مجله مهندسی مکانیک مدرس، خرداد 1394، دوره 15، شماره 3، ص‌ص 153-161

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

ناپایداری دینامیکی در تیرهای با مقطع متغیر در اثر تحریک باد

حمید معین‌فرد[1*]، بهنام معتکف ایمانی[2]، مرتضی داودی[3]، امین رحیم‌زاده[4]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
3- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
4- کارشناس ارشد، مهندسی هوافضا، پژوهشکده هواخورشید، مشهد
* مشهد، صندوق پستی 9177948974، h_moeenfard@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 01 آبان 1393
پذیرش: 21 آذر 1393
ارائه در سایت: 11 بهمن 1393

کلید واژگان:
تیر مقطع متغیر
شبیه‌سازی حوزه زمان
سرعت ناپایداری
تحریک باد

چکیده

مدل‌سازی دینامیکی تیرها تحت تاثیر نیروهای آیرودینامیکی در بسیاری از شاخه‌های مهندسی از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله روش جدیدی برای مدل‌سازی حوزه‌ی زمان تیرهای یکسرگیردار با خواص هندسی و فیزیکی متغیر در طول تیر، تحت تحریک جریان باد ارائه می‌شود. در ابتدا با استفاده از اصل همیلتون و با فرض تئوری اویلر- برنولی معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی حرکت تیرِ با مقطع متغیر استخراج می‌گردد. در ادامه از یک روش عددی تفاضل محدود برای تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر با مقطع متغیر استفاده شده است. در قدم بعدی با استفاده از روش گلرکین و بر پایه شکل مودهای استخراج شده در مرحله قبل، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حرکت تیر، تبدیل به معادله دیفرانسیلی معمولی با ترم‌های غیرخطیِ تحریک می‌گردد. نیروهای آیرودینامیکی با استفاده از نرم افزار کد باز XFOIL مدل‌سازی شده‌اند. تیر مورد بررسی دارای مشخصات منطبق بر پره توربین بادی 100 کیلوواتی است که هم اکنون در پژوهشکده هواخورشید دانشگاه فردوسی مشهد در مرحله ساخت و راه‌اندازی است. نتایج شبیه‌سازی مشخص می‌نماید که در نظر گرفتن یک شکل مود در روش گلرکین برای تخمین پاسخ دینامیکی تیر، جوابهای قابل قبولی خواهد داشت. همچنین مشاهده شد که سرعت ناپایداری با میرایی مودال تیر نسبت مستقیم دارد و به گونه‌ای است که سرعت ناپایداری در تیرهای با میرایی بالاتر، بیشتر از سرعت ناپایداری در تیرهای با میرایی پایین‌تر است. نتایج حاصل از این مطالعه می‌توانند به خوبی در طراحی بهینه تیرهای با خواص هندسی و فیزیکی متغیر مورد استفاده قرار بگیرند.

Dynamic instability in tapered beams under wind excitation

Hamid Moeenfard[1*], Behnam Moetakef Imani[1], Morteza Davoudi[1], Amin Rahimzadeh[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
2- Sun Air Research Institute, Ferdowsi University of Mashhad, Iran
*P.O.B. 9177948974, Mashhad, Iran, h_moeenfard@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 October 2014
Accepted 12 December 2014
Available Online 31 January 2015

Keywords:
Tapered beam
Time domain simulation
Instability speed
Wind excitation

ABSTRACT

Dynamic modeling of beams under aerodynamic loading is extremely important in many engineering applications. So the objective of this paper is to present a new approach to model and simulate the time domain response of tapered cantilever beams with airfoil cross section to wind excitation. The extended Hamilton's principles along with the Euler-Bernoulli assumptions are utilized to derive the Partial Differential Equation (PDE) governing the deflection of the beam. A new finite difference based algorithm is proposed for finding the mode-shapes as well as the natural frequencies of the beam. These mode-shapes are then used in a Galerkin projection procedure to convert the PDE governing the system's behavior into strongly coupled nonlinear Ordinary Differential Equations (ODEs). The aerodynamic loadings are modeled using the open source code of XFOIL. The blade of an under developed 100kW wind turbine is considered as a case study. The results reveal that even a single mode approximation is accurate enough in predicting the beam's dynamic exposed to wind excitation. It was also observed that the instability speed of beams with higher modal damping is considerably higher than those with lower modal damping. The knowledge resulting from this work is expected to enable the analysis, optimization, and synthesis of tapered cantilever beams for improved dynamic performance.

