



بررسی تأثیر ثابت توانی به‌عنوان معیاری برای طراحی استاتیکی ورق چند لایه پیزوالکتریک هدفمند در بارگذاری حرارتی

حسین نورمحمدی¹، بشیر بهجت^{2*}

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز

*تبریز، صندوق پستی 51335-1996, behjat@sut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 07 شهریور 1394

پذیرش: 20 مهر 1394

ارائه در سایت: 14 آذر 1394

کلید واژگان:

پیزوالکتریک

مواد هدفمند

المان محدود

بارگذاری حرارتی

چکیده

در این مقاله، تحلیل ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک تحت گرادیان حرارتی به روش المان محدود مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. برای مدل کردن توزیع پیوسته خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی در راستای ضخامت، از مدل توانی ساده استفاده شده است. با در نظر گرفتن جملات حرارتی در معادلات مشخصه ماده پیزوالکتریک (جملاتی که باعث جفت‌شدگی تغییرات دما به خواص پیزوالکتریک می‌شود) و استفاده از فرضیات سینماتیکی تئوری مرتبه اول برشی ورق، معادلات مشخصه ماده پیزوالکتریک بازنویسی شده است. سپس با استفاده از اصل کار مجازی، معادلات حاکم بر یک ورق پیزوالکتریک هدفمند به‌دست آمده و به روش المان محدود حل شده است. برای حل معادلات از المان هشت گره‌ای استفاده شده است. نتایج برای سه نوع لایه چینی به‌ازای بارگذاری حرارتی به‌دست آمده است. نمودارهای خیز و ولتاژ به‌ازای لایه‌ها و ثابت‌های توانی مختلف در شرایط مرزی مختلف نشان داده شده است. در این مقاله به بررسی تأثیر ثابت توانی بر رفتار استاتیکی (خیز و ولتاژ) ورق هدفمند تحت بارگذاری حرارتی پرداخته می‌شود. بررسی این پاسخ‌ها می‌تواند به عنوان معیارها و پارامترهایی برای طراحی سنسورها و مواد هوشمند در محیط‌های حرارتی در نظر گرفته شود.

The role of the power law index as a design criterion on the statically loaded multilayered functionally graded piezoelectric plate in thermal environments

Hossein Nourmohammadi, Bashir Behjat*

Department of Mechanical Engineering, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

*P.O.B. 51335-1996, Tabriz, Iran, behjat@sut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 29 August 2015
Accepted 12 October 2015
Available Online 05 December 2015

Keywords:
Piezoelectric
FGPM
Finite Element
Thermal loading

ABSTRACT

This paper investigates the static behavior of multilayered functionally graded piezoelectric plates under thermal loads. The plate with functionally graded piezoelectric material (FGPM) is assumed to be graded through the thickness by a simple power law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. Considering the thermal coefficients of the piezoelectric material in the constitutive equations (the terms that will couple the temperature effects to the piezoelectric properties, known as pyroelectric constants) and using the kinematic assumptions of first-order shear plate theory (FSDT), the constitutive equation of the FGP plate is written. Then, by using principle of virtual work, the governing equations of the FGP plate are obtained. These equations are solved by finite element method using eight node shell element. Case studies such as plate under static loading, different layers and boundary conditions are considered and results in various thermal loadings have been obtained. Deflection and voltage results for different power law exponents and different boundary conditions are calculated and presented. The influence of power law index on the static behavior of FGPM plate (including deflection and voltage) under thermal loading are investigated. These responses can be used as a criterion for design of FGP sensors and actuators operating at high or low temperatures.

1-مقدمه

کوپل حرارتی، مکانیکی و الکتریکی هستند. این سیستم‌ها تحت شرایط متغیر الکتریکی، دمایی قرار می‌گیرند و با ورود این نسل از مواد، یافتن نقطه بهینه برای چنین سازه‌هایی یکی از دغدغه‌های اصلی طراحی شده است [1]. خاصیت پیزوالکتریک هم به‌صورت طبیعی در بعضی مواد وجود دارد و هم می‌توان با ترکیب شیمیایی آن را به‌دست آورد. کوارتز، نمک راشل، فسفات آمونیوم، پارافین، استخوان و حتی چوب از مواد رایج پیزوالکتریک هستند. از طرفی مواد ترکیبی دیگری مثل سرب تیتانات زیرکونات

در دو دهه اخیر، حوزه مواد و سازه‌های هوشمند، شاهد پیشرفت و روند صعودی شگرفی بوده است. یکی از دلایل این پیشرفت، امکان ساختن سازه یا سیستمی است که قابلیت بهینه کردن و یا اصلاح عملکرد خود با توجه به محیط را داشته باشد، سازه‌هایی که می‌توانند بر سلامت خود نظارت کنند، از راه دور کنترل شوند و کاربردهای پزشکی داشته باشند. همچنین نسل دیگری از سازه‌های هوشمند به وجود آمده‌اند که دارای

Please cite this article using:

H. Nourmohammadi, B. Behjat, The role of the power law index as a design criterion on the statically loaded multilayered functionally graded piezoelectric plate in thermal environments, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 405-415, 2015 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

H. Nourmohammadi, B. Behjat, The role of the power law index as a design criterion on the statically loaded multilayered functionally graded piezoelectric plate in thermal environments, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 405-415, 2015 (in Persian)

آن‌ها تغییر می‌کند، بیشتر است. در سال 2009، بهجت و همکارانش [10] تحلیل استاتیکی، دینامیکی و ارتعاش آزاد پانل‌های پیزوالکتریک تابعی را با استفاده از روش المان محدود انجام دادند که در آن انواع بارهای مکانیکی، الکتریکی و حرارتی اعمال شد. میدان دما در کل سازه یکنواخت در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم از اصل انرژی پتانسیل و همپلتون که بر پایه تئوری مرتبه اول برشی که شامل اثرات ترموپیزوالکتریک است، استفاده شد. اثر ترکیب مواد و شرایط مرزی در پاسخ استاتیکی و دینامیکی نیز مورد مطالعه قرار داده شد. در سال 2009، زیانگ و شی [11] تحلیلی استاتیکی از عملگرها و سنسورهای پیزوالکتریک تحت بارگذاری الکتروگرمایی را ارائه دادند. آن‌ها برای حل استاتیکی، تابع تنش ابری را پیشنهاد دادند. در این مطالعه خواص ماده در طول ضخامت به‌صورت توانی تغییر می‌کند. در این مقاله مطالعه جامعی روی تأثیر کوپل الکترومکانیک (EMC⁷)، تغییرات دما و نسبت ضخامت بر رفتار خمشی سنسورها و عملگرها انجام شده است. زمان و همکارانش [12] در سال 2010 رفتار خمشی تیر یک‌سر گیردار پیزوالکتریک هدفمند تحت بارهای حرارتی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از تابع تنش ابری تأثیرات دما در میدان الکتریکی را مورد مطالعه قرار دادند. در سال 2010 علی‌بیگلو [13] حل ترموالاستیک را برای تغییرشکل استاتیکی ورق‌های هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک را ارائه داد. برای تحلیل تیر تکیه‌گاه ساده از فضای حالت در جهت ضخامت و سری فوریه در جهت طولی استفاده کرد. همچنین در سال 2011 علی بیگلو [14] یک حل ترموالاستیک را برای تغییر شکل استاتیکی ورق‌های هدفمند دایروی با لایه‌های نازک پیزوالکتریک ارائه داد. در این مقاله خواص ورق در راستای شعاعی توانی فرض شد، ولی نسبت پواسون ثابت در نظر گرفته شد. این تحلیل برای تکیه‌گاه ساده و دمای ثابت انجام شده است. مسئله به صورت تحلیلی با فرض حل ناویر انجام شد و معادلات دیفرانسیل به‌دست آمده با روش فضای حالت به‌دست آمده و نتیجه شد که تأثیر غیرهمگن بودن بر رفتار FGM در بارگذاری حرارتی و همچنین رفتار غیرخطی مکانیکی بیشتر از بارگذاری مکانیکی است. در سال 2011، کمیلی و همکارانش [15]، به بررسی استاتیکی تیرهای پیزوالکتریک تابع مدرج تحت بار ترکیبی حرارتی، الکتریکی و مکانیکی پرداختند. آن‌ها تئوری‌های تیر برنولی، مرتبه اول برشی و مرتبه بالا را برای دقت و قابلیت اطمینان مورد بررسی قرار دادند. از سری توانی ساده برای تقریب تغییرات خواص ماده در راستای ضخامت استفاده کردند. در سال 2012، آلبرت و همکارانش [16]، با استفاده از روش المان محدود به انتخاب ترکیب ماده مناسب برای مبدل‌های پیزوالکتریک جهت استفاده بهینه از انرژی الکتریکی پرداختند. در نهایت ماده کریستالی جدید (PMN33) که قابلیت استفاده در تولید ولتاژ برای پیزوسرامیک را دارد معرفی کردند. قربان‌پور و همکارانش (2012) [17]، به تحلیل کره سوراخ‌دار ساخته شده از مواد پیزوالکتریک تابعی مدرج پرداختند. آن‌ها از روش حل تحلیلی برای بارگذاری‌های حرارتی، الکتریکی و مکانیکی استفاده کردند. ولتاژ الکتریکی بین درون و خارج کره به‌صورت ثابت اعمال می‌شود. تمام خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی به‌جز ضریب پواسون در جهت شعاعی از سری توانی تبعیت می‌کند. آن‌ها نتایج به‌دست آمده را با نرم‌افزار انسیس⁸ مقایسه کردند. در سال 2013، بوداچی و همکارانش [18] به تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیرهای پیزوالکتریک هدفمند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی پرداختند. تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت با توجه به تابع توانی

(PbZrTiO_3)، (که به عنوان PZT شناخته می‌شود)، تیتانات باریم (BaSTO)، سرب¹ زیرکونات تیتانات (PLZT)، سولفات لیتیوم، پلی فلوراید (PVDF) است. بسیاری از مواد پیزوالکتریک خام ترکیبی، به‌صورت طبیعی ایزوتروپیک هستند و اثر دو قطبی را ندارند و نمی‌توانند پیزو الکتریسیته ایجاد کنند؛ بنابراین باید عمل قطبی‌شدن² روی این مواد انجام شود. در این حالت یک میدان الکتریکی بسیار قوی را به ماده اعمال می‌کنند تا مولکول‌های دو قطبی در یک خط قرار گیرند و ماده، توانایی ایجاد میدان الکتریکی در اثر تغییر شکل را پیدا کند [2].

