگی دارد؛ هرچند المان‌های مرتبه

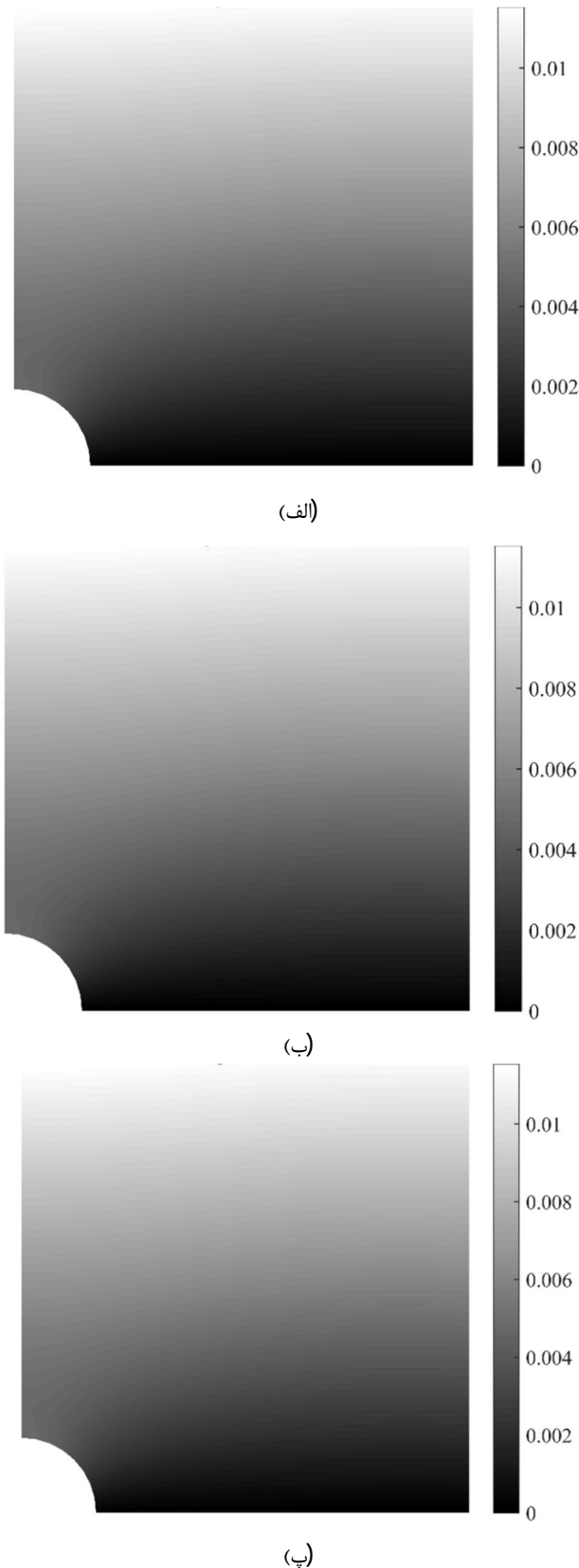


Fig. 11 Mean values of vertical displacement field for three various meshes

شکل 11 میدان جابه‌جایی قائم متوسط: الف- شبکه 63 المانی، ب- نامنظم 103 المانی، و پ- منظم 84 المانی

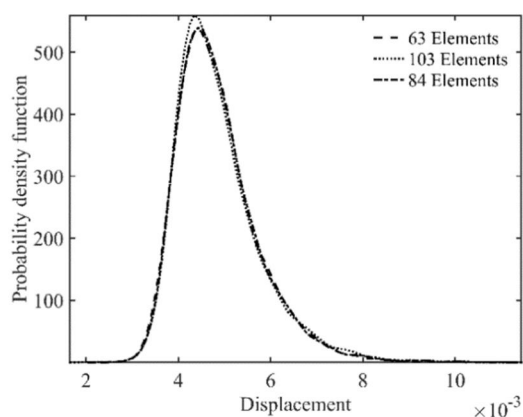


Fig. 13 Probability density function of displacement at node A for the plate with a hole

