



## تحلیل ارتعاشات اجباری نانولوله کربنی حاوی سیال بر بستر الاستیک بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده

رضا انصاری خلخال<sup>1\*</sup>، امیر نوروززاده<sup>2</sup>، راهب غلامی<sup>3</sup>

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت  
 2- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت  
 3- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت  
 \*رشت، صندوق پستی 3756، r\_ansari@guilan.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: 02 دی 1393  
 پذیرش: 10 دی 1393  
 ارائه در سایت: 27 دی 1393

کلید واژگان:

ارتعاشات اجباری  
 نانولوله کربنی حاوی سیال  
 بستر الاستیک  
 روش تریب دیفرانسیلی تعمیم یافته  
 بسته مت کانت

### چکیده

در مطالعه حاضر، ارتعاشات نانولوله کربنی که در آن سیال داخلی با سرعت ثابت در جریان بوده و نیروی گسترده خارجی به صورت هارمونیک به آن اعمال می شود مورد تحقیق قرار گرفته است. همچنین در اطراف این نانولوله یک بستر الاستیک ویسکو-پاسترناک تعبیه شده است و شرایط مرزی نانولوله نیز در دو انتها تکیه گاه ساده می باشد. به منظور تحلیل این سیستم و در نظر گرفتن اثرات اندازه کوچک در پاسخ های بدست آمده، از تئوری تنش کوپل استفاده شده و برای مدل سازی نانولوله، تئوری تیر تیموشنکو به کار گرفته شده است. با در نظر گرفتن تمامی انرژی های موجود در سیستم و کار نیروهای خارجی وارد بر آن، اصل همپلتون نوشته شده و معادلات غیرخطی حرکت سیستم به دست آمده است. در ادامه برای تبدیل معادلات با مشتقات جزئی نتیجه شده به معادلات دیفرانسیل معمولی، از روش تریب دیفرانسیلی تعمیم یافته کمک گرفته شده و دامنه تیر گسسته سازی شده است. برای تحلیل پاسخ های فرکانسی نانولوله از بسته مت کانت در نرم افزار متلب استفاده شده است. برای این منظور و با به کار گیری تبدیلات مناسب، معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم موجود به معادلات مرتبه اول تبدیل شده اند. بدین ترتیب تاثیرات اندازه کوچک و به عبارتی تفاوت های تئوری حاضر با تئوری کلاسیک تیر تیموشنکو نشان داده می شود. علاوه بر آن اثرات ابعاد نانولوله، سرعت سیال، نیروی عرضی اعمالی و پارامترهای بستر الاستیک نیز بررسی شده است. مشاهده می شود که میزان و نحوه تاثیر هر یک از این عوامل متفاوت می باشد و در مجموع پاسخ های فرکانسی نانولوله به شکل ملموسی به این تغییرات حساس است.

## Forced vibration analysis of conveying fluid carbon nanotube resting on elastic foundation based on modified couple stress theory

Reza Ansari Khalkhali\*, Amir Norouzzadeh, Raheb Gholami

Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran  
 \* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, r\_ansari@guilan.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 23 December 2014  
 Accepted 31 December 2014  
 Available Online 17 January 2015

**Keywords:**  
 Forced Vibrations  
 Conveying Fluid Carbon Nanotube  
 Elastic Foundation  
 Generalized Differential Quadrature  
 Method  
 MatCont Package

### ABSTRACT

In this study, the vibrations of carbon nanotube are investigated in which the inner fluid flow with constant velocity and the widespread external harmonic force is applied to it. Also the nanotube is embedded in an elastic visco-Pasternak medium and the boundary conditions at two ends of nanotube are simply supported. In order to analyze the system and considering the small scale effects, the couple stress theory is employed and the Timoshenko beam theory is used for modeling the nanotube. The Hamilton's principle is written with taking into account all energies and external works of system and consequently the nonlinear motion equations of the system are achieved. Then with help of generalized differential quadrature method, the obtained partial differential equations are converted to ordinary differential equations and the domain of the beam is discretized. From the MatCont package in MATLAB software, the frequency responses of nanotube are examined. To this aim, the second order differential equations are turned to first order ones with appropriate transformations. So the small scale effect or equivalently the differences between present approach and classical Timoshenko beam theory are presented. Furthermore the effects of the size of nanotube, fluid velocity, applied transverse force and the elastic foundation parameters are studied. It is observed that the dependency of frequency response on each of these parameters is different and it significantly changes with these factors.

### 1- مقدمه

حدود دو دهه گذشته که نانولوله کربنی<sup>1</sup> توسط ایچیمیا [1] کشف گردیده، این روند شتاب بیشتری به خود گرفته است. نانولوله های کربنی به دلیل

در سال های اخیر و همزمان با پیشرفت سریع دانش و تکنولوژی، استفاده از نانولوله ها در بسیاری از کاربردهای صنعتی گسترش یافته است. به خصوص از

1- Carbon Nanotube (CNT)

Please cite this article using:

R. Ansari Khalkhali, A. Norouzzadeh, R. Gholami, Forced vibration analysis of conveying fluid carbon nanotube resting on elastic foundation based on modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 27-34, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

قرار داده است. ارتعاشات آزاد نانولوله بور-نیتريدی<sup>13</sup> دوجداره حاوی سیال در [23] مطالعه شده و از تئوری تنش کوپل تیر مدل شده توسط تئوری تیر تیموشنکو استفاده گردیده است.

همانگونه که از توضیحات ذکر شده مشخص است، مطالعات زیادی در زمینه بررسی پایداری، فرکانس‌های طبیعی و سرعت‌های بحرانی در ارتعاشات آزاد نانولوله‌های حاوی سیال به انجام رسیده است. علیرغم این حجم نسبتاً بالای تحقیقات صورت گرفته، ارتعاشات اجباری این نانولوله‌ها آنچنان که باید مورد توجه قرار نگرفته است. لذا کمبود پژوهشی که با استفاده از تئوری غیرکلاسیک مناسب و با روش‌های عددی قوی، این مساله وابسته به اندازه<sup>14</sup> را بررسی کند احساس می‌شود.

در مطالعه حاضر به تحلیل ارتعاشات تحت تحریک خارجی نانولوله کربنی حاوی سیال که در یک بستر الاستیک تعبیه شده است پرداخته می‌شود. برای این منظور از تئوری تیر تیموشنکو برای مدل‌سازی نانولوله استفاده شده است که با در نظر گرفتن اثرات اینرسی چرخشی و تغییر شکل برشی عرضی، مدل کامل‌تری از تئوری اویلر برنولی ارائه می‌کند. همچنین از تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای مطالعه رفتار وابسته به اندازه نانولوله استفاده شده است. بستر الاستیک موردنظر توسط مدل ویسکو-پاسترناک<sup>15</sup> خطی ارائه شده است. همچنین حرکت سیال داخلی به صورت جریان پلاگ<sup>16</sup> لحاظ می‌شود.