تغییر خود به خودی قطبی‌شدگی در اثر افزایش یا کاهش دما را اثر پیزوالکتریک می‌گویند [3]. بیشترین کاربرد اثر پیزوالکتریک در زمینه‌ی آشکارسازی اشعه مادون قرمز، تصویرسازی حرارتی و لوله‌های پیزوالکتریک دوربین عکاسی (آشکارسازهای فوتو فروالکتریک³) است. مواد پیزوالکتریک همچنین برای اندازه‌گیری انرژی در تحلیل‌های شیمی و زیست‌شناسی کاربرد دارد [4].

با پیشرفت‌هایی که در علم مواد و تکنیک‌های ساخت ایجاد شده است، می‌توان با حذف لایه‌های لمینت مرسوم، به مفهوم تازه‌ای از مواد تابعی مدرج (FGM⁴) برای مواد پیزوالکتریک⁵ رسید. مفهوم (FGM) اولین بار توسط دانشمندان ژاپنی عنوان شد. با ترکیب دو مفهوم فوق و با توجه به تغییرات پیوسته خواص پیزوالکتریک مواد در راستای ضخامت، این نوع از مواد پیشرفته را، مواد پیزوالکتریک هدفمند (FGPM⁶) می‌نامند [6,5].

پژوهش‌های بسیاری برای تحلیل مواد هوشمند تحت بار حرارتی انجام شده است که در زیر به تعداد محدودی از آن‌ها پرداخته می‌شود.

اتائو و تانیگاوا (2000) [7]، به حل سه بعدی مسئله ترموالاستیسیه که در آن خواص ماده در راستای ضخامت تغییر پیدا می‌کند پرداخته‌اند. آن‌ها به این نتیجه رسیده‌اند که می‌توانند همه تنش‌های موجود در صفحه مرکب را ارزیابی کنند و همچنین میدان الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک را در حالت گذرا از روش عددی به‌دست آورند. وو و همکارانش (2002) [8] رفتار الکترومکانیکی ورق‌های پیزوالکتریک را در جهت ضخامت با تئوری‌های مرتبه بالا مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها یک معادله کلی به‌دست آوردند که می‌توانست به تیر و صفحه و ورق‌های استوانه‌ای کاهش یابد آن‌ها از تئوری مرتبه بالا برای مطالعه رفتار سنسوری و عمل‌گری یک ورق استوانه‌ای با تکیه‌گاه ساده استفاده کردند. در سال 2003، تحلیل دقیق سه بعدی ورق‌های پیزوالکتریک هدفمند توسط ژانگ و شانگ [1] برای یک مستطیل با تکیه‌گاه‌های ساده انجام شد. معادله‌های حالت مواد پیزوالکتریک هدفمند، از رهیافت فضای حالت به‌دست آمد و فرض شد که خواص مکانیکی و الکتریکی در مواد از یک تابع توانی ساده در راستای ضخامت پیروی می‌کند.

در سال 2007 یانگ و ژیانگ [9]، خمش استاتیکی، ارتعاش آزاد و پاسخ دینامیکی عملگرهای ساخته شده از مواد پیزوالکتریک هدفمند تحت بار ترکیبی حرارتی - الکتریکی - مکانیکی را مورد بررسی قرار دادند. از تئوری تیر تیمونشیکو در این مقاله استفاده شد و در مدل‌سازی ماده، فرض شد که تمام خواص مواد به‌جز ضریب پواسون در راستای ضخامت تغییر می‌کند و به این نتیجه رسیدند که خیز عملگرهایی که تمام خواص مواد آن‌ها در راستای ضخامت تغییر می‌کنند، نسبت به عملگرهایی که فقط ضریب پیزوالکتریک

1- lanthanum
2- polling
3- photo ferroelectric
4- Functionally graded material
5- FGPM
6- Functionally graded piezoelectric material

7- Electro-Mechanical Coupling
8- ANSYS

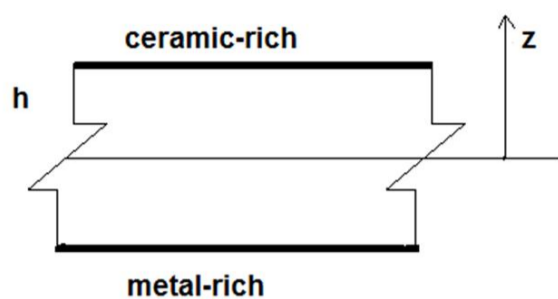


Fig. 1 Transverse view of the FGM plate

شکل 1 نمای عرضی ورق هدفمند

می‌دهد و می‌تواند جهت توزیع مطلوب خواص مواد بهینه گردند. در مقاله تمام خواص مکانیکی، پیزوالکتریک و حرارتی به‌جز ضریب پواسون به صورت رابطه (3) مدل شده است.

2- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر مواد پیزوالکتریک به صورت ماتریسی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} S_{kl} - e_{ijk} E_k - \lambda_{ij} \theta \\ D_l &= e_{lij} S_{ij} - \epsilon_{lk} E_k - p_l \theta \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن $E_k, D_l, S_{kl}, \sigma_{ij}$ به ترتیب تانسور تنش، کرنش، بردار جابجایی الکتریکی و میدان الکتریکی است. همچنین $e_{ijl}, \epsilon_{lk}, p_l, \theta$ به ترتیب نشان‌دهنده اختلاف دما با دمای مرجع، ضریب پیزوالکتریک، ضریب گذردهی الکتریکی و ضریب پیزوالکتریک در کرنش مکانیکی ثابت هستند. در این معادلات λ_{ij} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_{ij} = C_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (5)$$

که در آن α_{kl} ضریب انبساط حرارتی بوده و C_{ijkl} ماتریس ضرایب الاستیک است.

2-1- جابجایی‌ها و کرنش‌ها

با اعمال فرضیات ارائه شده در تئوری مرتبه اول برشی، میدان جابجایی را می‌توان به صورت فرم زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\beta_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\beta_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن u_0, v_0, w_0 جابجایی‌ها در نقطه $z = 0$ را نشان می‌دهد. β_x, β_y به ترتیب چرخش حول محورهای x و y را نشان می‌دهد.

2-2- روابط کرنش - جابجایی برای تئوری مرتبه اول برشی

با استفاده از میدان جابجایی بیان شده در رابطه (6) و تعریف کرنش، روابط کرنش - جابجایی بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \beta_y, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \beta_x \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

توجه شود که کرنش‌های $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ در راستای ضخامت صفحه به صورت خطی هستند، درحالی‌که کرنش‌های برشی عرضی γ_{yz}, γ_{xz} در راستای ضخامت ورق ثابت هستند.

میدان الکتریکی نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

ساده تبعیت می‌کند. در این پژوهش پاسخ استاتیکی و دینامیکی سازه به تحریکات برحسب ثابت‌های توانی مورد بررسی قرار گرفته است.

در این پژوهش با در نظر گرفتن جملات حرارتی در معادلات مشخصه ماده پیزوالکتریک (جملاتی که باعث جفت شدگی تغییرات دما به خواص پیزوالکتریک می‌شود) و استفاده از فرضیات سینماتیکی تئوری مرتبه اول برشی، معادلات مشخصه بازنویسی می‌شود. برای مدل کردن ورق هدفمند از مدل توانی برای تمام خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی به‌جز ضریب پواسون استفاده می‌شود، سپس با استفاده کار مجازی معادلات حاکم بر یک ورق پیزوالکتریک هدفمند به دست می‌آید. حل معادلات به صورتی خواهد بود که حرارت به عنوان بار خارجی (کوپل غیرمستقیم) به سازه وارد می‌شود. معادلات حاکم را به روش المان محدود فرمول‌بندی کرده و با استفاده از المان هشت گره‌ای پوسته به بررسی پاسخ سازه از جمله جابجایی عرضی و ولتاژ در شرایط مرزی مختلف پرداخته می‌شود.

در پژوهش‌های گذشته به تأثیر ثابت توانی در بارگذاری حرارتی در مواد پیزوالکتریک هدفمند توجه کمتری شده است. در این پژوهش مشاهده شد که در یک ثابت توانی خاص برای هر یک از لایه چینی‌ها، فارغ از اندازه گرادیان دمایی و شرایط مرزی ذکر شده، خیز استاتیکی ماکزیمم می‌شود. این رفتار در ولتاژ سنسوری هم مشاهده می‌شود. توجه به این رفتار مواد پیزوالکتریک هدفمند تحت بارگذاری حرارتی در پژوهش‌های قبلی کمتر بوده است. در پژوهش حاضر نقطه‌ای که در آن خیز و ولتاژ مقدار بیشینه یا صفر دارد پیدا شده و به دلایل وقوع چنین رفتاری اشاره خواهد شد. همچنین تأثیر گرادیان دمایی، لایه چینی و شرایط مرزی بر رفتار ورق پیزوالکتریک و نقطه‌ای که در آن مقدار خیز بیشینه یا کمینه می‌شود بررسی خواهد شد. این تأثیرات ثابت توانی، می‌تواند به‌عنوان معیاری برای طراحی سنسورها در محیط‌های حرارتی مورد استفاده قرار گیرد.

1-1- مواد هدفمند

مدل‌های تحلیلی و محاسباتی مختلفی برای توزیع مکانی خواص فیزیکی و مکانیکی مواد هدفمند پیشنهاد شده است. شکل 1، نمای یک ماده هدفمند را نشان می‌دهد. یکی از این مدل‌ها، مدل تابع توانی ساده است که از درصد حجمی مواد تشکیل دهنده ورق برای بیان توزیع مکانی خواص مواد در راستای ضخامت استفاده می‌شود. برای ماده هدفمند ساخته شده از دو نوع ماده فلز و سرامیک رابطه (1) برقرار است [19]:

$$V_c + V_m = 1 \quad (1)$$

که در آن V_c, V_m به ترتیب درصد حجمی ماده فلز و سرامیک است. با استفاده از مدل توانی تغییرات V_c را می‌توان به صورت بیان کرد:

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n, n \geq 0 \quad (2)$$

با توجه به معادله (2)، z محور مختصات در راستای ضخامت ورق، h ضخامت ورق هدفمند و n ثابت توانی (شاخص گرادیان) این ماده می‌باشد. در واقع در حالت $n = 1$ تغییرات هر دو جز ماده خطی است و وقتی $n = 0$ ماده فقط از جز بالایی تشکیل شده است. خواص مکانیکی، پیزوالکتریک و حرارتی ماده هدفمند دارای تغییراتی همانند V_c هستند. در این صورت مشخصات مؤثر ماده ورق هدفمند به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C_{\text{eff}} = C_{\text{top}} - C_{\text{bot}} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n = C_{\text{bot}} + (C_{\text{top}} - C_{\text{bot}}) \times V_c \quad (3)$$

که در آن C_{eff} نشانگر خاصیت مؤثر ماده هدفمند و C_{top} و C_{bot} به ترتیب خواص مربوط به سطح بالا و پایین می‌باشند. ثابت توانی (شاخص گرادیان) ماده هدفمند، پروفایل تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت را نشان

که در آن s_s^0, s^0, κ^0, N به ترتیب نشان دهنده تعداد لایه‌های پیزوالکتریک در ورق، انحنای صفحه میانی، کرنش صفحه میانی و کرنش برشی عرضی می‌باشد. در معادله (11)، جمله‌های \bar{E}, \bar{E} به ترتیب ماتریس‌های معادل کششی و خمشی پیزوالکتریک می‌باشند. جمله‌های $\bar{\theta}, \bar{\theta}$ به ترتیب بیان‌کننده ماتریس‌های انبساط حرارتی درون صفحه و خارج از صفحه ورق هستند. T, G به ترتیب ماتریس‌های گذردهی الکتریکی و ماتریس پیزوالکتریک می‌باشد؛ که این ماتریس‌ها به صورت رابطه (12) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} [\bar{E}] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{e}] dz, & [\hat{E}] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z [\bar{e}] dz \\ [G] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{g}] dz, & [\bar{\theta}] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\lambda}] dz \\ [\hat{\theta}] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z [\bar{\lambda}] dz, & [T] &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{p}] dz \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن $\bar{e}, \bar{g}, \bar{\lambda}, \bar{p}$ به ترتیب ماتریس ضرایب پیزوالکتریک، ماتریس ضرایب انبساط حرارتی، ماتریس گذردهی الکتریکی و ماتریس ضرایب پیزوالکتریک هستند.