1- مقدمه

مدل‌سازی برهم‌کنش سیال و جامد در چند دهه اخیر بسیار مورد توجه بوده است. برهم کنش سازه انعطاف پذیر و جریان سیال اطراف آن، امری غیرقابل اجتناب است که در بسیاری از شاخه‌های مهندسی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته شده است. از جمله این شاخه‌های مهندسی می‌توان به مطالعات در حوزه مهندسی پزشکی، بررسی تاثیر جریان حول بال‌های هواپیما و بالگرد، مطالعه رفتار ساختمان‌ها و پل‌ها در حضور جریان باد و در نهایت به مطالعه رفتار پره‌های توربین بادی تحت تاثیر وزش باد اشاره نمود. شبیه‌سازی برهم‌کنش سیال و سازه در این مسائل با در نظر گرفتن تمامی جزئیات و پیچیدگی‌ها، امری بسیار دشوار است[1]. شیوه مورد قبول در تحلیل

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
H. Moeenfard, B. Moetakef Imani, M. Davoudi, A. Rahimzadeh, Dynamic instability in tapered beams under wind excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 153-161, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.35.5]

سیستم‌های پیچیده، مدل‌سازی و مطالعه اجزاء تشکیل دهنده به صورت جداگانه است. بدیهی است که در این شیوه‌ی مطالعه، مدل تیر یکی از مدل‌های پرکاربرد برای شبیه‌سازی سازه‌هایی همچون بال‌های هواپیما و بالگرد و همچنین پره‌های توربین بادی است. به همین جهت در این مقاله مدل تیر با خواص هندسی و فیزیکی متغیر جهت مدل‌سازی اجزاء تیر مانند، همچون پره‌های توربین بادی، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. با اضافه نمودن نیروهای آیرودینامیکی به مدل تیر یکسرگیردار با مقطع متغیر و مطالعه بر هم‌کنش سازه و سیال می‌توان به درک صحیحی از رفتار آیروالاستیسیته سازه‌های ذکر شده دست پیدا نمود.

بررسی پاسخ ارتعاشاتی و پایداری‌های دینامیکی و استاتیکی تیر در قالب دو روش کلی انجام می‌گیرد که عبارتند از: حل مقادیر ویژه و بررسی پاسخ حوزه زمان. بسیاری از محققان از روش حل مقادیر ویژه برای تخمین پایداری پاسخ سازه‌ها تحت نیروهای آیرودینامیکی استفاده نموده‌اند. این روش به طور عمده در سیستم‌هایی که قابلیت خطی‌سازی داشته باشند مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این روش پایداری دینامیکی سیستم طبق قاعده لیاپانوف سنجیده خواهد شد، لذا سیستم تنها در حالتی پایدار خواهد بود که ریشه های معادله مشخصه متناظر با معادله حرکت خطی‌سازی شده سیستم، در سمت چپ صفحه مختلط قرار داشته باشند.

گلند [2] با استفاده از این روش سرعت فلاتر در تیرهای با سطح مقطع یکنواخت را تعیین نمود. اسکندری و همکارانش [3] خواص آیروالاستیک پره‌های با طول زیاد را تحت نیروهای آیرودینامیکِ شبه استاتیک بررسی نمودند. منچون [4] روش حل مقدار ویژه را برای مطالعه واگرایی پاسخ دینامیکی تیر کامپوزیتی بکار برد که سطح مقطع تیر مورد نظر بصورت خطی تغییر می‌کرد.

دسته دیگری از محققان شبیه‌سازی دینامیکی در حوزه زمان را برای تعیین پایداری تیر، مبنای کار خود قرار داده‌اند. در این روش می‌بایست معادله حرکت تیر به صورت کامل حل شود تا پاسخ دینامیکی تیر در حوزه زمان تحت اثر نیروهای باد بدست آید. در این حالت اگر پاسخ دینامیکی تیر با گذشت زمان همگرا شود، می‌توان سیستم را یک سیستم پایدار فرض نمود. اگر پاسخ تیر با گذشت زمان واگرا شد، سیستم جزء سیستم‌های ناپایدار دسته بندی خواهد گردید و در نهایت اگر دامنه پاسخ تیر تحت نیروهای آیرودینامیکی ثابت ماند در این حالت تیر اصطلاحا در مرز ناپایداری قرار داشته و ارتعاشات با دامنه محدود ادامه خواهد داشت. تانگ [5] رفتار آیروالاستیسیته بال مثلثی شکل را تحت اثر باد با سرعت‌های مادون صوت مطالعه نمود. تانگ و داول [6] با در نظر گرفتن پارامترهای غیرخطی سازه‌ای در معادله حرکت بال‌های با طول زیاد و مدل آیرودینامیکی اونرا، سرعت فلاتر و نوسانات دامنه محدود این نوع از بال‌ها را تحت بررسی قرار داده‌اند. پتیل و همکارانش [7] روشی برای تحلیل آیروالاستیسیته بال‌های هواپیما ارائه دادند که در آن، از مدل نیروهای آیرودینامیکی ناپایا استفاده شده است.