در ابتدا تنش‌ها و کرنش‌های کلاسیک و مرتبه بالای تئوری تنش کوپل اصلاح شده بدست آمده است. پس از آن انرژی‌های کرنشی، جنبشی، کار نیروی خارجی و همینطور کار و انرژی حاصل از نیروهای بستر الاستیک محاسبه شده و از اصل همیلتون<sup>17</sup> برای بدست آوردن معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت نانولوله استفاده شده است. در ادامه از روش تریب دیفرانسیلی تعمیم‌یافته<sup>18</sup> [24] برای گسسته‌سازی<sup>19</sup> دامنه تیر و تبدیل معادلات با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیلی معمولی بهره برده شده است. سپس معادلات مرتبه دوم حاصل با استفاده از تبدیلات مناسب به معادلات مرتبه اول تبدیل شده‌اند. در نهایت با استفاده از بسته مت‌کانت<sup>20</sup> [25] در نرم‌افزار متلب، پاسخ‌های فرکانسی تحت تحریک خارجی نانولوله کربنی حاوی سیال بدست آمده است.

## 2- معادلات حرکت نانولوله

بر اساس تئوری تنش کوپل، انرژی کرنشی در یک ماده الاستیک همگن که فضای  $\Omega$  را اشغال می‌کند عبارتست از [15]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dv \quad (1)$$

که در آن  $\varepsilon_{ij}$  تنسور کرنش و  $\chi_{ij}$  تنسور گرادین چرخشی متقارن است. همچنین  $\sigma_{ij}$  و  $m_{ij}$  به ترتیب تنسور تنش کلاسیک و مرتبه بالا هستند که به طریق زیر بدست می‌آیند:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2\text{-الف})$$

ویژگی‌های منحصر به فرد مکانیکی، الکتریکی و شیمیایی که دارند مورد توجه بسیار قرار می‌گیرند. از جمله ویژگی‌های جالب توجه این نانولوله‌ها، سفتی و استحکام بالا نسبت به وزن و همینطور رسانایی الکتریکی و دمایی بالا است [2-4]. از این رو مطالعه ارتعاشات نانولوله‌های کربنی نیز مورد استقبال چشمگیر محققان قرار گرفته است که در این میان بررسی رفتار ارتعاشی غیرخطی این سیستم‌ها از اهمیت و دقت بالاتری برخوردار خواهد بود [5].

از میان کاربردهای گسترده این نانولوله‌ها [6-8]، استفاده از آن‌ها به عنوان دستگاه‌های حامل سیال از اهمیت فراوانی برخوردار است؛ چرا که شامل قابلیت‌هایی مانند ذخیره و انتقال سیال می‌باشد [9]. به همین دلیل رفتار ارتعاشی نانولوله‌های کربنی حاوی سیال در مطالعات مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است و همچنان جنبه‌های فراوانی از آن نیاز به پژوهش‌های بیشتری دارد.

به طور کلی تئوری‌های مورد استفاده در منابع را می‌توان در دو دسته تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته کلاسیک و غیرکلاسیک دسته‌بندی نمود. از آنجا که رفتار مواد در ابعاد بسیار کوچک، متفاوت است و به این دلیل که در تئوری کلاسیک تأثیرات اندازه لحاظ نشده است، لذا استفاده از این تئوری در مطالعه ساختارهای میکرو و نانو<sup>1</sup> از دقت کافی برخوردار نخواهد بود. از این رو به منظور غلبه بر این مشکل، تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته وابسته به اندازه ماده ارائه شده‌اند که از آن جمله می‌توان به تئوری الاستیسیته غیرمحل<sup>2</sup> [10]، تنش کوپل<sup>3</sup> [11, 12]، گرادین کرنش<sup>4</sup> [13]، الاستیسیته سطحی<sup>5</sup> [14]، تنش کوپل اصلاح شده<sup>6</sup> [15] و گرادین کرنش اصلاح شده<sup>7</sup> [16] اشاره کرد.

در تئوری تنش کوپل و شکل اصلاح شده آن علاوه بر سادگی روابط ارائه شده، دقت بالایی نیز در ارائه پاسخ‌های انواع سیستم‌های مورد مطالعه در پدیده‌های گوناگون مکانیکی مشاهده شده است [17, 18]. در تئوری تنش کوپل اصلاح شده، یانگ [15] نشان داد که علاوه بر دو ثابت لامه<sup>8</sup>، تنها به یک پارامتر مقیاس طول<sup>9</sup> برای بیان وابستگی رفتار ماده به ابعاد آن نیاز است. این ثابت از خواص مکانیکی ماده است و به صورت تجربی و آزمایشگاهی تعیین می‌شود.

از میان تحقیقات انجام شده در سال‌های اخیر در زمینه نانولوله‌های کربنی حاوی سیال می‌توان به [19, 20] اشاره کرد. در [19] با استفاده از تئوری کلاسیک و در [20] به کمک تئوری غیرمحل<sup>4</sup> ارینگن و مدل‌سازی مساله با تئوری تیر اویلربرنولی، ارتعاشات آزاد نانولوله کربنی دارای جریان سیال داخلی به همراه پایداری<sup>10</sup> سیستم مطالعه شده است. در [21] پایداری نانولوله در دو نوع مختلف سیال درون آن نیز توسط تئوری غیرمحل<sup>4</sup> بررسی شده است. ونگ [22] ارتعاشات آزاد نانولوله را با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادین<sup>11</sup> برای مدل‌های تیر اویلر برنولی و تیموشنکو تحقیق کرده و پاسخ‌های فرکانسی و سرعت‌های بحرانی<sup>12</sup> سیستم را مورد بررسی

- 1- Micro- and Nanostructures
- 2- Nonlocal Elasticity Theory
- 3- Couple Stress Theory
- 4- Strain Gradient Theory
- 5- Surface Elasticity Theory
- 6- Modified Couple Stress Theory
- 7- Modified Strain Gradient Theory
- 8- Lamé constants
- 9- Length scale parameter
- 10- Stability
- 11- Gradient Elasticity
- 12- Critical velocity

13- Boron Nitride Nanotube (BNNT)

14- Size-dependent

15- Visco-Pasternak

16- Plug flow

17- Hamilton's Principle

18- Generalized Differential Quadrature (GDQ)

19- Discretization

20- MatCont

$$\theta_2 = -\frac{1}{2}\left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\chi_{12} = \chi_{21} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (6)$$

بدین ترتیب با استفاده از رابطه (2-ج) و کرنش‌های بدست آمده در روابط (5) و (6)، می‌توان اعضای تنسورهای تنش کلاسیک و مرتبه بالا را به ترتیب در روابط (7) و (8) ارائه نمود:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right),$$

$$\sigma_{13} = k_s \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \quad (7)$$

$$m_{12} = m_{21} = -\frac{\mu l^2}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (8)$$