4-2- فرمول بندی المان محدود

در مقاله حاضر از المان هشت گره‌ای پوسته برای تحلیل ورق‌های کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک و همچنین ورق‌های FGPM استفاده شده است. با استفاده از توابع درون یاب مقادیر متغیرها روی سطح المان برحسب مقادیر متناظر در محل گره‌های المان تعیین می‌گردند. با توجه به میدان جابجایی که در رابطه (6) بیان شده است، باید سه جابجایی u, v, w و دو چرخش β_x, β_y تقریب زده شود (یعنی برای هر گره پنج درجه آزادی جابجایی). برای قسمت خمش و غشایی این المان از همان تابع درون‌یابی که برای تقریب هندسه به کار رفته استفاده می‌شود. با توجه به انتخاب المان هشت گره‌ای پوسته، تقریب هندسه سطح ورق به صورت رابطه (13) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^8 N_i(s, t) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^8 N_i(s, t) y_i \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن $N_i(s, t)$ یک تابع درون یاب سرندپیتی¹ است. x_i, y_i مختصات کارتزین گره نام المان است. شکل 2 مختصات محلی المان هشت گره‌ای را نشان می‌دهد.

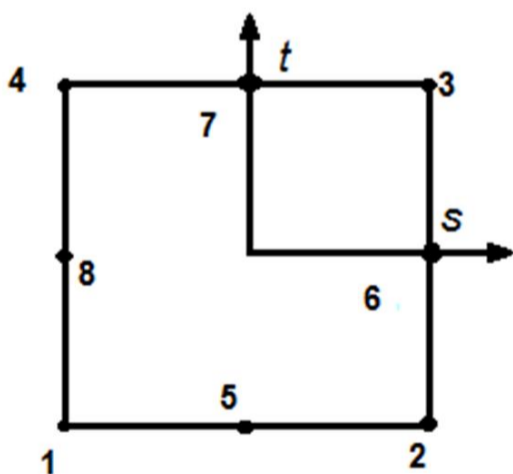


Fig. 2 8-node square element in local coordinates

شکل 2 مختصات محلی المان هشت گره‌ای

$$[E] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} = [R_\phi] \{\phi\} \quad (8)$$

که در آن میدان الکتریکی در راستای ضخامت به صورت $(E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z})$ است. اگر فرض شود که پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت یک مقدار ثابت باشد، در این صورت می‌توان میدان الکتریکی در راستای ضخامت را به صورت زیر نوشت:

$$E_z = -\frac{\phi}{h_p} \quad (9)$$

که در آن h_p ضخامت لایه پیزوالکتریک است.

3-2- معادلات انرژی حاکم بر ورق پیزوالکتریک هدفمند

1-3-2- شکل ضعیف معادلات تعادل

فرم تغییرات معادلات تعادل به صورت زیر تعریف می‌شود [20]:

$$\begin{aligned} \delta u^T \psi_u &= - \iiint \delta S^T \sigma dv + \iiint \delta u^T b dv + \iint \delta u^T \tau d\Gamma = 0 \\ \delta \phi^T \psi_e &= - \iiint \delta E^T D dv + \iint \delta \phi^T q d\Gamma_q = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

رابطه اول معادله (10) از کار مجازی و رابطه دوم از بقای بار الکتریکی به دست آمده است. b, τ, q به ترتیب نشان‌دهنده بار اعمال شده به ترمینال (الکترو) در مرز Γ_q بردار تنش در مرز Γ و نیروی حجمی می‌باشد. E, D, ϕ به ترتیب بیان‌گر پتانسیل الکتریکی، جابجایی الکتریکی و میدان الکتریکی می‌باشد. v, Γ_q به ترتیب بیان‌گر سطح اعمال نیروهای سطحی و الکتریکی و حجم کل سازه (سازه عامل (لایه پیزوالکتریک) و غیرعامل) است. ψ_u عدم تعادل بین نیروهای درونی و خارجی است $(\psi_u = F_{\text{external}} - F_{\text{internal}})$ و ψ_e عدم تعادل بار الکتریکی خارجی و داخلی است $(\psi_e = q_{\text{external}} - q_{\text{internal}})$ در واقع این عدم تعادل‌ها باید صفر شوند تا جسم در تعادل قرار گیرد.

با صرف نظر از نیروهای حجمی و جای‌گذاری رابطه (4) در معادله (10) معادله (11) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta u^T \psi_u &= - \iiint \left(\delta s^0{}^T [A] s^0 + \delta s^0{}^T [B] \kappa^0 + \delta \kappa^0{}^T [B] s^0 \right. \\ &\quad + \delta \kappa^0{}^T [D] \kappa^0 + \delta s_s^0{}^T [A_s] s_s^0 \\ &\quad + \sum_m \delta s^0{}^T [\bar{E}^m] E^m + \sum_m \delta \kappa^0{}^T [\hat{E}^m] E^m \\ &\quad - \sum_m \delta s^0{}^T [\bar{\theta}^m] \theta^m \\ &\quad \left. - \sum_m \delta \kappa^0{}^T [\hat{\theta}^m] \theta^m \right) dA \\ &\quad + \iiint \delta u^T b dv \\ &\quad + \iint (\delta u^T b^T + \delta \beta^T b^T) dA + \int \delta u^T \tau dt = 0 \\ \delta \phi^T \psi_e &= - \iint \left(\sum_m \delta E^m{}^T [\bar{E}^m] s^0 + \sum_m \delta E^m{}^T [\bar{E}^m] \kappa^0 \right. \\ &\quad + \sum_m \delta s^0{}^T [G^{mn}] E^n \\ &\quad - \sum_m \delta E^m{}^T [\Gamma^{mn}] \theta^n \left. \right) dA \\ &\quad + \int \delta \phi^T q d\Gamma_q = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$m, n = 1 \dots N$

1- Serendipity

1-4-2- مدل المان محدود ورق پیزوالکتریک

جابجایی‌ها، چرخش‌ها و بار الکتریکی و دما در سطح المان به صورت رابطه (14) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) u_{0i} \\
 v_0(x, y) &= \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) v_{0i} \\
 w_0(x, y) &= \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) w_{0i} \\
 \beta_x(x, y) &= \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) \beta_{xi} \\
 \beta_y(x, y) &= \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) \beta_{yi} \\
 \phi(x, y) &= \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) \phi_i \\
 \theta(x, y) &= \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) \theta_i
 \end{aligned} \tag{14}$$

که در آن N_i تابع درون‌یاب سریندیپتی است و $u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \beta_{xi}, \beta_{yi}, \phi_i, \theta_i$ و θ_i به ترتیب بیان‌گر مقادیر گره‌ای دما، ولتاژ و جابجایی‌ها در راستای (x, y, z) می‌باشد.

در حل معادلات، شش درجه آزادی برای هر گره وجود دارد. این درجات آزادی شامل 5 جابجایی و دوران $u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y$ و یک ولتاژ ϕ می‌باشد. ماتریس ژاکوبین به صورت رابطه (15) تعریف می‌شود:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{15}$$

رابطه کرنش - جابجایی را می‌توان به صورت رابطه (16) نوشت:

$$\varepsilon = [B_u]\{u\} = [R_a]\{u\} + z[R_b]\{u\} + [R_s]\{u\} \tag{16}$$

در معادله (16) ماتریس‌های $[R_a]$ ، $[R_b]$ و $[R_s]$ اپراتورهای کرنش بوده که براساس میدان جابجایی‌ها و تعریف کرنش به صورت رابطه (17) بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 [R_a] &= \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 [R_b] &= \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \\
 [R_s] &= \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{17}$$

همچنین بردار مقادیر گره‌ای جابجایی به صورت رابطه (18) نوشته می‌شود:

$$[U] = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} \tag{18}$$

با توجه به معادلات بالا و جای‌گذاری آن در معادلات (11)، رابطه زیر برای ماتریس‌های سختی و نیرو به دست می‌آید:

$$[K_{dd}][U] + [K_{de}][\varphi^s] + [K_{de}][\varphi^a] - [K_{d\theta}][\theta] = [F] \tag{19}$$

$$[K_{ed}][U] - [K_{ee}][\varphi^s] - [K_{ee}][\varphi^a] + [K_{e\theta}][\theta] = 0 \tag{20}$$

ماتریس‌های $[K]$ با زیرنویس‌های ee, de, dd به ترتیب ماتریس‌های سختی، پیزوالکتریک و گذردهی الکتریکی است و ماتریس $[K_{de}]$ کوپل بین میدان جابجایی با میدان الکتریکی را ایجاد می‌کند.

پتانسیل الکتریکی سنسوری با استفاده از رابطه (20) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\varphi^s] = [K_{ee}]^{-1}([K_{ed}][U] + [K_{e\theta}][\theta] - [K_{ee}][\varphi^a]) \tag{21}$$

اگر پتانسیل الکتریکی به دست آمده از معادله (21) در معادله (19) جای‌گذاری شود، رابطه (22) برای جابجایی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 ([K_{dd}] + [K_{de}][K_{ee}]^{-1}[K_{ed}])[U] \\
 = [F] + [K_{d\theta}][\theta] \\
 - [K_{de}][K_{ee}]^{-1}[K_{e\theta}][\theta] \\
 + [K_{de}][K_{ee}]^{-1}[K_{ee}][\varphi^a] \\
 - [K_{de}][\varphi^a]
 \end{aligned} \tag{22}$$

که در آن بردار بار حرارتی و بردار کوپل حرارتی - الکتریکی (اثر ضریب پیروالکتریک) به صورت رابطه (23) نیز نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 F_\theta &= [K_{d\theta}][\theta] \\
 F_{\theta p} &= [K_{de}][K_{ee}]^{-1}[K_{e\theta}][\theta] \\
 F_{fi} &= [K_{de}][K_{ee}]^{-1}[K_{ee}][\varphi^a] - [K_{de}][\varphi^a]
 \end{aligned} \tag{23}$$

که در آن‌ها F بردار نیروی مکانیکی، F_θ بردار بار حرارتی، F_{fi} بردار نیروی الکتریکی و $F_{\theta p}$ بردار نیروی تولید شده ناشی از اثر پیروالکتریک است. لازم به ذکر است که $([U], [\varphi], [\theta])$ به ترتیب مقادیر گره‌ای دما، ولتاژ الکتریکی و جابجایی هستند.