همان‌گونه که به اختصار مرور گردید، مدل‌سازی دینامیکی حوزه زمان و حل مقادیر ویژه برای تحلیل آیروالاستیسیته تیرها تحت اثر نیروهای آیرودینامیکی به‌طور گسترده در شاخه‌های مختلف انجام شده است. با این حال در اکثر مطالعات انجام شده فرض ابتدایی بر این بوده است که سطح مقطع و خواص هندسی و فیزیکی در طول تیر ثابت باشد. تعداد اندکی از این مطالعات که به مطالعه تیرهای با سطح مقطع متغیر پرداخته‌اند، با این فرض همراه بوده‌اند که تغییرات سطح مقطع به‌صورت خطی باشد. این در حالی است که در واقعیت بسیاری از سازه‌های نام برده شده از جمله پره‌های توربین بادی، تغییرات سختی خمشی و توزیع جرم تیر توابعی غیرخطی در راستای طول تیر هستند. با توجه به این موضوع تیر مورد مطالعه در این مقاله یک تیر با مقطع و خواص متغیر انتخاب شده است که تغییرات پارامترهای آن توابع غیرخطی بر حسب مختصات راستای طول تیر هستند. مشخصات این تیر منطبق بر پره توربین بادی 100 کیلووات در حال ساخت پژوهشکده هواخورشید دانشگاه فردوسی مشهد است. پاسخ دینامیکی پره ذکر شده با در نظر گرفتن تمام جزئیات محاسبه می‌شود. به دلیل بالا بودن نسبت طول پره به سطح مقطع آن، از تئوری اویلر برنولی برای تعیین معادله حرکت تیر استفاده خواهد شد. در این تئوری فرض می‌شود که صفحه سطح مقطع تیر که در حالت بدون تغییر شکل بر تار خنثی عمود است، پس از تغییر شکل نیز عمود باقی می‌ماند[9,8]. مدل تیر بدست آمده براساس این فرضیه برای مطالعه رفتار استاتیکی، دینامیکی و ارتعاشات تیر به‌کار گرفته شده است. در قدم اول مدل‌سازی دینامیکی تیر، از یک روش عددی به نسبت جدید برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها استفاده شده است. در قدم بعدی و در قالب روش گلرکین از شکل مودهای بدست آمده در مرحله قبل استفاده می‌شود تا معادله حرکت تیر که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است به معادله دیفرانسیل معمولی کاهش مرتبه پیدا کند. معادله بدست آمده به فضای حالت منتقل شده و پاسخ دینامیکی تیر با حل معادلات در فضای حالت محاسبه می‌شود. نیروهای آیرودینامیکی بر پایه روش شبکه‌بندی[1] و به صورت تابعی از زاویه حمله و سرعت باد در مقاطع مختلف تیر محاسبه می گردند. این نیروها به‌صورت همزمان و با فراخوانی نرم‌افزار کد باز XFOIL محاسبه می‌گردند[10]. این نرم‌افزار از ترکیب روش حل جریان پتانسیل و حل جریان ویسکوز، نیروهای سیالاتی وارد بر سطح مقطع تیر را شبیه‌سازی می‌کند. قسمت حل جریان ویسکوز، برای شبیه‌سازی جریان داخل لایه مرزی ایرفویل استفاده می‌شود. در حالی که تئوری پتانسیل برای حل جریان خارج لایه مرزی کاربرد دارد[11].

2- رابطه‌بندی مسئله

در قسمت‌های مختلف این بخش به‌صورت قدم به قدم فرمول‌بندی حرکت دینامیکی تیر با مقطع متغیر تحت تحریک نیروی باد به‌صورت کامل استخراج شده و روش حل آن نیز ارائه خواهد شد.

2-1- استخراج معادلات حاکم

تیر یکسرگیردار با مقطع متغیر، تحت تحریک نیروی باد مفروض است. انرژی جنبشی و پتانسیل تیر طبق رابطه (1) و (2) عبارتند از:

$$\widehat{\mathbb{K}}(\hat{t}) = \frac{1}{2}\int_0^l \widehat{m}(\hat{x})\left(\frac{\partial \widehat{w}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{t}}\right)^2 d\hat{x} \qquad (1)$$

$$\widehat{\mathbb{U}}(\hat{t}) = \frac{1}{2}\int_0^l \widehat{EI}(\hat{x})\left(\frac{\partial^2 \widehat{w}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{x}^2}\right)^2 d\hat{x} \qquad (2)$$

که در این روابط $\widehat{\mathbb{K}}(\hat{t})$ ، $\widehat{\mathbb{U}}(\hat{t})$ ، $\widehat{w}(\hat{x},\hat{t})$ ، $\widehat{m}(\hat{x})$ و $\widehat{EI}(\hat{x})$ به‌ترتیب انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل کرنشی، خیز، جرم بر واحد طول و سختی خمشی تیر نامیده می‌شوند.