که در آن  $k_s$  ضریب تصحیح برشی است. در ادامه با معرفی پارامترهای رابطه (9)

$$\bar{A} = (\lambda + 2\mu)A, \quad \bar{B} = \mu A, \quad \bar{D} = (\lambda + 2\mu)I \quad (9)$$

نیروها و گشتاورهای کلاسیک و مرتبه بالا، طبق روابط (10) خواهند بود:

$$N = \int_A \sigma_{11} dA = \bar{A} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right],$$

$$Q = \int_A \sigma_{13} dA = k_s \bar{B} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right),$$

$$M = \int_A \sigma_{11} z dA = -\bar{D} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$Y = \int_A m_{12} dA = -\frac{l^2}{2} \bar{B} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (10)$$

بنابراین با توجه به روابط فوق، انرژی کرنشی سیستم براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده عبارتست از:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dA dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left( N \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - M \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + Q \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) - \frac{Y}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) dx \quad (11)$$

کار نیروی گسترده خارجی  $F(x, t)$  که به صورت عرضی به تیر وارد می‌شود، برابر است با:

$$\Pi_F = \int_0^L F(x, t) w dx \quad (12)$$

همچنین کار ناشی از نیروهای اعمالی بستر ویسکو-پاسترنک بر سطح بیرونی نانولوله و انرژی حاصل از ضریب میرایی این بستر توسط روابط (13) و (14) ارائه می‌شوند [23]:

$$W^{ext} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( -K_m w^2 + G_m w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (13)$$

$$D_m = \frac{1}{2} \int_0^L \left( C_m \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx \quad (14)$$

انرژی جنبشی نانولوله و سیال به ترتیب توسط رابطه (15-الف) و رابطه

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}); \quad \theta_i = \frac{1}{2}(\text{curl}(u))_i \quad (2-ب)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (2-ج)$$

در اینجا  $u_i$  عضو بردار جابجایی  $u$  است.  $l$  پارامتر مقیاس طول ماده می‌باشد که مرتبط با گردیدان چرخشی متقارن است. علاوه بر آن  $\lambda$  و  $\mu$  دو ثابت کلاسیک لامه هستند که از رابطه (3) بدست می‌آیند [26]:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

همانگونه که در شکل 1 نشان داده شده است، سیستم مورد مطالعه یک نانولوله با سطح مقطع  $A$ ، طول  $L$ ، چگالی  $\rho$  و مدول الاستیسیته  $E$  است که در آن سیال غیرتراکم‌پذیر با سطح مقطع جریان  $A_f$ ، چگالی  $\rho_f$  و سرعت ثابت  $V$  در جریان است. شعاع داخلی و خارجی سطح مقطع به ترتیب  $R_i$  و  $R_o$  بوده و ضخامت آن  $h$  می‌باشد. گشتاور سطح دوم لوله و سیال به ترتیب  $I_f$  و  $I$  است. همچنین لوله توسط یک بستر ویسکوپاسترنک احاطه شده است. این بستر توسط ثابت فنر  $K_m$ ، ضریب برش  $G_m$  و ضریب میرایی  $C_m$  تعریف می‌شود. شرایط مرزی نانولوله در دو انتها تکیه‌گاه ساده می‌باشد. نیروی گسترده خارجی  $F(x, t)$  نیز در طول سیستم و به صورت عرضی به آن اعمال می‌شود.

حال رابطه (4) که مولفه‌های جابجایی در تئوری تیر تیموشنکو را بیان می‌کند، در نظر گرفته می‌شود [27]:

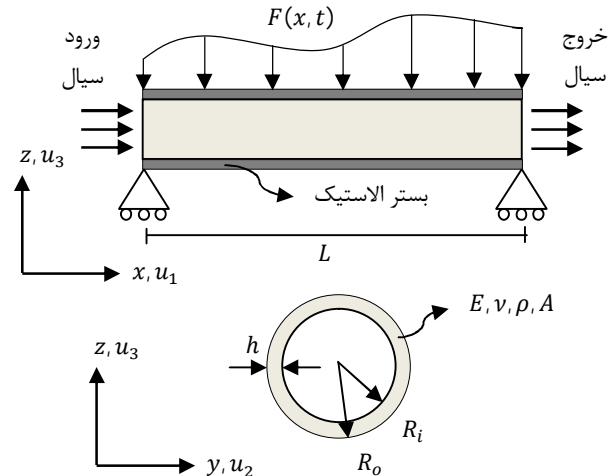
$$u_1 = u(x, t) - z\psi(x, t), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(x, t) \quad (4)$$

که در آن  $u(x, t)$ ،  $w(x, t)$  و  $\psi(x, t)$  به ترتیب نشان‌دهنده جابجایی طولی مقطع میانی تیر، جابجایی عرضی تیر و زاویه چرخش سطح نسبت به محور عمودی هستند. بنابراین به کمک تئوری تیموشنکو و با استفاده از روابط ون کارمن<sup>3</sup> می‌توان روابط غیرخطی کرنش را بدست آورد [28]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2,$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \quad (5)$$

همچنین از روابط (2-ب) و (4) نتیجه می‌شود:



شکل 1 تصویری از نانولوله مورد مطالعه و ویژگی‌های مکانیکی و هندسی آن

1- Shear constant  
2- Damping constant  
3- Von Karman equations

(15-ب) بیان می‌شوند [23]:

$$\begin{aligned} \Pi_T &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left[ A \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (15-الف) \\ \Pi_{T_f} &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{A_f} \rho_f \left( \frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ &+ \left( \frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial \psi}{\partial t} + V \right)^2 dA_f dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left( \rho_f A_f \left( \frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \rho_f A_f \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right. \\ &\left. + \rho_f A_f V^2 + 2\rho_f A_f \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_f I_f \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right) dx \quad (15-ب) \end{aligned}$$

با استفاده از اصل همپلتون

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \Pi_T + \delta \Pi_{T_f} - \delta \Pi_s + \delta \Pi_f + \delta W^{ext} - \delta D_m dt) = 0 \quad (16)$$

و جایگذاری روابط (11) تا (15) در رابطه (16)، انتگرال گیری جز به جز و برابر صفر قرار دادن ضرایب  $\delta u$ ،  $\delta w$  و  $\delta \psi$ ، معادلات غیرخطی حاکم به دست می‌آید:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = (\rho A + \rho_f A_f) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (17-الف)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \\ - \rho_f A_f \left( 2V \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - K_m w \\ + G_m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C_m \frac{\partial w}{\partial t} = (\rho A + \rho_f A_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (17-ب) \end{aligned}$$

$$Q - \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y}{\partial x} = (\rho I + \rho_f I_f) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (17-ج)$$