ماتریس‌های سختی $[K_{dd}], [K_{de}], [K_{ee}], [K_{e\theta}]$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
 [K_{dd}] &= \iint ([R_a]^T[A][R_a] + [R_a]^T[B][R_b] \\
 &\quad + [R_b]^T[B][R_a] + [R_b]^T[D][R_b] \\
 &\quad + [R_s]^T[A_s][R_s])|J|dA_e
 \end{aligned}$$

$$[K_{de}] = \iint ([R_a]^T[\bar{E}][R_\varphi] + [R_b]^T[\hat{E}][R_\varphi])|J|dA_e$$

$$[K_{ee}] = \iint ([R_\varphi]^T[G][R_\varphi])|J|dA_e$$

$$[K_{de}] = \iint ([R_a]^T[\bar{\theta}][R_\theta] + [R_b]^T[\hat{\theta}][R_\theta])|J|dA_e \tag{24}$$

که در آن A_e مساحت سطح المان است. انتگرال‌های معادله (24) با استفاده از انتگرال‌گیری گوس (دو نقطه در هر جهت) به دست می‌آیند. اگر ماتریس $[K_f]$ و بردار $[F_f]$ به صورت رابطه (25) تعریف شوند:

$$\begin{aligned}
 [K_f] &= [K_{dd}] + [K_{de}][K_{ee}]^{-1}[K_{ed}] \\
 [F_f] &= [F] + [F_\theta] - [F_{\theta p}] + [F_{fi}]
 \end{aligned} \tag{25}$$

در این صورت معادله (22) را می‌توان به صورت کلی زیر نیز بیان کرد:

$$[K_f][U] = [F_f] \tag{26}$$

خلاصه‌ای از روند طی شده حل در این پژوهش به شرح زیر است. با استفاده

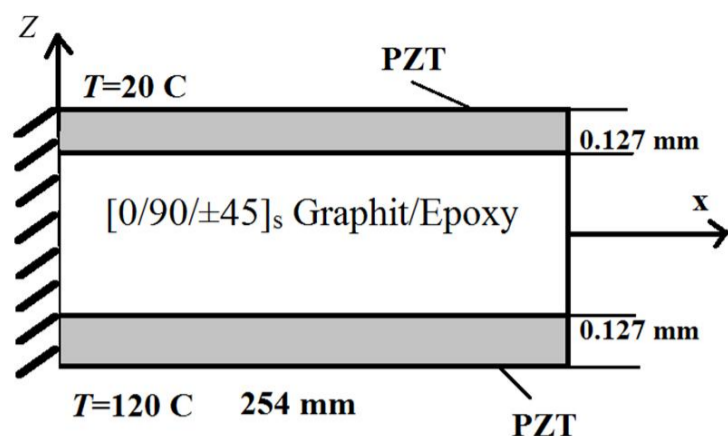


Fig. 3 Geometry of a clamped composite plate with attached piezoelectric layer

شکل 3 مشخصات هندسی صفحه گیردار با لایه پیزوالکتریک تحت گرادیان دمایی [22]

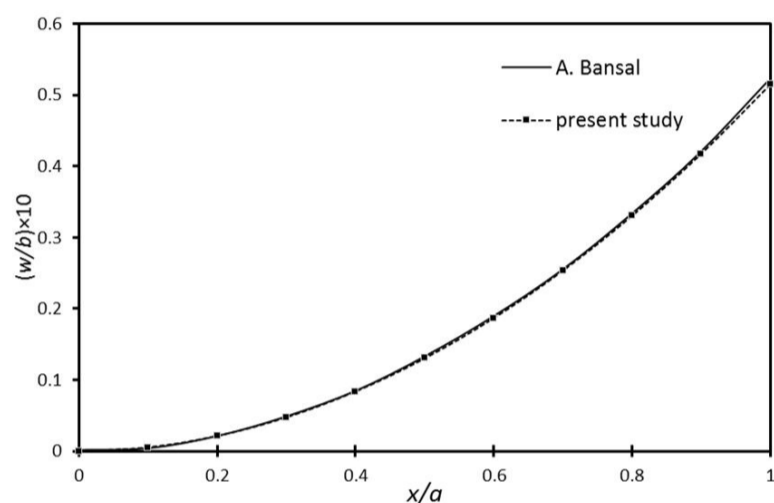


Fig. 4 Centerline deflection of composite plate with piezoelectric layer under 100 °C thermal gradient

شکل 4 خیز ورق گیردار کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک تحت گرادیان دمایی 100°C

جدول 2 همگرایی خیز ورق پیزوالکتریک هدفمند چهار تکیه گاه ساده تحت بار حرارتی

Table 2 Convergence study of deflection in the simply supported FGPM plate under thermal loading

خطا	خیز (m)	تعداد المان
3.09%	3.9747×10^{-6}	20
0.251%	4.1013×10^{-6}	30
0.0129%	4.1116×10^{-6}	40
-	4.11213×10^{-6}	50

که با افزایش تعداد المان‌ها میزان تغییرات خیز و درصد خطا کاهش می‌یابد به طوری که برای تعداد المان 50 مقدار خطا کمتر از 0.01 درصد می‌باشد، بنابراین در این پژوهش از تعداد المان 50 برای تحلیل ورق استفاده خواهد شد.

2-3- تحلیل ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک تحت بار حرارتی

در این بخش ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک تحت گرادیان دمایی قرار می‌گیرد. شکل 5 تصویر ورق پیزوالکتریک با لایه چینی‌های مختلف را نشان می‌دهد. ابعاد سطح ورق 50.8×25.4 mm و ضخامت آن 5.2 mm است. مسئله برای سه لایه‌چینی مختلف حل خواهد شد.

1-2-3- ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های PVDF و PZT

در ورق تحلیل شده یک لایه PVDF در سطح بالا و یک لایه از PZT در سطح

از اصل بقای ممنتوم و بار الکتریکی ماتریس‌های سختی هر المان به دست می‌آیند. برای انتگرال‌گیری و محاسبه ماتریس‌های سختی $(K_{dd}, K_{de}, K_{ee}, K_{e\theta}, K_{d\theta})$ از روش گوسی (دو نقطه در هر جهت) استفاده شده است. با استفاده از ماتریس‌های سختی که برای هر المان به دست آمد، ماتریس سختی کلی برای سازه جمع‌آوری (اسمبل) شد. در نهایت با اعمال شرایط مرزی بر روی ماتریس سختی کلی و بردار نیرو، دستگاه معادلات نهایی با استفاده از نرم‌افزار متلب حل شد و جابجایی‌های طولی، عرضی، چرخش‌ها و مقادیر ولتاژ برای هر گره به دست آمد.

3- نتایج

در این بخش ابتدا به اعتبارسنجی مدل المان محدود ارائه شده پرداخته می‌شود. این اعتبارسنجی شامل مقایسه نتایج استاتیکی برای ورق کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک تحت گرادیان دمایی می‌باشد. پس از اعتبارسنجی مدل، به تحلیل ورق پیزوالکتریک هدفمند با سه نوع لایه چینی و دو نوع شرایط مرزی پرداخته می‌شود. ورق پیزوالکتریک هدفمند از دو ماده PZT و PVDF تشکیل شده و خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی این مواد در جدول 1 ارائه گردیده است.

1-3- ورق کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک تحت گرادیان دمایی

در این بخش به مقایسه نتایج اعمال بار حرارتی بر یک ورق کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی یک سر گیردار مربوط به مرجع [22] پرداخته می‌شود. ابعاد صفحه کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک به صورت $254 \times 25.4 \times 1.27$ mm² ($a = 254$ mm, $b = 25.4$ mm) است (شکل 3). این ورق کامپوزیتی تحت گرادیان دمایی 100°C قرار دارد که در آن دما در راستای ضخامت به صورت خطی تغییر می‌کند. تغییرات دما در راستای ضخامت را می‌توان به صورت رابطه (27) بیان کرد:

$$T = T_{bot} + (T_{top} - T_{bot}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (27)$$

در رابطه (27)، T_{bot} ، T_{top} به ترتیب دمای سطح بالا و پایین ورق هستند. هندسه و شرایط مرزی ورق کامپوزیتی تحت گرادیان دمایی در شکل 3 مشاهده می‌شود. خواص گرافیت اپوکسی و پیزوسرامیک در مرجع [23] ارائه گردیده است. نتایج به دست آمده در این پژوهش با نتایج مرجع [22] مقایسه می‌شود. شکل 4 خیز صفحه کامپوزیتی تحت گرادیان دمایی همراه با نتایج مرجع [22] را نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که نتایج به دست آمده از این پژوهش همخوانی خوبی با نتایج مرجع ذکر شده دارد.