فرض می‌شود، تیر روی یک بستر میرا نوسان می‌کند و $\hat{C}(\hat{x})$ مقدار میرایی بر واحد طول تیر است. با فرض آن‌که نیروی آیرودینامیکی وارد بر واحد طول

1- Panel Method

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.35.5]

تیر با $\hat{f}(\hat{x},\hat{t})$ نمایش داده شود، کار مجازی نیروهای خارجی ($\delta\hat{W}_{Ext}$) بر روی تیر طبق رابطه (3) خواهد بود.

$$\delta\hat{W}_{Ext} = \int_0^l \hat{f}(\hat{x},\hat{t})\delta\hat{w}(\hat{x},\hat{t})\,d\hat{x} - \int_0^l \hat{C}(\hat{x})\frac{\partial\hat{w}(\hat{x},\hat{t})}{\partial\hat{t}}\delta\hat{w}(\hat{x},\hat{t})\,d\hat{x} \tag{3}$$

با داشتن انرژی جنبشی، پتانسیل و کار مجازی و به کمک اصل همیلتون توسعه یافته، می‌توان معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی حرکت تیر یکسرگیردار طبق رابطه (4) و همچنین شرایط مرزی مربوط به آن را بر اساس روابط (5) تا (8) تعیین نمود.

$$\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\left(\widehat{EI}(\hat{x})\frac{\partial^2\hat{w}(\hat{x},\hat{t})}{\partial\hat{x}^2}\right) + \hat{m}(\hat{x})\frac{\partial^2\hat{w}(\hat{x},\hat{t})}{\partial\hat{t}^2} + \hat{C}(\hat{x})\frac{\partial\hat{w}(\hat{x},\hat{t})}{\partial\hat{t}} = \hat{f}(\hat{x},\hat{t}) \tag{4}$$

$$\hat{w}(0,\hat{t}) = 0 \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial\hat{w}(\hat{x},\hat{t})}{\partial\hat{x}}\right|_{\hat{x}=0} = 0 \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial^2\hat{w}(\hat{x},\hat{t})}{\partial\hat{x}^2}\right|_{\hat{x}=l} = 0 \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial^3\hat{w}(\hat{x},\hat{t})}{\partial\hat{x}^3}\right|_{\hat{x}=l} = 0 \tag{8}$$

در معادله‌های (7) و (8)، l طول تیر است.

به جهت راحتی کار، متغیرهای بی‌بعد در روابط (9) تا (11) معرفی می‌گردند:

$$w = \frac{\hat{w}}{l} \tag{9}$$

$$x = \frac{\hat{x}}{l} \tag{10}$$

$$t = \frac{\hat{t}}{T} \tag{11}$$

مقدار T در رابطه (12) معرفی شده است.

$$T = l^2\sqrt{\frac{\hat{m}(0)}{\widehat{EI}(0)}} \tag{12}$$

با استفاده از این متغیرهای بدون بعد، معادله (4) و شرایط مرزی ذکر شده در معادلات (5) تا (8) برحسب پارامترهای بدون بعد به فرم روابط (13) تا (17) بیان می‌شوند.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) + m(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + C(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = f(x,t) \tag{13}$$

$$w(0,t) = 0 \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=1} = 0 \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=1} = 0 \tag{17}$$

در این معادلات $EI(x)$، $m(x)$، $C(x)$ و $f(x,t)$ به ترتیب پارامترهای بدون بعد متناظر با $\widehat{EI}(\hat{x})$، $\hat{m}(\hat{x})$، $\hat{C}(\hat{x})$ و $\hat{f}(\hat{x},\hat{t})$ هستند که مقدار آن‌ها طبق روابط (18) تا (21) تعیین می‌گردد.

$$EI(x) = \frac{\widehat{EI}(\hat{x})}{\widehat{EI}(0)} \tag{18}$$

$$m(x) = \frac{\hat{m}(\hat{x})}{\hat{m}(0)} \tag{19}$$

$$C(x) = \frac{l^4}{T.\widehat{EI}(0)}\hat{C}(\hat{x}) \tag{20}$$

$$f(x,t) = \frac{l^3}{\widehat{EI}(0)}\hat{f}(\hat{x},\hat{t}) \tag{21}$$

2-2- محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها

اولین قدم در حل معادله (13) تحت شرایط مرزی (14) تا (17)، پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها برای تیر با سطح مقطع متغیر است. برای تعیین شکل مودهای تیر مورد نظر فرض می‌شود که در هر شکل مود تمامی المان‌های تیر به‌صورت آزاد و بدون نیروی میرایی و به‌صورت هم فرکانس و هم فاز نوسان می‌کنند، بنابراین در این مرحله میرایی و نیروهای خارجی موجود در معادله (13) برابر با صفر قرار داده می‌شوند. فرکانسی که سیستم در هر شکل مود با آن نوسان می‌کند فرکانس طبیعی متناظر با همان شکل مود نامیده می‌شود، بنابراین اگر فرض شود تیر با شکل مود i ام خود در حال نوسان است، پاسخ سیستم طبق رابطه (22) خواهد بود.