به منظور بی‌بعدسازی روابط به دست آمده، پارامترهای بدون بعد رابطه (18) تعریف می‌شوند:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{\bar{A}}{\rho A}} \quad (u^*, w^*) = \frac{(u, w)}{h}, \quad \psi^* = \psi,$$

$$\eta = \frac{L}{h}, \quad c = \frac{l^2}{4h^2}, \quad \{a, b\} = \frac{\{\bar{A}, \bar{B}\}}{\bar{A}}, \quad d = \frac{\bar{D}}{\bar{A}h^2},$$

$$I_0 = \frac{\rho A + \rho_f A_f}{\rho A}, \quad I_2 = \frac{\rho I + \rho_f I_f}{\rho A h^2},$$

$$k_b = \frac{2\rho_f A_f V}{\sqrt{\bar{A}\rho A}}, \quad v = \sqrt{\frac{\rho_f A_f}{\bar{A}}} V, \quad f = \frac{FL^2}{\bar{A}h}$$

$$k_m = \frac{K_m L^2}{\bar{A}}, \quad g_m = \frac{G_m}{\bar{A}}, \quad c_m = \frac{C_m L}{\sqrt{\bar{A}\rho A}} \quad (18)$$

در ادامه مقاله برای سهولت از نماد \* صرفنظر می‌شود. در نتیجه معادلات کوپل غیرخطی حاکم بر حرکت بدون بعد نانولوله کربنی حاوی سیال که در یک بستر الاستیک قرار گرفته و نیروی خارجی به آن اعمال می‌شود، طبق

روابط (19) نوشته می‌شوند:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + z_1 = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (19-الف)$$

$$\begin{aligned} k_s b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{bc}{\eta^2} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) \\ - k_b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_m w + g_m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ - c_m \frac{\partial w}{\partial t} + f(x, t) + z_2 = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (19-ب) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_s b \eta \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \eta \psi \right) + d \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{bc}{\eta} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \\ = I_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (19-ج) \end{aligned}$$

که در آن  $z_1$  و  $z_2$  جملات غیرخطی بوده و عبارتند از:

$$z_1 = \frac{a}{\eta} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (20-الف)$$

$$z_2 = \frac{a}{\eta} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3}{2\eta} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (20-ب)$$

سیستم دارای تکیه‌گاه ساده در دو انتها می‌باشد؛ شرایط مرزی مدنظر

مطابق روابط (21) در هر سمت به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u = w = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dw}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{1}{\eta^3} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d\psi}{dx} \\ = (d + bc) \frac{d\psi}{dx} - \frac{bc}{\eta} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (21) \end{aligned}$$

### 3- حل عددی

با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته [24]، به گسسته‌سازی معادلات با مشتقات جزئی حاصل در دامنه تیر پرداخته و معادلات دیفرانسیلی معمولی بدست خواهد آمد. برای گسسته‌سازی دامنه از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$x_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{i-1}{n-1} \pi \right); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

در این رابطه  $n$  تعداد نقاط در نظر گرفته شده در طول تیر می‌باشد. بدین صورت بردارهای  $u$ ،  $w$  و  $\psi$  که به ترتیب شامل مقادیر جابجایی طولی، عرضی و زاویه چرخشی نقاط مورد نظر هستند، براساس رابطه (23) تعریف می‌شوند:

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]^T \quad (23-الف)$$

$$w = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n]^T \quad (23-ب)$$

$$\psi = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_n]^T \quad (23-ج)$$

بنابراین با کمک روش GDQ شکل گسسته‌سازی شده معادلات بدون بعد حرکت بدست می‌آید:

$$a D^{(2)} u + z_1 = I_0 \ddot{u} \quad (24-الف)$$

$$\begin{aligned} k_s b (D^{(2)} w - \eta D^{(1)} \psi) - \frac{bc}{\eta^2} (D^{(4)} w + \eta D^{(3)} \psi) \\ - k_b D^{(1)} \dot{w} - v^2 D^{(2)} w - k_m w \\ + g_m D^{(2)} w - c_m \dot{w} + f + z_2 = I_0 \ddot{w} \quad (24-ب) \end{aligned}$$

$10^7$  نیوتن بر متر مربع، ضریب برشی  $10^{-7}$  نیوتن و ضریب میرایی  $10^{-3}$  نیوتن ثانیه بر متر مربع است. علاوه بر آن نسبت طول نانولوله به شعاع خارجی سطح مقطع 10 و سرعت سیال درون لوله 500 متر بر ثانیه (کمتر از سرعت بحرانی جریان سیال) و دامنه نیروی هارمونیک اعمالی نیز برابر 0/1 نیوتن بر متر در نظر گرفته شده است. همچنین مقیاس طول بی‌بعد  $(l/h)$  عدد 3 می‌باشد. در این خصوص لازم به ذکر است که لام و همکاران [16] مقدار تجربی پارامتر مقیاس طول برای یک تیر در ابعاد مایکرو را 17/6 مایکرومتر ارائه نموده‌اند. با این حال تا به امروز هیچگونه مقدار تجربی برای این پارامتر در ابعاد نانو در مراجع موجود معرفی نشده است. از این رو و با توجه به نسبت‌های بی‌بعد معرفی شده در [15, 16] و مقادیر لحاظ شده در [23]، در این مقاله مقدار 3 برای این مقیاس اعمال می‌شود. در ادامه مقاله از مقادیر ذکر شده برای به دست آوردن نتایج استفاده شده است مگر آنکه مقادیر دیگری عنوان شده باشد.

در ابتدا به منظور مقایسه نتایج بدست آمده در پژوهش حاضر با نتایج حاصل از تئوری کلاسیک تیر تیموشنکو، جدول 1 و شکل 2 آورده شده است. در جدول 1 اولین فرکانس طبیعی خطی بدون بعد سیستم به ازای مقادیر مختلف مقیاس طول بی‌بعد  $(l/h)$  در تئوری تنش کوپل و همچنین مقدار آن در تئوری کلاسیک نشان داده شده است. شکل 2 نیز نمودار پاسخ فرکانسی سیستم را نشان می‌دهد که در آن محور افقی نسبت فرکانس تحریک خارجی سیستم به اولین فرکانس طبیعی خطی آن می‌باشد و محور عمودی دامنه ارتعاشی در میانه تیر را بیان می‌کند.