در جدول 2 همگرایی خیز ورق چهار طرف تکیه‌گاه ساده بر حسب تعداد المان‌ها در بارگذاری حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود

جدول 1 خواص مکانیکی و الکتریکی و حرارتی مواد PZT و PVDF [21]

Table 1 Material properties of PVDF and PZT

PVDF	PZT	خواص مواد
2	60	E (GPa)
0.33	0.33	ν
0.75	22.5	G (GPa)
1.2×10^{-4}	1.2×10^{-4}	$\alpha \left(\frac{1}{^\circ C} \right)$
1×10^{-10}	150×10^{-10}	$\epsilon \left(\frac{F}{m} \right)$
2.5×10^{-11}	-17.5×10^{-11}	$d_{31} = d_{32} \left(\frac{C}{N} \right)$
2.5×10^{-5}	-75×10^{-5}	$p_3 \left(\frac{C}{m^2} \right)$

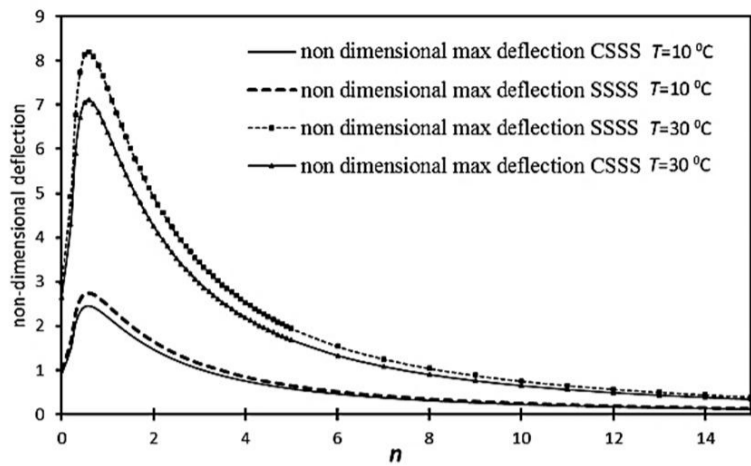
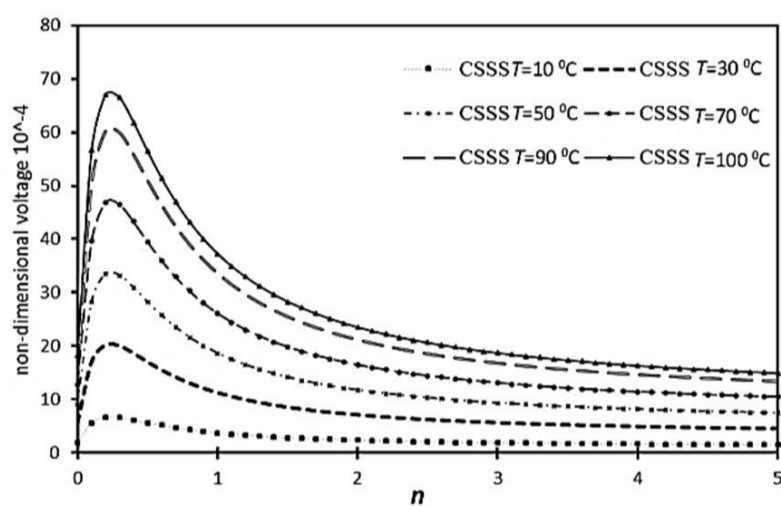
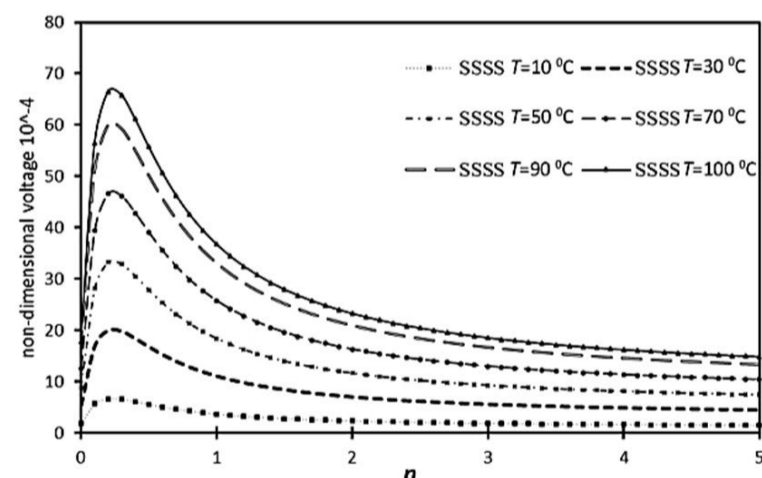


Fig. 6 The maximum deflection of FGPM plate with PZT and PVDF layers for various power index “ n ” under 10^0C and 30^0C thermal gradient

شکل 6 خیز ماکزیمم ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های PZT و PVDF به ازای ثابت‌های توانی مختلف تحت گرادیان دمایی 10^0C و 30^0C



(الف-ا)



(ب-ب)

Fig. 7 Maximum voltage of FGPM plate with PZT and PVDF layers for various power index “ n ” under different thermal gradient (“CSSS” (a) and “SSSS” (b))

شکل 7 ولتاژ ماکزیمم ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های PZT و PVDF به ازای ثابت‌های توانی مختلف تحت گرادیان‌های دمایی متفاوت (الف- شرایط مرزی CSSS ب- شرایط مرزی SSS)

شکل 7 ولتاژ ماکزیمم ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های PZT و PVDF به ازای ثابت‌های توانی مختلف تحت گرادیان‌های دمایی متفاوت (الف- شرایط مرزی CSSS ب- شرایط مرزی SSS)

$n = 0.206$ چون سهم PVDF در سطوح پایینی ورق بیشتر است و چون دما در سطح پایینی بیشتر از سطح بالا است، سطح پایینی بیشتر از سطح بالایی منبسط می‌شود و این امر باعث می‌شود که خیز ایجاد شده منفی شود. در ثابت توانی $n = 0.206$ خیز تقریباً صفر می‌شود. از این خصوصیت ورق پیزوالکتریک هدفمند می‌توان برای شرایط محیطی خاص استفاده کرد تا در یک گرادیان دمایی خاص، ورق خیز نداشته باشد.

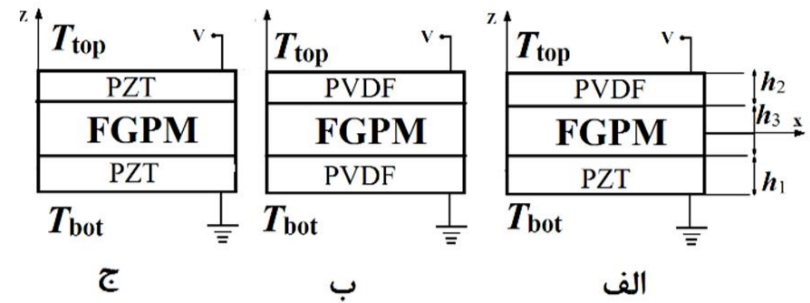


Fig. 5 Geometry of sandwich FGPM plate with three types of layer upping

شکل 5 تصویر ورق پیزوالکتریک هدفمند با سه نوع لایه چینی مختلف

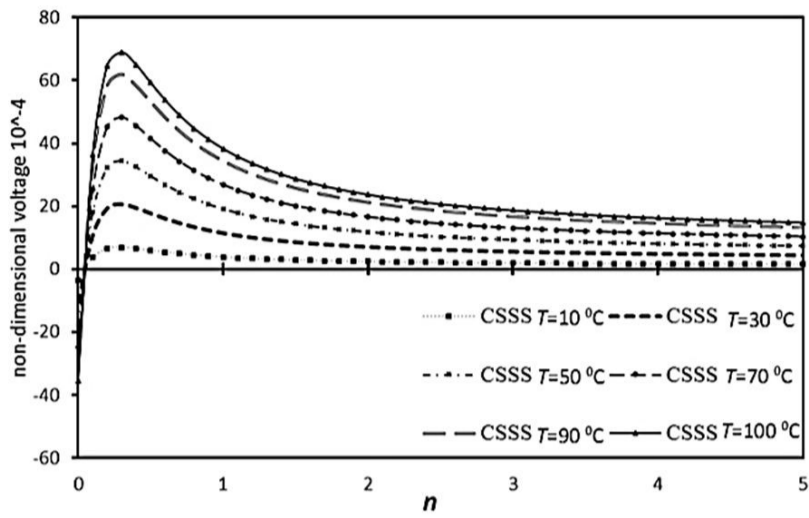
پایین ورق قرار گرفته است. شرایط مرزی این ورق به دو صورت (SSSS) و (CSSS) است. یک لایه از ماده PVDF به ضخامت 0.1 mm در سطح بالای ورق قرار گرفته است و به همین نحو یک لایه از ماده PZT به ضخامت 0.1 mm در سطح پایینی ورق قرار داده شده است (شکل 5: الف).

به این ورق گرادیان دمایی 10^0C و 30^0C در راستای ضخامت اعمال می‌شود، به صورتی که در آن $T_{\text{top}} = 0$ و $T_{\text{bot}} = 10, 30$ باشد. شکل 6، تغییرات خیز وسط ورق با دو نوع شرایط مرزی به ازای ثابت‌های توانی مختلف را نشان می‌دهد. در این نمودار مشاهده می‌شود که در ثابت توانی $n=0.6$ بیشترین خیز برای هر دو شرط مرزی اتفاق می‌افتد. در ثابت‌های توانی $n \geq 0.6$ با افزایش ثابت توانی به دلیل افزایش سختی، خیز ورق کاهش می‌یابد. دلیل این رفتار ورق مربوط به اختلاف ضرایب انبساط حرارتی مواد PZT و PVDF است. ضریب انبساط حرارتی PVDF تقریباً صد برابر ضریب انبساط حرارتی PZT است. این اختلاف باعث می‌شود که ماده در ضخامت‌های مختلف در راستای x, y تغییر طول‌های متفاوتی انجام دهد و این تغییر طول‌های متفاوت موجب ایجاد خیز در ورق می‌شود. در $n = 0.6$ این اختلاف در ضرایب انبساط حرارتی موجب حداکثر شدن خیز در این ثابت توانی می‌شود. شکل 7، تغییرات ولتاژ ماکزیمم ورق با دو شرط مرزی و گرادیان دمایی متفاوت رابه ازای ثابت‌های توانی مختلف نشان می‌دهد. در این نمودار مشاهده می‌شود که در ثابت توانی $n=0.2$ بیشترین ولتاژ برای هر دو شرط مرزی اتفاق می‌افتد. در ثابت‌های توانی $n \geq 0.2$ با افزایش ثابت توانی، ولتاژ کاهش می‌یابد. این کاهش ولتاژ به دلیل کاهش خیز به ازای افزایش ثابت توانی است. ماکزیمم شدن ولتاژ به خاطر تفاوت ضرایب پیزوالکتریک مواد PZT و PVDF است. به این صورت که با تغییرات طولی در ورق پیزوالکتریک ولتاژ تولید می‌شود. هنگام اعمال گرادیان دمایی به دلیل تفاوت در ضرایب حرارتی در راستای ضخامت تغییر طول‌های متفاوتی ایجاد می‌شود، همچنین چون ضرایب پیزوالکتریک نیز متفاوت است، این باعث می‌شود در یک ثابت توانی خاص، ولتاژ ماکزیمم شود.