$$w(x,t) = \phi_i(x)\exp(I.\omega_i t) \tag{22}$$

که در این معادله $I = \sqrt{-1}$ است، ω_i نشان‌دهنده i امین فرکانس طبیعی و $\phi_i(x)$ شکل مود i ام تیر با مقطع متغیر است.

با جای‌گذاری معادله (22) در معادلات (13) تا (17) و قرار دادن $f(x,t) = 0$ و $C(x) = 0$ معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌گردد. نتیجه در روابط (23) تا (27) نمایش داده شده است.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}\right) - \omega_i^2 m(x)\phi_i(x) = 0 \tag{23}$$

$$\phi_i(0) = 0 \tag{24}$$

$$\left.\frac{d\phi_i(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0 \tag{25}$$

$$\left.\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}\right|_{x=1} = 0 \tag{26}$$

$$\left.\frac{d}{dx}\left(EI(x)\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}\right)\right|_{x=1} = 0 \tag{27}$$

به دلیل آن‌که تیر مورد مطالعه یک تیر با مقطع متغیر است (EI تابعی از مختصات راستای طول تیر است)، پیدا کردن حل دقیق برای معادله (23) اگر

نه غیرممکن، بسیار سخت خواهد بود. لذا در این قسمت از یک روش عددی تفاضل محدود برای حل این معادله و پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها استفاده می‌شود. الگوریتم حل در ادامه به‌صورت خلاصه معرفی می‌گردد.

با تعریف $Y_j^{(i)}(x)$ $1 \le i \le \infty$ و $1 \le j \le 4$ به‌صورت رابطه (28)، می‌توان معادله دیفرانسیل مرتبه چهار که شکل مودهای تیر از آن استخراج می‌شود را به چهار معادله مرتبه اول برحسب $Y_j^{(i)}(x)$ کاهش مرتبه داد.

$$\vec{Y}^{(i)} = \left[Y_1^{(i)}(x) \quad Y_2^{(i)}(x) \quad Y_3^{(i)}(x) \quad Y_4^{(i)}(x)\right]^T = \left[\phi_i(x) \quad \frac{d\phi_i(x)}{dx} \quad \frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2} \quad \frac{d^3\phi_i(x)}{dx^3}\right]^T \qquad (28)$$

بالانویس T در معادله (28) نشان دهنده ترانهاده ماتریس است.

با داشتن $Y_j^{(i)}(x)$ ، $1 \le i \le \infty$,$1 \le j \le 4$ که در معادله بالا معرفی گردید و با بسط مشتقات معادله (23)، می‌توان برای پیدا کردن شکل مود i ام تیر، معادلات دیفرانسیل (23) تا (27) را به دستگاه معادله دیفرانسیلی مرتبه اول طبق رابطه (29) تبدیل نمود.

$$\frac{d\vec{Y}^{(i)}(x)}{dx} = [A]_{(x,\omega_i)}\vec{Y}^{(i)}(x) \qquad (29)$$

که در این معادله $[A]_{(x,\omega_i)}$ یک ماتریس 4×4 با مولفه‌های غیر صفر معرفی شده در روابط (30) تا (35) است.

$$a_{1,2}(x,\omega_i) = 1 \qquad (30)$$

$$a_{2,3}(x,\omega_i) = 1 \qquad (31)$$

$$a_{3,4}(x,\omega_i) = 1 \qquad (32)$$

$$a_{4,1}(x,\omega_i) = \frac{m(x)\omega_i^2}{EI(x)} \qquad (33)$$

$$a_{4,3}(x,\omega_i) = -\frac{1}{EI(x)}\frac{d^2\left(EI(x)\right)}{dx^2} \qquad (34)$$

$$a_{4,4}(x,\omega_i) = -\frac{1}{EI(x)}\frac{d\left(EI(x)\right)}{dx} \qquad (35)$$

در معادلات (30) تا (35) $a_{i,j}$ مولفه i,j از ماتریس $[A]$ است.