در جدول 1 ملاحظه می‌شود که به ازای تمامی مقادیر مقیاس طول، فرکانس طبیعی حاصل از تئوری حاضر مقدار بیشتری از تئوری کلاسیک دارد. بنابراین تئوری کلاسیک فرکانس‌های طبیعی نانولوله را کمتر از آنچه که هست پیش‌بینی می‌کند. همچنین دیده می‌شود که با کاهش مقدار مقیاس طول که متناظر با افزایش ابعاد نانولوله می‌باشد، نتایج تئوری موجود به تئوری کلاسیک نزدیک می‌شود و برعکس آن با افزایش مقیاس طول فرکانس‌ها از تئوری کلاسیک فاصله می‌گیرند. در شکل 2 مشاهده می‌شود که هنگامیکه فرکانس تحریک خارجی به مقادیر نزدیک فرکانس طبیعی اولیه سیستم می‌رسد، دامنه ارتعاشات میانه تیر افزایش قابل ملاحظه‌ای می‌یابد و پس از عبور از این مقدار مجدداً کاهش می‌یابد. با افزایش مقیاس طول بدون بعد، این افزایش دامنه در فرکانس‌های بالاتری رخ می‌دهد. علاوه بر آن در این حالت بیشینه دامنه میانه تیر نیز کم می‌شود.

جدول 1 اولین فرکانس طبیعی خطی سیستم به ازای مقیاس‌های طول متفاوت در تئوری تنش کوپل و در تئوری کلاسیک

فرکانس طبیعی خطی اول	تئوری تنش کوپل - $l/h$
1/4969	5
1/3400	4
1/1889	3
1/0572	2
0/9637	1
0/9293	0/1
0/9163	تئوری کلاسیک

$$k_s b \eta (D^{(1)} w - \eta \psi) + d D^{(2)} \psi + \frac{bc}{\eta} (D^{(3)} w + \eta D^{(2)} \psi) = I_2 \ddot{\psi} \quad (24\text{-ج})$$

که در آن

$$z_1 = \frac{a}{\eta} (D^{(1)} w) \circ (D^{(2)} w) \quad (25\text{-الف})$$

$$z_2 = \frac{a}{\eta} \left( (D^{(1)} u) \circ (D^{(2)} w) + (D^{(2)} u) \circ (D^{(1)} w) + \frac{3}{2\eta} (D^{(1)} w) \circ (D^{(1)} w) \circ (D^{(2)} w) \right) \quad (25\text{-ب})$$

که در این روابط  $f$  برداری شامل مقادیر نیروی خارجی در طول تیر می‌باشد. در مطالعه حاضر، نیروی عرضی وارد بر سیستم به صورت هارمونیک  $f(x, t) = F_0 \cos(\omega t)$  لحاظ می‌شود که در نتیجه شکل بی‌بعد شده آن  $f(x, t) = f_0 \cos(\Omega t)$  است. در این روابط  $\omega$  و  $\Omega$  فرکانس‌های تحریک خارجی  $(\Omega = \omega L \sqrt{\frac{\rho A}{A h}})$ ،  $F_0$  و  $f_0$  دامنه‌های نیروی خارجی  $(f_0 = \frac{F_0 L^2}{A h})$  به ترتیب در حالات با بعد و بی بعد خواهند بود.

ضرایب وزنی  $D^{(r)}$  مرتبط با مشتق مرتبه  $r$  ام در GDQ بوده و از روابط (26) بدست می‌آیند:

$$D_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^n (x_i - x_k)}{(x_i - x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^n (x_j - x_k)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j \quad (26\text{-الف})$$

$$D_{ij}^{(r)} = r \left( D_{ii}^{(r-1)} D_{ij}^{(1)} - \frac{D_{ij}^{(r-1)}}{(x_i - x_j)} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j \quad r = 2, 3, \dots, n-1 \quad (26\text{-ب})$$

$$D_{ij}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}^{(r)} \quad i, j = 1, 2, \dots, n, i = j \quad r = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (26\text{-ج})$$

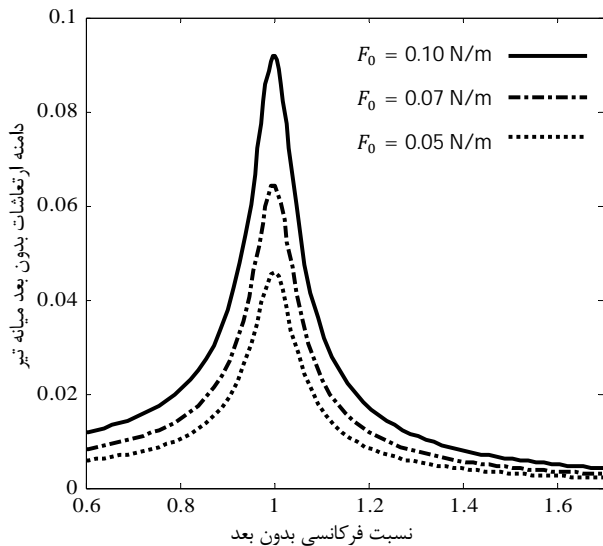
همانگونه که در روابط (24) مشاهده می‌شود، استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته به مجموعه  $3n$  معادله غیرخطی کوپل دیفرانسیلی معمولی مرتبه دوم منجر شده است. در اینجا با در نظر گرفتن  $X = [u^T \ w^T \ \psi^T]^T$  و استفاده از تغییر متغیرهای

$$y_{2i-1} = X_i, \quad y_{2i} = \dot{X}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 3n \quad (27)$$

معادلات موجود به  $2 \times (3n)$  معادله دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول تبدیل خواهند شد. دلیل اعمال تبدیلات موجود در روابط (27) آن است که شکل مرتبه اول معادلات دیفرانسیلی معمولی، حالت استاندارد برای حل این معادلات در اکثر نرم‌افزارهای موجود می‌باشد. حال می‌توان با استفاده از بسته مت‌کانت [25] در نرم‌افزار متلب به تحلیل سیستم پرداخته و پاسخ‌های فرکانسی آن را بدست آورد.

#### 4- نتایج به دست آمده و تحلیل آن‌ها

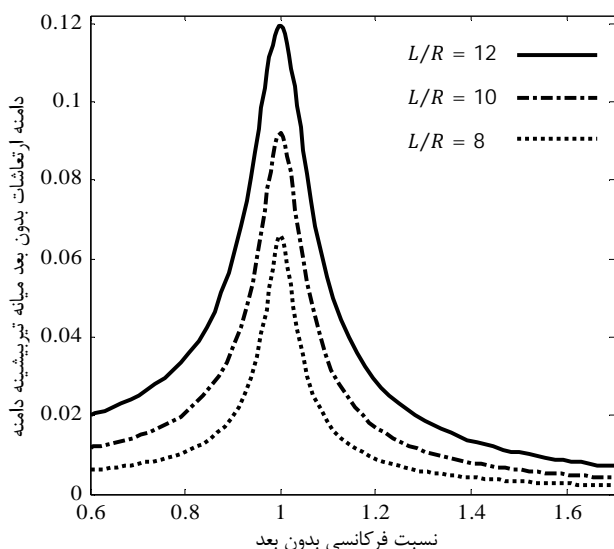
خصوصیات نانولوله کربنی حاوی سیال مورد استفاده به این قرار است: مدول الاستیسیته 1 تراپاسکال، نسبت پواسون 0/25، چگالی 2330 کیلوگرم بر مترمکعب، شعاع داخلی 0/35 نانومتر و شعاع خارجی 0/7 نانومتر. همچنین چگالی سیال داخلی 1000 کیلوگرم بر مترمکعب و ضریب تصحیح برشی 0/83 است. بستر ویسکو-پاسترناک در نظر گرفته شده دارای ثابت فنر