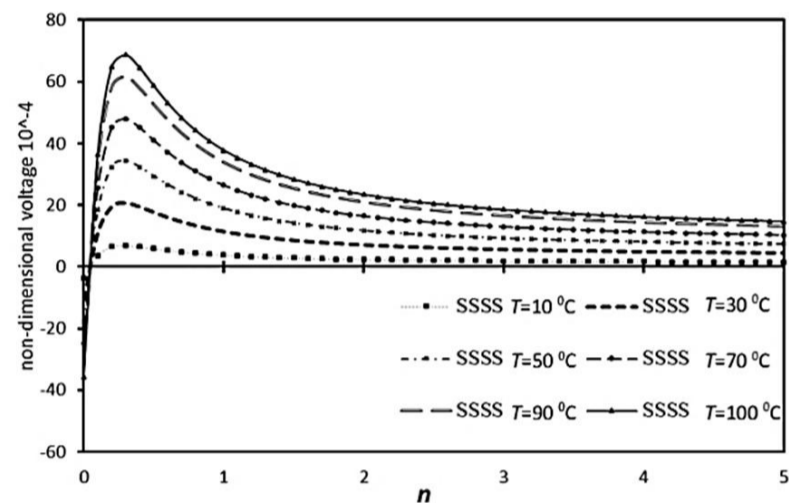
2-2-3 ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های PVDF

در این بخش به تحلیل ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های PVDF پرداخته می‌شود. شرایط مرزی این ورق به دو صورت (SSSS) و (CSSS) است. لایه PVDF در سطح بالا و پایین با ضخامت 0.1 mm قرار گرفته است (شکل 5: ب) به این ورق گرادیان دمایی 10^0C و 30^0C در راستای ضخامت اعمال می‌شود. به صورتی که در آن $T_{\text{top}} = 0$ و $T_{\text{bot}} = 10, 30$ می‌باشد. شکل 8، تغییرات خیز وسط ورق با لایه‌های پیزوالکتریک برحسب ثابت‌های توانی مختلف را نشان می‌دهد. در این نمودار مشخص است، با افزایش ثابت توانی خیز ورق افزایش و سپس کاهش پیدا کرده است.

ماکزیمم خیز ورق در $n = 0$ (جایی که ماده تماماً به PVDF تبدیل شده) رخ می‌دهد. در $n = 0$ ، خیز منفی است. در ثابت‌های توانی کوچک‌تر از



(الف-ا)



(ب-ب)

Fig. 9 Maximum voltage of FGPM plate with PVDF layers for various power index “ n ” under different thermal gradient (“CSSS” (a) and “SSSS” (b))

شکل 9 ولتاژ ماکزیمم ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های PVDF به ازای ثابت‌های توانی مختلف تحت گرادیان‌های دمایی متفاوت (الف- شرایط مرزی CSSS ب- شرایط مرزی SSS)

در ثابت توانی $n = 0.2$ بیشترین ولتاژ برای هر دو شرط مرزی اتفاق می‌افتد. در ثابت‌های توانی $n \geq 0.2$ با افزایش ثابت توانی ولتاژ کاهش می‌یابد. این کاهش ولتاژ به دلیل کاهش خیز به ازای افزایش ثابت توانی است. از این ویژگی می‌توان برای طراحی سنسورها در محیط‌هایی با گرادیان دمایی استفاده کرد. مشاهده می‌شود محل وقوع (ثابت توانی) ولتاژ ماکزیمم، مستقل از میزان دمایی اعمالی است. با استفاده از این خاصیت می‌توان سنسورها را در این ثابت توانی طراحی کرد تا بیشترین بازده را داشته باشد.

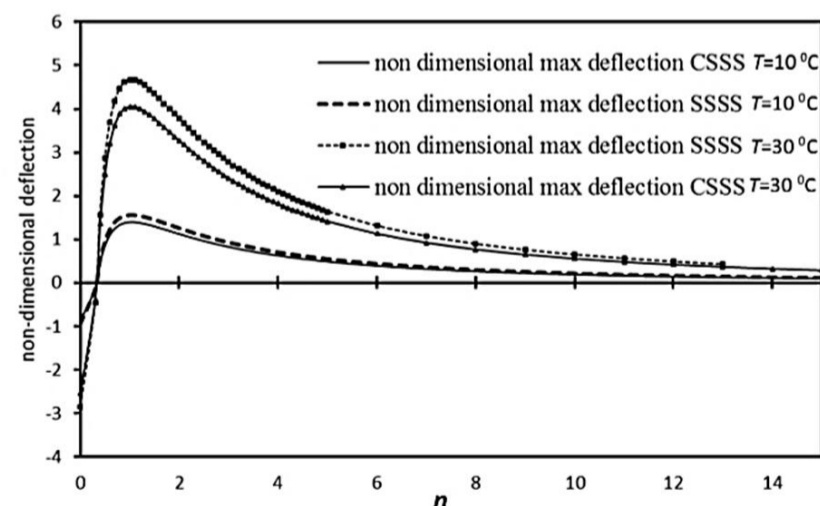


Fig. 10 The maximum deflection of FGPM plate with PZT layers for various power index “ n ” under 10^0C and 30^0C thermal gradient

شکل 10 خیز ماکزیمم ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های PZT به ازای ثابت‌های توانی مختلف تحت گرادیان دمایی 10^0C و 30^0C

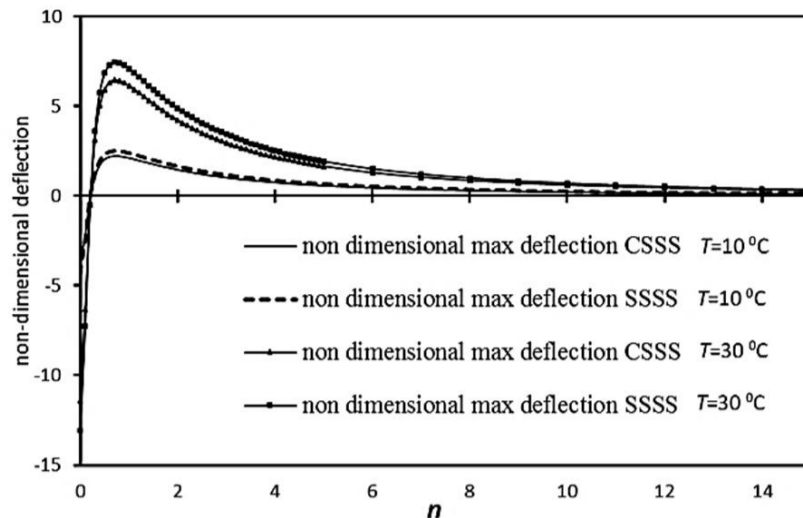


Figure 8 The maximum deflection of FGPM plate with PVDF layers for various power index “ n ” under 10^0C and 30^0C thermal gradient

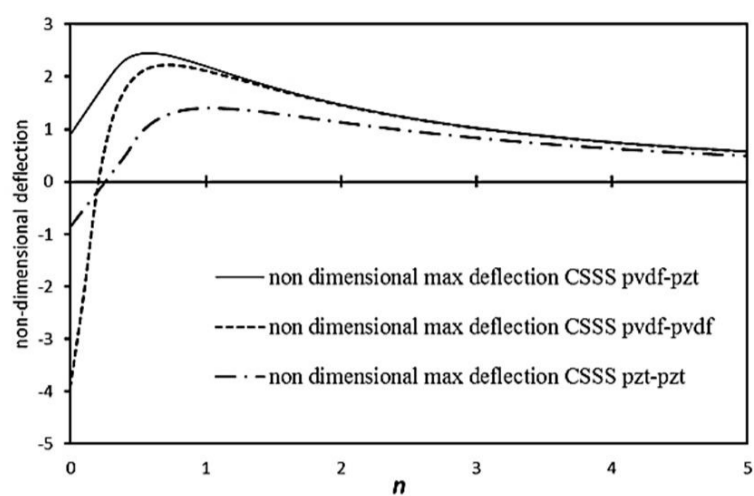
شکل 8 خیز ماکزیمم ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های PVDF به ازای ثابت‌های توانی مختلف تحت گرادیان دمایی 10^0C و 30^0C در $n = 0$ خیز به دلیلی که قبلاً بیان شد، منفی است و سپس با افزایش ثابت توانی خیز مثبت و به یک اکسترمم نسبی در $n = 0.7$ می‌رسد و سپس کاهش می‌یابد. همچنین در ثابت‌های توانی $n \leq 0.7$ ، با افزایش ثابت توانی، خیز افزایش می‌یابد ولی در ثابت‌های توانی $n \geq 0.7$ با افزایش ثابت توانی خیز کاهش می‌یابد. این رفتار با توجه به تأثیر متقابل مدول یانگ و ضریب انبساط قابل توجیه خواهد بود.

شکل 9، تغییرات ولتاژ ماکزیمم ورق با دو شرایط مرزی متفاوت رابه ازای ثابت‌های توانی مختلف نشان می‌دهد. در این نمودار مشاهده می‌شود که در ثابت توانی “ $n=0.3$ ” بیشترین ولتاژ برای هر دو شرط مرزی اتفاق می‌افتد. در ثابت‌های توانی $n \geq 0.3$ با افزایش ثابت توانی ولتاژ کاهش می‌یابد. این کاهش ولتاژ به دلیل کاهش خیز به ازای افزایش ثابت توانی است. با مقایسه خیز حداکثر لایه چینی حالت (شکل 5:ب) با حالت (شکل 5:الف) مشخص می‌شود که لایه چینی (ب) خیز مثبت (رو به بالا) کمتری نسبت به حالت (الف) دارد. با توجه به این که ضریب انبساط حرارتی PVDF بزرگ‌تر از PZT است انتظار می‌رفت که حالت (ب) خیز بیشتری ایجاد کند، اما خیز ترکیب لایه‌های PZT بیشتر می‌باشد. علت این است که اختلاف ضریب انبساط حرارتی در حالت لایه‌های PVDF کمتر از حالت قبلی است و این امر منجر به خیز کمتر در این حالت می‌شود.

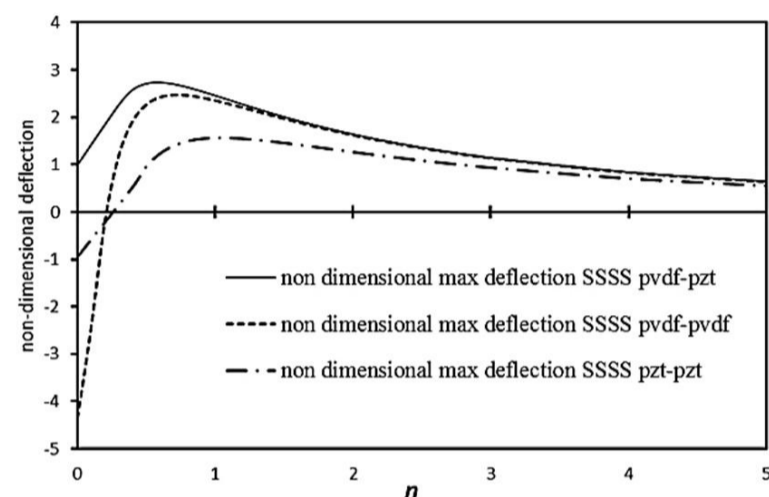
3-2-3- ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های PZT

در این بخش به تحلیل ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های PVDF پرداخته می‌شود. شرایط مرزی این ورق به دو صورت (SSSS) و (CSSS) است. لایه PZT در سطح بالا و پایین به ضخامت 0.1 mm قرار گرفته است (شکل 5:ج). به این ورق گرادیان دمایی 10^0C و 30^0C در راستای ضخامت اعمال می‌شود. به صورتی که در آن $T_{\text{top}} = 0$ و $T_{\text{bot}} = 10, 30$ می‌باشد. شکل 10، تغییرات خیز وسط ورق را به ازای ثابت‌های توانی مختلف نشان می‌دهد. در این نمودار مشاهده می‌شود مانند حالت قبلی، خیز در ثابت توانی صفر، منفی است و با افزایش ثابت توانی خیز مثبت می‌شود و به یک اکسترمم نسبی می‌رسد ($n = 1$)، سپس با افزایش ثابت توانی خیز کاهش می‌یابد. از این گونه رفتار ورق که ناشی از اختلاف ضریب انبساط دو ماده تشکیل دهنده آن است می‌توان جهت استفاده به عنوان معیارهایی برای طراحی آن بهره برد.