شکل 13 تابع چگالی احتمال جابه‌جایی گره A برای صفحه حفره‌دار

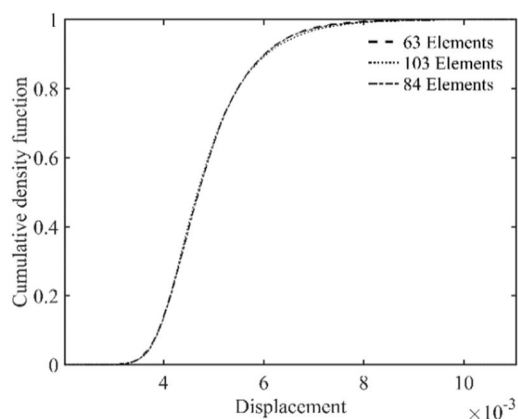
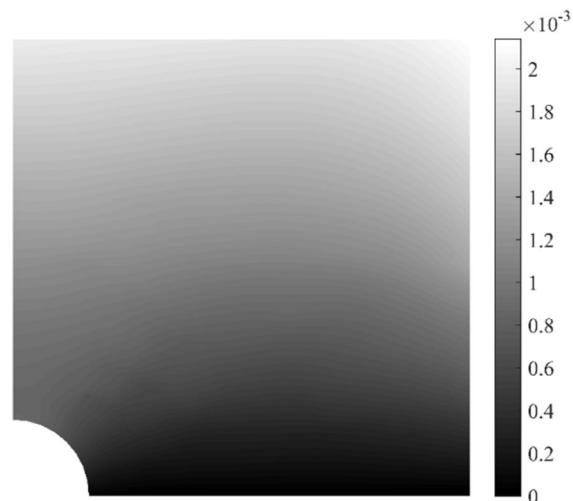


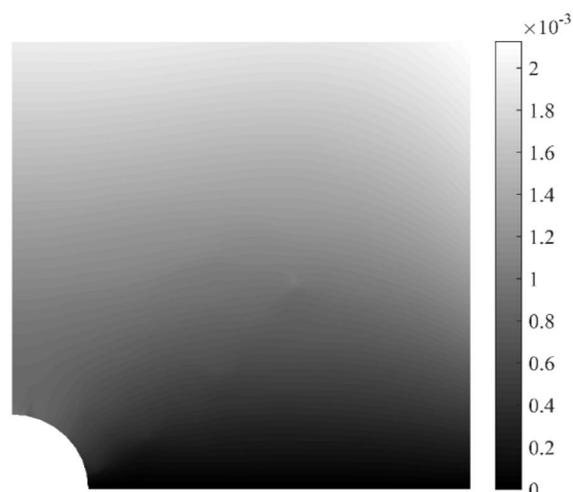
Fig. 14 Cumulative density function of displacement at node A for the plate with a hole

شکل 14 تابع تجمعی احتمال جابه‌جایی گره A برای صفحه حفره‌دار

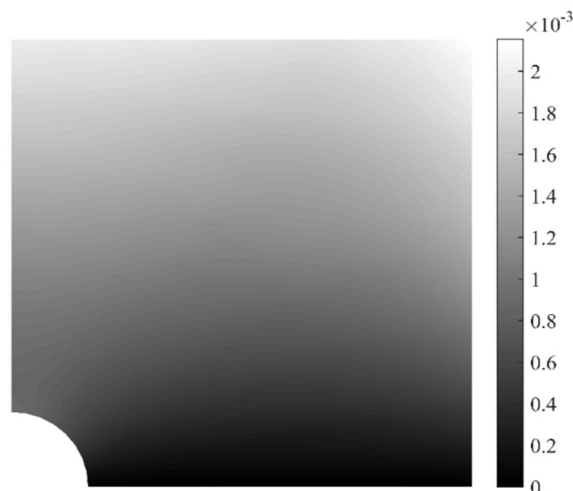
بالاتر با تعداد المان کم، مقادیر ویژه دقیق‌تری را می‌توانند تقریب بزنند. در بررسی پاسخ دینامیکی می‌توان بیان کرد المان‌های مرتبه بالا با داشتن تعداد درجه آزادی کمتری می‌توانند پاسخ دینامیکی خوبی نسبت به المان‌های مرتبه پایین‌تر با تعداد درجات آزادی بیشتر به دست دهند. در ضمن، در شبکه‌های منظم روند تغییر انحراف معیار و مقدار متوسط با ریز کردن شبکه قابل پیش‌بینی‌تر است. از سوی دیگر با انتخاب یک شبکه به حد کافی ریز (به‌طوری‌که به همگرایی لازم در وضعیت غیرتصادفی (حل متعین) برسیم)، می‌توان گفت همان شبکه برای تحلیل تصادفی المان محدود طیفی مناسب است و نتایج نیز بیانگر همین امر است؛ چرا که موجب نوسان خطای کمتری شده و با پهنای نواری کمتری در تابع چگالی احتمال به مقادیر متوسط همگرا می‌شود. براساس نتایج، شبکه منظم با تعداد المان کمتر می‌تواند پاسخ قابل رقابتی را نسبت به شبکه نامنظم (حتی با تعداد المان بیشتر) تولید کند. در ارتباط با تأثیر نوع بارگذاری، هرچه تابع بارگذاری دینامیکی سادگی کمتری داشته باشد، تأثیر دقت و کارایی المان‌های طیفی مرتبه بالا بیشتر هویدا می‌شود، که حاکی از کارایی مؤثر المان‌های طیفی مرتبه بالا در تحلیل تصادفی شبیه‌سازی‌های المان محدود تصادفی دارد. در پایان با در نظر گرفتن نکات اشاره‌شده در این مقاله روش المان محدود طیفی تصادفی می‌تواند دقت و کارایی مناسب را در عین داشتن سرعت و همگرایی برای محققین به