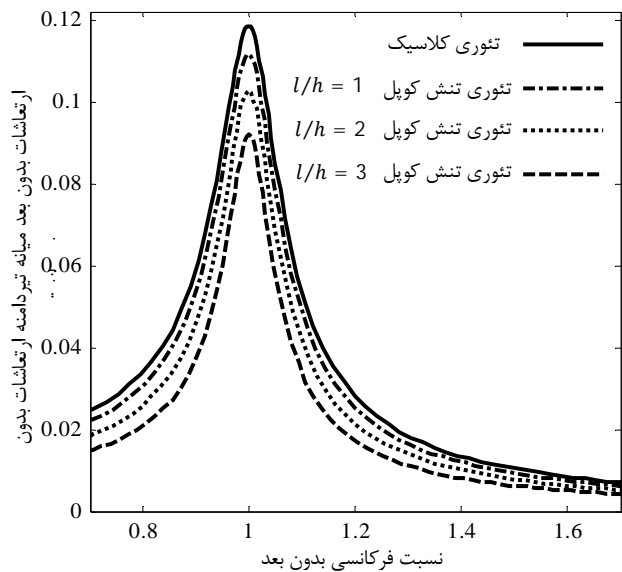
شکل 3 پاسخ فرکانسی سیستم به ازای مقادیر مختلف دامنه نیروی خارجی سرعت جریان سیال تفاوت محسوسی در رفتار ارتعاشی ایجاد نمی‌کند. لازم به ذکر است که مقادیر در نظر گرفته شده کمتر از سرعت بحرانی جریان داخلی سیال می‌باشند.

موضوع دیگری که با توجه به شکل‌های بررسی شده تا به اینجا نتیجه می‌شود آن است که رفتار غیرخطی سیستم مورد مطالعه ضعیف می‌باشد. این مساله با توجه به تحذب کم منحنی‌ها که نشان‌دهنده رفتار غیرخطی سیستم است، تشخیص داده می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که تغییرات پارامترهای آزمایش شده نیز تاثیری بر افزایش غیرخطی بودن ارتعاشات نانولوله حاوی سیال نمی‌گذارد.

در این قسمت تاثیرات بستر الاستیک در نظر گرفته شده برای نانولوله بررسی خواهد شد. همانگونه که پیشتر ذکر شد عملکرد این بستر با استفاده از سه مولفه ثابت فنر، ضریب برشی و ضریب میرایی تعریف می‌شود. بدین ترتیب در شکل‌های 6 تا 8 تاثیرات هر یک از این پارامترها به صورت جداگانه بررسی خواهد شد.



شکل 4 پاسخ فرکانسی سیستم به ازای مقادیر مختلف نسبت طول تیر به شعاع سطح مقطع آن



شکل 2 پاسخ فرکانسی سیستم به ازای مقیاس‌های طول متفاوت در تئوری تنش کوپل و در تئوری کلاسیک

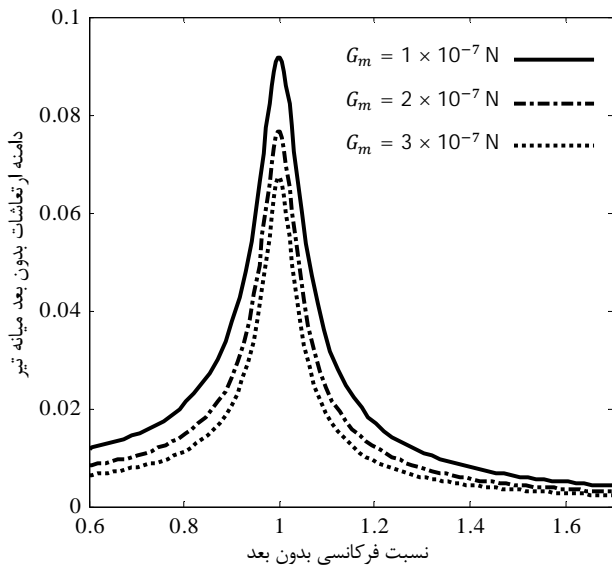
همچنین در این شکل می‌توان دید که تمامی نمودارهای رسم شده از تئوری حاضر پایین‌تر از نمودار مربوط به تئوری کلاسیک قرار می‌گیرند. این بدان معناست که در یک نسبت فرکانسی مشخص، تئوری کلاسیک دامنه ارتعاشات نانولوله را بالاتر از آنچه که در واقع رخ می‌دهد گزارش می‌کند. در این شکل نیز مانند جدول 1، کاهش مقیاس طول منجر به نزدیک شدن نتایج دو تئوری می‌شود. بنابراین به عنوان یک نتیجه مهم می‌توان عنوان کرد که چنانچه ابعاد نانولوله کوچک باشد (مقادیر بزرگ  $l/h$ ) استفاده از تئوری کلاسیک با خطای قابل توجهی همراه است اما در حالتیکه ابعاد نانولوله بزرگ باشد (مقادیر کوچک  $l/h$ ) استفاده از تئوری کلاسیک مناسب بوده و نتایج حاصل از آن قابل قبول خواهد بود.

در ادامه تاثیرات پارامترهای گوناگون بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی مورد مطالعه، بررسی خواهد شد. در شکل 3 میزان و نحوه اثر نیروی خارجی اعمال شده بر سیستم نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که افزایش نیروی عرضی منجر به آن می‌شود که فرکانس تشدید<sup>1</sup> کاهش یافته و در نتیجه سیستم در فرکانس‌های تحریک پایین‌تری افزایش دامنه را تجربه کند. علاوه بر آن، مطابق آنچه که انتظار می‌رود این افزایش مقدار نیروی خارجی باعث می‌شود که دامنه ارتعاشات تیر به شکل چشمگیری زیاد شود. به عنوان مثال در دامنه نیروی 0/10 نیوتن بر متر بیشینه ارتعاشات 0/093 می‌باشد در حالیکه در دامنه نیروی 0/05 نیوتن بر متر، این مقدار 0/046 است.

در شکل 4 پاسخ‌های فرکانسی نانولوله در مقادیر متفاوت نسبت طول به شعاع سطح مقطع با یکدیگر مقایسه شده‌اند. دیده می‌شود که در تیرهای با نسبت بالای طول به ابعاد سطح مقطع -که اصطلاحاً تیر مورد نظر لاغر نامیده می‌شود- دامنه ارتعاشی سیستم به مراتب بالاتر از حالتی است که تیر دارای نسبت کوچک طول به ابعاد سطح مقطع -به اصطلاح تیر چاق- باشد. همچنین با افزایش این نسبت، فرکانس مربوط به رشد دامنه ارتعاشات نیز کاهش می‌یابد.