شکل 11 تغییرات ولتاژ ماکزیمم ورق با دو شرط مرزی متفاوت را به ازای ثابت‌های توانی مختلف نشان می‌دهد. در این نمودار مشاهده می‌شود که



(الف-ا)



(ب-ب)

Fig. 12 Maximum deflection of “CSSS” (a) and “SSSS” (b) FGPM plate with three kinds of layers under thermal loading for various power law indexes

شکل 12 ماکزیمم خیز ورق پیزوالکتریک هدفمند با سه نوع لایه چینی مختلف به ازای ثابت‌های توانی مختلف تحت بار حرارتی (الف- شرایط مرزی CSSS ب- شرایط مرزی SSS)

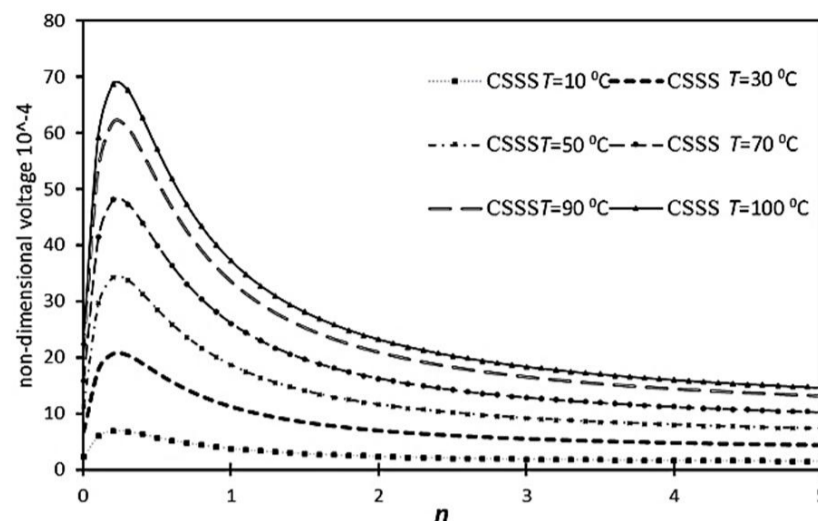
ورق را کاهش دهد. در ولتاژ ماکزیمم نیز این اتفاق می‌افتد. تفاوت در ضرایب پیزوالکتریک و همچنین خیزی که در اثر گرادیان دمایی ایجاد شده، باعث حالت بهینه در ولتاژ می‌شود. از ولتاژ ماکزیمم می‌توان در طراحی سنسورها و مواد هوشمند به‌گونه‌ای که بیشترین حساسیت را به گرادیان دمایی داشته باشد، استفاده کرد.

شکل 14 ولتاژ ماکزیمم ورق پیزوالکتریک هدفمند به ازای نسبت ضخامت‌های مختلف را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت $\frac{h_1}{h_3}$ ولتاژ ماکزیمم کاهش می‌یابد. با توجه به نمودار شکل 14 مشاهده می‌شود که لایه چینی حالت (ب) کاهش ولتاژ کمتری نسبت به سایر حالت‌ها را دارد که دلیل آن افزایش سهم ماده PVDF با افزایش نسبت ضخامت است که موجب نرم‌تر شدن کل سازه می‌شود.

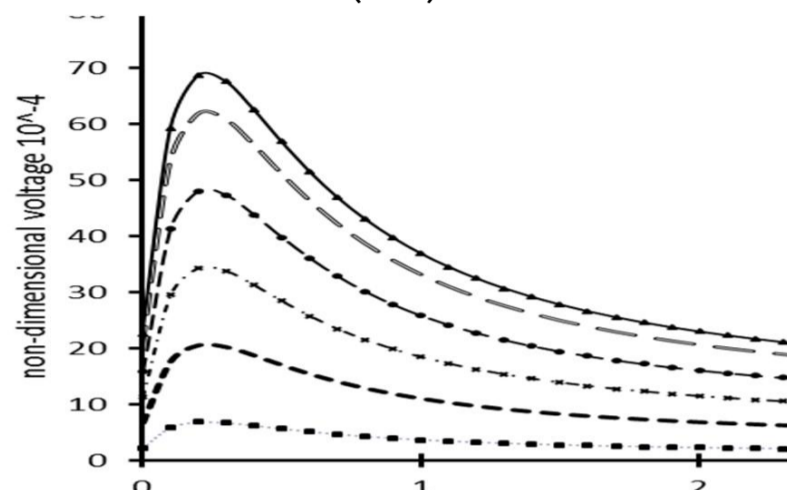
بنابراین خیز کل سازه کاهش کمتری پیدا می‌کند و در نتیجه ولتاژ نیز به موجب آن تغییرات کمتری را شاهد خواهد بود. بیشترین کاهش ولتاژ مربوط به لایه چینی حالت (ج) است که دلیل آن افزایش سهم ماده PZT در کل سازه است که موجب افزایش کلی سختی سازه می‌شود.

4- نتیجه‌گیری

در این مقاله ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های پیزوالکتریک تحت بار حرارتی مورد تحلیل قرار گرفت. در ابتدا معادلات حاکم بر ورق پیزوالکتریک هدفمند با استفاده از روش کار مجازی استخراج گردید. جهت حل معادلات به‌دست آمده از روش المان محدود مبتنی بر تئوری مرتبه اول برشی ورق



(الف-ا)



(ب-ب)

Fig. 11 Maximum voltage of FGPM plate with PZT layers for various power index “n” under different thermal gradient (“CSSS” (a) and “SSSS” (b))

شکل 11 ولتاژ ماکزیمم ورق پیزوالکتریک هدفمند با لایه‌های PZT به ازای ثابت‌های توانی مختلف تحت گرادیان‌های دمایی متفاوت (الف- شرایط مرزی CSSS ب- شرایط مرزی SSS)

3-3- مقایسه پاسخ ورق در لایه‌های مختلف در دو شرایط مرزی متفاوت

در این بخش به مقایسه پاسخ ورق به سه نوع لایه‌گذاری ورق پیزوالکتریک هدفمند پرداخته می‌شود. شکل 12، مقایسه خیز ورق با حالت‌های لایه چینی بیان شده (شکل 5: الف، ب و ج) به ازای ثابت‌های توانی مختلف را نشان می‌دهد. این نمودار نشان می‌دهد که ورق با لایه چینی PVDF و PZT (شکل 5: الف) بیشترین خیز مثبت (رو به بالا) را دارد. کمترین خیز مربوط به ورق با لایه چینی PZT (شکل 5: ج) است که علت آن سختی بیشتر این حالت نسبت به سایر حالت‌ها است.

شکل 13 مقایسه ولتاژ ورق با لایه‌های PZT و PVDF و ترکیب این دو را به ازای ثابت‌های توانی مختلف را نشان می‌دهد. در این نمودار مشاهده می‌شود که بیشترین ولتاژ مربوط به ورق با لایه PZT و کمترین آن مربوط به لایه PVDF است. دلیل این امر مربوط به ظرفیت الکتریکی ماده PZT است. مشاهده می‌شود که در استفاده از لایه‌های PZT کمترین خیز و بیشترین ولتاژ به‌دست می‌آید. با توجه به نمودارها مشاهده می‌شود که پاسخ استاتیکی ورق پیزوالکتریک در گرادیان حرارتی یک حالت بهینه دارد. یکی از دلایل این اتفاق، تفاوت در ضرایب انبساط حرارتی مواد PZT و PVDF است. همچنین برهم‌کنش مدول یانگ و ضرایب انبساط حرارتی مواد مختلف باعث می‌شود که بعد از نقطه ماکزیمم اثر افزایش مدول یانگ غالب باشد و خیز

استفاده شد. با استفاده از روش تغییراتی و روابط کرنش- تغییر مکان، ماتریس‌های سختی و نیرو به دست آمدند و در نهایت روابط جفت شده جابجایی و ولتاژ در ورق پیزوالکتریک هدفمند به دست آمدند.

با حل معادلات به دست آمده در حالت استاتیکی، نتایج موردنظر (جابجایی و ولتاژ) به دست آمدند. با توجه به نمودارها در ورق پیزوالکتریک هدفمند تحت بار حرارتی در یک ثابت توانی مشخص، خیز ورق ماکزیمم می‌شود. همچنین در یک ثابت توانی دیگر خیز صفر می‌شود. این ویژگی می‌تواند معیاری برای طراحی سنسورها و عملگرها باشد. با توجه به این ویژگی می‌توان سنسورهایی طراحی کرد که نسبت به یک گرادیان دمایی بخصوصی حساسیتی نداشته باشند و گرادیان دمایی باعث خیز در سنسور موردنظر نشود. با توجه به نمودارها مشاهده می‌شود که در یک ثابت توانی خاص ولتاژ ماکزیمم می‌شود. از این خاصیت هم می‌توان در طراحی حساسیت سنسورها به تغییرات دمایی استفاده کرد. ترکیب لایه چینی‌های مختلف از مواد پیزوالکتریک، عامل تعیین کننده پاسخ سازه در برابر انواع مختلف بارگذاری می‌باشد، به این صورت که با کمترین خیز می‌توان بیشترین ولتاژ را تولید کرد. می‌توان با تعیین لایه چینی و ثابت توانی مناسب، سازه‌ها را برای محیط‌هایی با گرادیان دمایی مشخص به عنوان سنسور یا عملگر طراحی کرده و از آن‌ها برای مقاصد خاص استفاده کرد.