به کمک تقریب مرتبه اول می‌توان مشتق ماتریس $\vec{Y}^{(i)}(x)$ را به فرم رابطه (36) تعریف نمود:

$$\frac{d\vec{Y}^{(i)}(x)}{dx} = \frac{\vec{Y}^{(i)}(x+\Delta x) - \vec{Y}^{(i)}(x)}{\Delta x} \qquad (36)$$

که در این رابطه Δx طول المان‌های مفروض در راستای تیر است. با جای‌گذاری معادله (36) در معادله (29)، مقدار $\vec{Y}^{(i)}(x+\Delta x)$ به شکل رابطه (37) به‌دست خواهد آمد.

$$\vec{Y}^{(i)}(x+\Delta x) = \left[[A]_{(x,\omega_i)}\Delta x + I_{4\times4}\right]\vec{Y}^{(i)}(x) \qquad (37)$$

که در آن $I_{4\times4}$ ماتریس همانی 4×4 است.

طول نرمال شده تیر، به n المان با طول‌های برابر تقسیم می‌شود. در نتیجه تعداد $n+1$ گره در تمام طول تیر وجود خواهد داشت که از شماره 0 تا n نام‌گذاری می‌گردند.

معادله (37) را می‌توان برای تمامی مقادیر x که به‌صورت $x = j.\Delta x$ ، $0 \le j \le n,\ j \in \mathbb{N}$ هستند بازنویسی نمود، به راحتی می‌توان اثبات نمود که رابطه (38) بین گره اول و آخر برقرار است.

$$\vec{Y}^{(i)}(k.\Delta x) = \left[[A]_{((k-1).\Delta x,\omega_i)}\Delta x + I_{4\times4}\right] \times \left[[A]_{((k-2).\Delta x,\omega_i)}\Delta x + I_{4\times4}\right] \times \dots \times \left[[A]_{(0,\omega_i)}\Delta x + I_{4\times4}\right]\vec{Y}^{(i)}(0) \quad 1 \le k \le n \qquad (38)$$

اگر در معادله (38)، k برابر با n (گره آخر در راستای طول تیر) قرار داده شود، در این صورت رابطه (39) حاصل خواهد شد:

$$\vec{Y}^{(i)}(1) = [B]_{(\omega_i)}\vec{Y}^{(i)}(0) \qquad (39)$$

که در آن $[B]_{(\omega_i)}$ طبق رابطه (40) خواهد بود.

$$[B]_{(\omega_i)} = \left[[A]_{((n-1)\cdot\Delta x,\omega_i)}\Delta x + I_{4\times4}\right] \times \left[[A]_{((n-2)\cdot\Delta x,\omega_i)}\Delta x + I_{4\times4}\right] \times \dots \times \left[[A]_{(0,\omega_i)}\Delta x + I_{4\times4}\right] \qquad (40)$$

با این ترتیب فرم بسط داده شده معادله (39) به‌صورت رابطه (41) خواهد بود:

$$\begin{bmatrix}\phi_i(1)\\ \phi'_i(1)\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_{1,1}(\omega_i) & b_{1,2}(\omega_i) & b_{1,3}(\omega_i) & b_{1,4}(\omega_i)\\ b_{2,1}(\omega_i) & b_{2,2}(\omega_i) & b_{2,3}(\omega_i) & b_{2,4}(\omega_i)\\ b_{3,1}(\omega_i) & b_{3,2}(\omega_i) & b_{3,3}(\omega_i) & b_{3,4}(\omega_i)\\ b_{4,1}(\omega_i) & b_{4,2}(\omega_i) & b_{4,3}(\omega_i) & b_{4,4}(\omega_i)\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \phi''_i(0)\\ \phi'''_i(0)\end{bmatrix} \qquad (41)$$

که در آن $(\ )'$ نشان‌دهنده مشتق نسبت به x و $b_{m,n}$ مولفه m,n ماتریس $[B]_{(\omega_i)}$ است.

معادله (41) را می‌توان به‌صورت چهار معادله خطی همگن برحسب $\phi_i(1)$ ، $d\phi_i(x)/dx|_{x=1}$ ، $d^2\phi_i(x)/dx^2|_{x=0}$ و $d^3\phi_i(x)/dx^3|_{x=0}$ بازنویسی نمود، نتیجه این معادلات به فرم ماتریسی در رابطه (42) نمایش داده شده است.

$$[D]_{(\omega_i)}\vec{\Phi}^{(i)} = \vec{0} \qquad (42)$$

مقدار $\vec{\Phi}^{(i)}$ در رابطه (43) و $\vec{0}$ در رابطه (44) معرفی شده است.