شکل 5 به بررسی میزان تاثیر سرعت سیال داخلی بر پاسخ فرکانسی مساله اختصاص داده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود تغییرات

1- Resonance



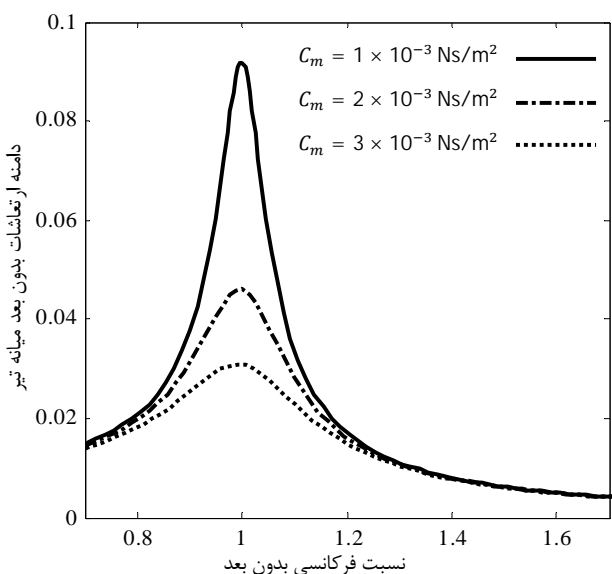
شکل 7 پاسخ فرکانسی سیستم به ازای مقادیر مختلف ضریب برشی بستر الاستیک

ضریب میرایی از  $1 \times 10^{-3}$  به  $3 \times 10^{-3}$  نیوتن ثانیه بر متر مربع برسد، بیشینه دامنه ارتعاشی حدوداً یک سوم برابر خواهد شد. نکته قابل توجه دیگر آن است که برخلاف سایر پارامترهای بررسی شده، تغییرات ضریب میرایی هیچ تاثیری در فرکانس تشدید سیستم از خود بر جای نمی‌گذارد.

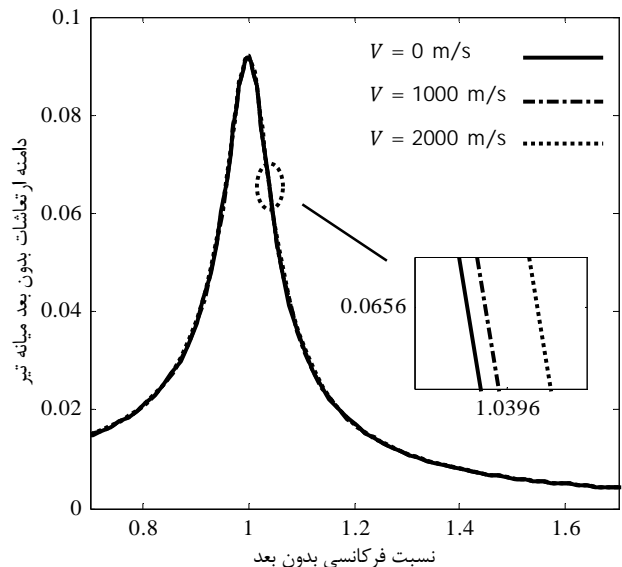
در اینجا لازم به ذکر است که با توجه به نتایج بررسی شده در شکل‌های 6 تا 8، مشاهده می‌شود که پارامترهای مختلف بستر الاستیک نیز بر رفتار غیرخطی سیستم تاثیری ندارند.

### 5- نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر ارتعاشات تحت تحریک خارجی یک نانولوله کربنی حاوی سیال که در بستر الاستیک قرار گرفته، بررسی شده است. برای این منظور از تئوری تنش کوپل اصلاح شده استفاده شده و نانولوله مورد نظر به عنوان تیر تیموشنکو مدل شده است. معادلات غیر خطی حاکم بر حرکت سیستم به



شکل 8 پاسخ فرکانسی سیستم به ازای مقادیر مختلف ضریب میرایی بسترالاستیک

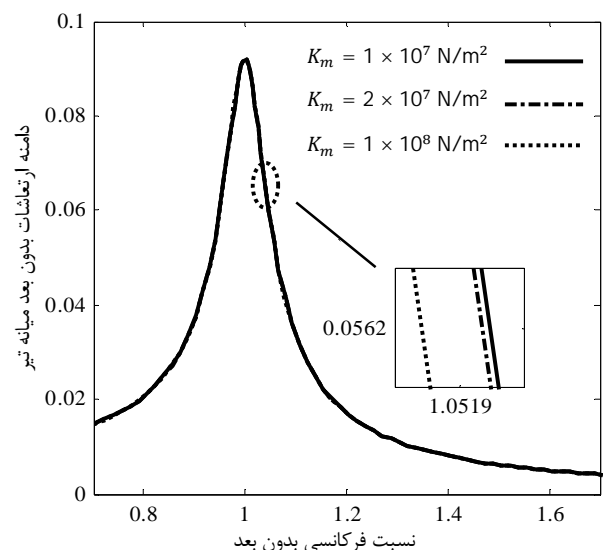


شکل 5 پاسخ فرکانسی سیستم به ازای مقادیر مختلف سرعت جریان سیال

در شکل 6 مشاهده می‌شود که میزان تاثیر ثابت فنر بستر ویسکو-پاسترناک بر پاسخ فرکانسی نانولوله کربنی چندان چشمگیر نمی‌باشد. هر چند که در یک نسبت فرکانسی مشخص، افزایش مقدار آن تا حدودی منجر به کاهش دامنه ارتعاشات سیستم می‌شود. همچنین این افزایش به مقدار کمی افزایش فرکانس تشدید را در پی خواهد داشت.

شکل 7 نشان می‌دهد که افزایش مقدار ضریب برشی بستر الاستیک به شکل قابل توجهی دامنه ارتعاشات نانولوله را کاهش می‌دهد. به گونه‌ای که با افزایش آن از مقدار  $1 \times 10^{-7}$  نیوتن به  $2 \times 10^{-7}$  نیوتن، بیشینه دامنه ارتعاشی بدون بعد میانه تیر از 0/093 به 0/077 کاهش پیدا می‌کند. همچنین نتیجه می‌شود که با افزایش این ضریب، فرکانس تشدید نیز بالا می‌رود.