5-مراجع

- [1] Z. Zhong, E. T. Shang, Three-dimensional exact analysis of a simply supported functionally graded piezoelectric plate, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 20, pp. 5335-5352, 2003.
- [2] N. Jalili, *Piezoelectric-based vibration-control systems applications to micro/nano sensors and actuators*, New York: Springer, pp.116-120, 2010.
- [3] P. J. C. Branco, J. A. Dente, On the electromechanics of a piezoelectric transducer using a bimorph cantilever undergoing asymmetric sensing and actuation, *Smart Materials and Structures*, Vol. 13, No. 4, pp. 631, 2004 .
- [4] J. Tichý, J. Erhart, E. Kittinger, J. Přívratská, *Fundamentals of Piezoelectric Sensorics: Mechanical, Dielectric, and Thermodynamical Properties of Piezoelectric Materials*, New York: Springer, pp. 8-11, 2010 .
- [5] Y. S. Li, W. J. Feng, Z. Y. Cai, Bending and free vibration of functionally graded piezoelectric beam based on modified strain gradient theory, *Composite Structures*, Vol. 115, No. 0, pp. 41-50, 2014 .
- [6] Z. Zhong, T. Yu, Analytical solution of a cantilever functionally graded beam, *Composites Science and Technology*, Vol. 67, No. 3-4, pp. 481-488, 2007 .
- [7] Y. Ootao, Y. Tanigawa, Three-dimensional transient piezothermoelasticity in functionally graded rectangular plate bonded to a piezoelectric plate, *International Journal of Solids and Structures* Vol. 37, No. 32, pp. 4377-4401, 2000.
- [8] X.-H. Wu, Y.-P. Shen , X.-G. Tian A high order theory for functionally graded piezoelectric shells, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 20, pp. 5325-5344, 2002.
- [9] J. Yang, H. J. Xiang, Thermo-electro-mechanical characteristics of functionally graded piezoelectric actuators, *Smart Materials and Structures*, Vol. 16, No. 3, pp. 784, 2007 .
- [10] B. Behjat, M. Salehi, A. Armin, Static and dynamic analysis of functionally graded piezoelectric plates under mechanical and electrical loading, *Scientia Iranica*, Vol. 18, No. 4, pp. 986-994, 2011 .
- [11] H. J. Xiang, Z. F. Shi, Static analysis for functionally graded piezoelectric actuators or sensors under a combined electro-thermal load, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 28, No. 2, pp. 338-346, 2009 .
- [12] M. Zaman, Z. Yan, L. Jiang, Thermal Effect On the Bending Behavior of Curved Functionally Graded Piezoelectric Actuators,

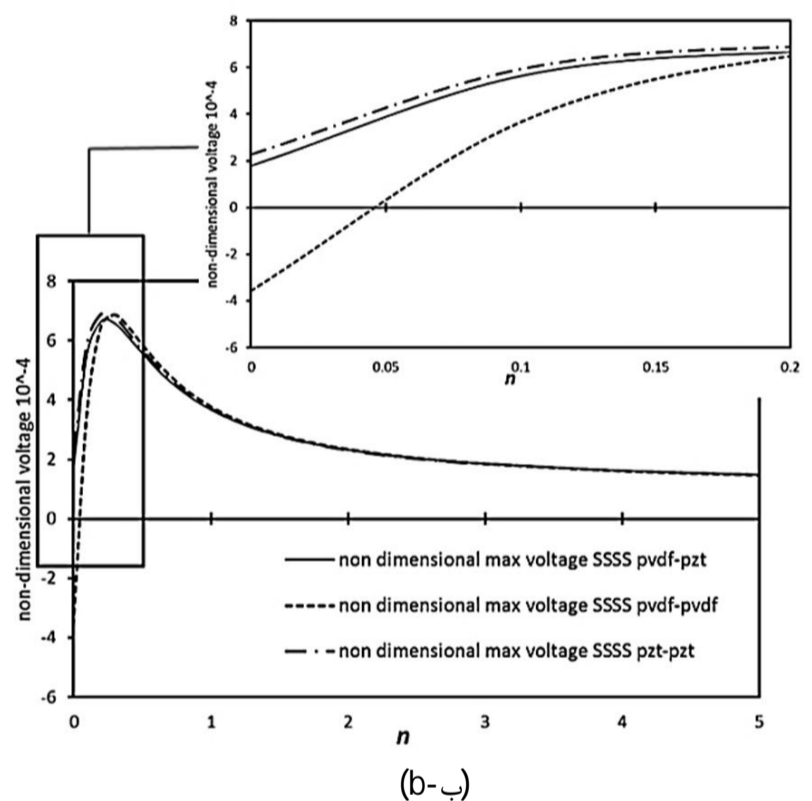
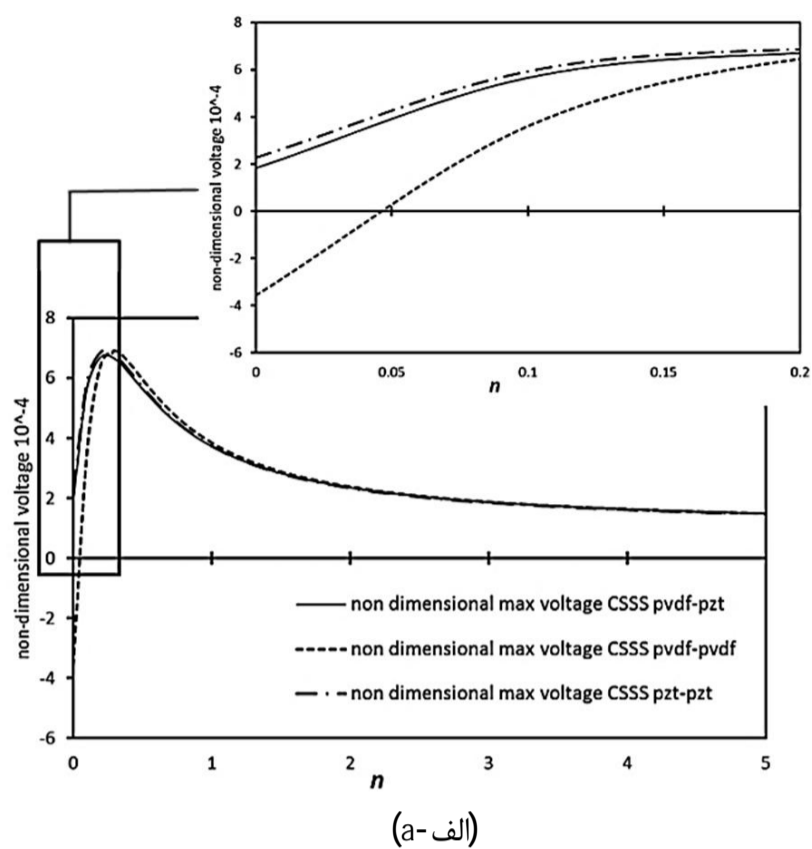


Fig. 13 Maximum voltage of “CSSS” (a) and “SSSS” (b)

FGPM plate with three kinds of layers under thermal loading for various power law indexes

شکل 13 ماکزیمم ولتاژ ورق پیزوالکتریک هدفمند با سه نوع لایه چینی مختلف به ازای ثابت‌های توانی مختلف تحت بار حرارتی (الف- شرایط مرزی CSSS -ب- شرایط مرزی SSS)

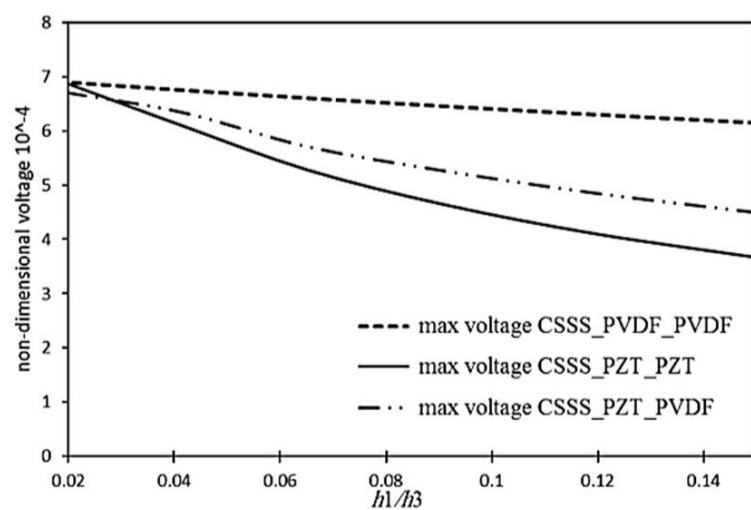


Fig. 14 Maximum voltage of FGPM plate versus thickness ratios with three kinds of layers under thermal loading

شکل 14 ولتاژ ماکزیمم به ازای نسبت ضخامت‌های مختلف برای سه نوع لایه چینی

- linear transient thermo-elastic response of FG beams integrated with a pair of FG piezoelectric sensors, *Composite Structures*, Vol. 107, No. 0, pp. 48-59, 2014.
- [19] T. Y. Ng, K. Y. Lam, K. M. Liew, J. N. Reddy, Dynamic stability analysis of functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 8, pp. 1295-1309, 2001.
- [20] D. Varelis, D. A. Saravanos, Non-linear coupled multi-field mechanics and finite element for active multi-stable thermal piezoelectric shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 76, No. 1, pp. 84-107, 2008.
- [21] G. E. Blandford, T. R. Tauchert, Y. Du, Self-strained piezothermoelastic composite beam analysis using first-order shear deformation theory, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 30, No. 1, pp. 51-63, 1999.
- [22] A. Bansal, A. Ramaswamy, FE Analysis of Piezo-Laminate Composites Under Thermal Loads, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 13, No. 5, pp. 291-301, 2002.
- [23] H.-J. Lee, D. A. Saravanos, Coupled layerwise analysis of thermopiezoelectric composite beams, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 34, No. 6, pp. 1231-1237, 1996.
- International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 02, No. 04, pp. 787-805, 2010 .
- [13] A. Alibeigloo, Thermoelasticity analysis of functionally graded beam with integrated surface piezoelectric layers, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 6, pp. 1535-1543, 2010 .
- [14] A. Alibeigloo, Thermoelastic solution for static deformations of functionally graded cylindrical shell bonded to thin piezoelectric layers, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 961-972, 2011 .
- [15] A. Komeili, A. H. Akbarzadeh, M. R. Eslami, Static Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Beams under Thermo-Electro-Mechanical Loads, *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 3, No. 153731, pp. 1-13, 2011 .
- [16] A. Nechibvute, A. Chawanda, P. Luhanga, Finite Element Modeling of a Piezoelectric Composite Beam and Comparative Performance Study of Piezoelectric Materials for Voltage Generation, *ISRN Materials Science*, Vol. 2012, No. 2012, pp. 1-11, 2012 .
- [17] A. Ghorbanpour Arani, R. Kolahchi, A. A. Mosallaie Barzoki, A. Loghman, Electro-thermo-mechanical behaviors of FGPM spheres using analytical method and ANSYS software, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 1, pp. 139-157, 2012 .
- [18] M. Bodaghi, A. R. Damanpack, M. Shakeri, Geometrically non-