(الف)



(ب)



(پ)

Fig. 12 Standard deviation values of vertical displacement field for three various meshes

شکل 12 انحراف معیار میدان جابه‌جایی قائم: الف- شبکه 63 المانی، ب- نامنظم 103 المانی، و پ- منظم 84 المانی

ارمغان آورد.

5- مراجع

- [9] S. Irani, S. Sazesh, Random vibration of cantilever tapered beam under stochastic excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 138-145, 2013. (in Persian فارسی)
- [10] A. T. Patera, A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion, *Computational Physics*, Vol. 54, No. 3, pp. 468-488, 1984.
- [11] B. Hennings, R. Lammering, U. Gabbert, Numerical simulation of wave propagation using spectral finite elements, *CEAS Aeronautical Journal*, Vol. 4, No. 1, pp. 3-10, 2013.
- [12] D. Komatitsch, J.-P. Vilotte, R. Vai, J. M. Castillo-Covarrubias, F. J. Sánchez-Sesma, The spectral element method for elastic wave equations—application to 2-D and 3-D seismic problems, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 9, pp. 1139-1164, 1999.
- [13] W. Witkowski, M. Rucka, J. Chróścielewski, K. Wilde, On some properties of 2D spectral finite elements in problems of wave propagation, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 55, No. 0, pp. 31-41, 2012.
- [14] A. Bobrowski, *Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes: An Introduction*, pp. 4-42, Cambridge Cambridge University Press, 2005.
- [15] M. I. Khodakarami, N. Khaji, M. T. Ahmadi, Modeling transient elastodynamic problems using a novel semi-analytical method yielding decoupled partial differential equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 213-216, No. 1, pp. 183-195, 2012.
- [16] S. Huang, S. Mahadevan, R. Rebba, Collocation-based stochastic finite element analysis for random field problems, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 22, No. 2, pp. 194-205, 2007.
- [1] G. Stefanou, The stochastic finite element method: Past, present and future, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 9-12, pp. 1031-1051, 2009.
- [2] M. Kaminski, *The Stochastic Perturbation Method for Computational Mechanics*, pp. 20-30, Chichester: Wiley, 2013.
- [3] R. G. Ghanem, P. D. Spanos, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, pp. 56-152, New York: Courier Dover Publications, 2003.
- [4] R. Chowdhury, S. Adhikari, High dimensional model representation for stochastic finite element analysis, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 12, pp. 3917-3932, 2010.
- [5] M. Chevreuril, A. Nouy, Model order reduction based on proper generalized decomposition for the propagation of uncertainties in structural dynamics *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 89, No. 2, pp. 241-268, 2012.
- [6] P. Zakian, N. Khaji, A novel stochastic-spectral finite element method for analysis of elastodynamic problems in the time domain, *Meccanica*, Vol. 51, No. 4, pp. 893-920, 2016.
- [7] D. M. Do, W. Gao, C. Song, Stochastic finite element analysis of structures in the presence of multiple imprecise random field parameters, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 300, pp. 657-688, 2016.
- [8] A. Asnafi, Analytic bifurcation investigation of cylindrical shallow shells under lateral stochastic excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 77-84, 2014. (in Persian فارسی)