در شکل 8 مشاهده می‌شود که افزایش هر چه بیشتر ضریب میرایی سیستم منجر به دمپ کردن ارتعاشات می‌شود و همانگونه که انتظار می‌رود دامنه حرکت سیستم را به شدت کاهش می‌دهد. به عنوان نمونه چنانچه



شکل 6 پاسخ فرکانسی سیستم به ازای مقادیر مختلف ثابت فنر بستر الاستیک

- [7] V. Garcia-Gradilla, J. Orozco, S. Sattayasamitsathit, F. Soto, F. Kuralay, A. Pourazary, A. Katzenberg, W. Gao, Y. Shen, J. Wang, Functionalized ultrasound-propelled magnetically guided nanomotors: Toward practical biomedical applications, *ACS nano*, Vol. 7, No. 10, pp. 9232-9240, 2013.
- [8] K. T. Kim, S. A. Meeuwissen, R. J. Nolte, J. C. van Hest, Smart nanocontainers and nanoreactors, *Nanoscale*, Vol. 2, No. 6, pp. 844-858, 2010.
- [9] G. Hummer, J. C. Rasaiah, J. P. Noworyta, Water conduction through the hydrophobic channel of a carbon nanotube, *Nature*, Vol. 414, No. 6860, pp. 188-190, 2001.
- [10] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 1983.
- [11] R. A. Toupin, Elastic materials with couple-stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 385-414, 1962.
- [12] R. Mindlin, H. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 415-448, 1962.
- [13] E. Aifantis, Strain gradient interpretation of size effects, *International Journal of Fracture*, Vol. 95, No. 1-4, pp. 299-314, 1999.
- [14] M. Gurtin, J. Weismüller, F. Larche, A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium, *Philosophical Magazine A*, Vol. 78, No. 5, pp. 1093-1109, 1998.
- [15] F. Yang, A. Chong, D. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002.
- [16] D. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, 2003.
- [17] A.R. Askari, M. Tahani, Presenting a size-depending electro-mechanical model for rectangular plates-based resonant micro-sensors based on modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 8, pp. 121-130, 2014. (In Persian)
- [18] A. Bakhsheshy, K. Khorshidi, Free vibration of functionally graded rectangular nanoplates in thermal environment based on modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 323-330, 2015. (In Persian)
- [19] J. Yoon, C. Ru, A. Mioduchowski, Vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid, *Composites Science and Technology*, Vol. 65, No. 9, pp. 1326-1336, 2005.
- [20] H.-L. Lee, W.-J. Chang, Vibration analysis of fluid-conveying double-walled carbon nanotubes based on nonlocal elastic theory, *Journal of Physics: Condensed Matter*, Vol. 21, No. 11, pp. 115302, 2009.
- [21] F. Liang, Y. Su, Stability analysis of a single-walled carbon nanotube conveying pulsating and viscous fluid with nonlocal effect, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 10, pp. 6821-6828, 2013.
- [22] L. Wang, Vibration analysis of nanotubes conveying fluid based on gradient elasticity theory, *Journal of Vibration and Control*, pp. 1077546311403957, 2011.
- [23] A. G. Arani, M. Bagheri, R. Kolahchi, Z. K. Maraghi, Nonlinear vibration and instability of fluid-conveying DWBNNT embedded in a visco-Pasternak medium using modified couple stress theory, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 27, No. 9, pp. 2645-2658, 2013.
- [24] C. Shu, *Differential quadrature and its application in engineering*: Springer, 2000.
- [25] A. Dhooge, W. Govaerts, Y. A. Kuznetsov, W. Mestrom, A. Riet, B. Sautois, MATCONT and CL MATCONT: Continuation toolboxes in matlab, *Universiteit Gent, Belgium and Utrecht University, The Netherlands*, 2006.
- [26] S. Timoshenko, J. Goodier, H. N. Abramson, Theory of elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, pp. 888, 1970.
- [27] J. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2, pp. 288-307, 2007.
- [28] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*: CRC press, 2004.

کمک اصل همیلتون استخراج شده است. معادلات مذکور با روش تریب دیفرانسیلی تعمیم یافته گسسته‌سازی شده‌اند. سپس معادلات دیفرانسیلی معمولی حاصل به بسته مت‌کانت برده شده و پاسخ‌های فرکانسی سیستم به دست آمده است.

در ادامه نتایج حاصل از پژوهش حاضر با تئوری کلاسیک مقایسه گردیده و مشخص شد که به ازای مقادیر کوچک مقیاس طول بی‌بعد، نتایج موجود به تئوری کلاسیک نزدیک می‌شوند. اما در مقادیر بزرگ این مقیاس که متناظر با اندازه‌های کوچک نانولوله می‌باشد، نتایج متفاوت بوده و در نتیجه تئوری کلاسیک برای این حالت مناسب نخواهد بود.

سایر عوامل تاثیرگذار بر پاسخ‌های فرکانسی سیستم از قبیل نیروی خارجی اعمالی، ابعاد نانولوله، سرعت جریان سیال و پارامترهای بستر الاستیک نیز مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده شده است که افزایش نیروی خارجی و نسبت طول به ابعاد نانولوله، منجر به افزایش دامنه ارتعاشات می‌شوند. این در حالی است که افزایش ضریب برشی و ضریب میرایی، دامنه ارتعاشی حرکت را کاهش می‌دهند.

همچنین مشخص گردید که اگرچه روابط به دست آمده حاکم بر ارتعاشات اجباری نانولوله کربنی حاوی سیال به صورت غیرخطی می‌باشد، اما نتایج حاصل نشان می‌دهند که ماهیت رفتار غیرخطی سیستم ضعیف است که این امر با توجه به تحذب کم منحنی‌ها تشخیص داده می‌شود. همچنین مشاهده شده است که تغییرات پارامترهای مختلف اثرگذار بر ارتعاشات سیستم، بر میزان غیرخطی بودن رفتار آن تاثیر بر جای نمی‌گذارد.

## 6- تقدیر و تشکر

لازم به ذکر است که مقاله حاضر مستخرج از طرح پژوهشی با کد 709 می‌باشد. نویسندگان مقاله بر خود لازم می‌دانند از معاونت پژوهشی دانشگاه گیلان که طرح مذکور را مورد حمایت قرار دادند، تشکر و قدردانی نمایند.

## 7- مراجع

- [1] S. Iijima, Helical microtubules of graphitic carbon, *nature*, Vol. 354, No. 6348, pp. 56-58, 1991.
- [2] P. J. Harris, P. J. F. Harris, *Carbon nanotubes and related structures: new materials for the twenty-first century*: Cambridge university press, 2001.
- [3] C. Ru, Effective bending stiffness of carbon nanotubes, *Physical Review B*, Vol. 62, No. 15, pp. 9973, 2000.
- [4] R.Rafiee, R.Pourazizi, The effects of structural defects on the mechanical properties of CNT, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 13, pp. 165-175, 2014. (In Persian)
- [5] R.Rafiee, Analysis of nonlinear vibrations of a carbon nanotube using perturbation technique, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 60-67, 2012. (In Persian)
- [6] D. R. Kauffman, A. Star, Carbon nanotube gas and vapor sensors, *Angewandte Chemie International Edition*, Vol. 47, No. 35, pp. 6550-6570, 2008.