$$\vec{\Phi}^{(i)} = \left[\phi_i(1) \quad \left.\frac{d\phi_i(x)}{dx}\right|_{x=1} \quad \left.\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}\right|_{x=0} \quad \left.\frac{d^3\phi_i(x)}{dx^3}\right|_{x=0}\right]^{\mathrm{T}} \qquad (43)$$

$$\vec{0} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \qquad (44)$$

و $[D]_{(\omega_i)}$ به صورت رابطه (45) تعریف می‌شود:

$$[D]_{(\omega_i)} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -b_{1,3}(\omega_i) & -b_{1,4}(\omega_i)\\ 0 & 1 & -b_{2,3}(\omega_i) & -b_{2,4}(\omega_i)\\ 0 & 0 & +b_{3,3}(\omega_i) & +b_{3,4}(\omega_i)\\ 0 & 0 & +b_{4,3}(\omega_i) & +b_{4,4}(\omega_i)\end{bmatrix} \qquad (45)$$

با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس $[D(\omega_i)]$ جواب‌های غیر بدیهی معادله

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.35.5]

(23) بدست خواهد آمد. ریشه‌های معادله $|D(\omega_i)| = 0$، فرکانس‌های طبیعی سیستم خواهند بود. با داشتن مقادیر فرکانس‌های طبیعی (مقادیر ویژه)، بردارهای ویژه ماتریس $D(\omega_i)$ قابل محاسبه خواهند بود. بردار ویژه، بردار $\vec{\Phi}^{(i)}$ است که در معادله (42) به آن اشاره شده است. با معلوم بودن بردار ویژه $\vec{\Phi}^{(i)}$ مقادیر $d^2\phi_i(x)/dx^2|_{x=0}$ و $d^3\phi_i(x)/dx^3|_{x=0}$ که به ترتیب مولفه‌های سوم و چهارم بردار $\vec{\Phi}^{(i)}$ هستند، مشخص می‌شود. بنابراین بردار $\vec{Y}^{(i)}(0) = [0 \quad 0 \quad d^2\phi_i(x)/dx^2|_{x=0} \quad d^3\phi_i(x)/dx^3|_{x=0}]^T$ به صورت کامل تعیین می‌گردد. با استفاده از $\vec{Y}^{(i)}(0)$ و معادله (38) می‌توان میزان جابجایی تمامی گره‌های تیر در شکل مود iام را محاسبه نمود و به این ترتیب شکل مودهای تیر با مقطع متغیر بدست خواهند آمد.

2-3- معادله دینامیکی حرکت تیر تحت نیروی تحریک باد

به منظور پیدا کردن پاسخ دینامیکی تیر با تحریک باد، روش گلرکین به کار برده خواهد شد. در این روش فرض می‌شود که پاسخ دینامیکی تیر به صورت ترکیب خطی از شکل مودهای تیر و طبق رابطه (46) باشد:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x) q_i(t) \tag{46}$$

که در این معادله $\phi_i(x)$ شکل مود iام تیر است و در بخش قبل محاسبه گردید، $q_i(t)$ بخش زمانی پاسخ مربوط به شکل مود iام تیر است و N تعداد شکل مودهای به‌کار رفته در تخمین پاسخ دینامیکی تیر را مشخص می‌کند. به‌صورت تئوری برای دست‌یابی به تخمین دقیق پاسخ دینامیکی تیر، تعداد شکل مودهای به کار رفته در این تخمین می‌بایست بی‌نهایت باشد، اما در عمل حتی استفاده از یک شکل مود هم معمولا می‌تواند تخمین‌های قابل قبولی ارائه دهد. صحت این ادعا در ادامه‌ی همین مقاله به‌صورت کمی اثبات خواهد شد.

با جای‌گذاری معادله (45) در معادله (13) و با فرض این‌که میرایی تیر به صورت تناسبی، متناسب با توزیع جرم باشد، به‌صورت $C(x) = \beta m(x)$ (که در آن β یک ضریب ثابت است)، معادله (13) به رابطه (47) تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\sum_{i=1}^{N} q_i(t)\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}\right)\\ &+ m(x)\left(\sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)\frac{d^2 q_i(t)}{dt^2}\right)\\ &+\beta m(x)\left(\sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)\frac{dq_i(t)}{dt}\right) = f(x,t)\end{aligned} \tag{47}$$

هر دو سمت معادله (47) را در $\phi_j(x)$ $1 \le j \le N$ ضرب و از نتیجه آن روی طول نرمال تیر انتگرال می‌گیریم. نتیجه طبق رابطه (48) خواهد بود.

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \phi_j(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\sum_{i=1}^{N}\left(q_i(t)\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}\right)\right)dx\\ &+\int_0^1 \phi_j(x)\left(m(x)\sum_{i=1}^{N}\left(\phi_i x)\frac{d^2 q_i(t)}{dt^2}\right)\right)dx\\ &+\beta\int_0^1\left(\phi_j(x)m(x)\sum_{i=1}^{N}\left(\phi_i(x)\frac{dq_i(t)}{dt}\right)\right)dx\\ &=\int_0^1 \phi_j(x)f(x,t)dx\end{aligned} \tag{48}$$

با اعمال شرایط تعامد، می‌توان معادله (48) را تا حدودی ساده نمود. اولین شرایط تعامد که برای تیرهای مقطع متغیر برقرار است، در رابطه (49) معرفی می‌شود [8]:

$$\int_0^1 m(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = \delta_{ij}\int_0^1 m(x){\varphi_i}^2 dx \tag{49}$$

که در آن δ_{ij} نشان دهنده دلتا کرانیکر است.

با استفاده از معادله (23) می‌توان شرط تعامد دیگری را به‌دست آورد. به راحتی می‌توان اثبات نمود که رابطه (50) برقرار است.

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left(\phi_j(x)\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\right)\right)dx\\ &=\delta_{ij}\omega_i^2\int_0^1 m(x){\phi_i}^2 dx\end{aligned} \tag{50}$$

در این معادلات ω_i ، شکل مد i ام بدون بعد تیر است.

ضریب تناسب میرایی تیر را می‌توان با استفاده از نسبت میرایی ξ_i، به فرم ساده در رابطه (51) تبدیل کرد.

$$\beta = 2\xi_i\omega_i \tag{51}$$

معادله (48) با استفاده از معادلات (49) و (50) تا حد زیادی به‌صورت رابطه (52) ساده خواهد شد:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + 2\xi_i\omega_i\frac{dq_i(t)}{dt} + \omega_i^2 q_i(t)\\ &=\frac{\int_0^1 \phi_i(x)f(x,t)dx}{\int_0^1 m(x)\phi_i(x)^2 dx},\quad 1\le i\le N\end{aligned} \tag{52}$$

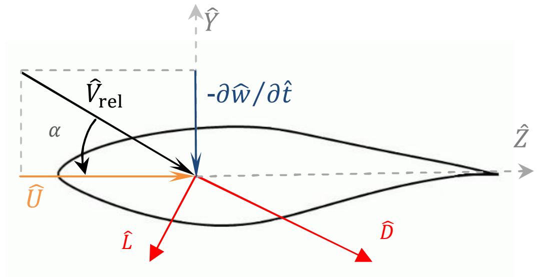
2-4- محاسبه نیروهای آیرودینامیکی

در این قسمت نیروی آیرودینامیکی $f(x,t)$ که در معادله (52) ذکر شده است محاسبه خواهد گردید. شکل 1 به‌صورت شماتیک نیروهای آیرودینامیکی که در هر لحظه به سطح مقطع تیر وارد می‌شود را نمایش می دهد. در این شکل، $\hat{U}$ سرعت باد، $\partial\hat{w}/\partial\hat{t}$ سرعت خیز تیر در راستای عمودی، $\hat{V}_{\mathrm{rel}}$ سرعت نسبی باد برآیند، α زاویه حمله و $\hat{L}$ و $\hat{D}$ به‌ترتیب نیروهای برآ و پسا وارده بر واحد طول ایرفویل هستند[12].

سرعت باد نسبت به سطح مقطع تیر به کمک جمع برداری $\hat{U}$ و $\partial\hat{w}/\partial\hat{t}$ محاسبه خواهد شد. بنابراین زاویه حمله α و سرعت نسبی $\hat{V}_{\mathrm{rel}}$ مطابق رابطه (53) و (54) است.

$$\hat{V}_{\mathrm{rel}} = \sqrt{\hat{U}^2 + (\partial\hat{w}/\partial\hat{t})^2} \tag{53}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-\partial\hat{w}/\partial\hat{t}}{\hat{U}}\right) \tag{54}$$



شکل 1 نمای شماتیک از سطح مقطع تیر

نیروهای برآ و پسا طبق روابط (55) و (56) قابل محاسبه هستند [14،13].

$$\hat{L}(\hat{x},\hat{t}) = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{air}}\hat{V}_{\mathrm{rel}}^{2}\hat{c}(\hat{x})C_L(\hat{x}) \quad (55)$$

$$\hat{D}(\hat{x},\hat{t}) = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{air}}\hat{V}_{\mathrm{rel}}^{2}\hat{c}(\hat{x})C_D(\hat{x}) \quad (56)$$

در معادله (55) و (56)، ρ_{air} جرم حجمی هوا، $\hat{c}(\hat{x})$ نشان‌دهنده وتر[1] ایرفویل و $C_L(\hat{x})$ و $C_D(\hat{x})$ به‌ترتیب ضرایب برآ و پسا مربوط به ایرفویلِ مقطع تیر هستند. به دلیل آن‌که تیر تحت مطالعه یک تیر با مقطع متغیر است، $\hat{c}(\hat{x})$ تابعی از طول تیر یا $\hat{x}$ خواهد بود.

نیروی $\hat{f}(\hat{x},\hat{t})$ در معادله (4)، نیروی آیرودینامیکی وارده بر ایرفویل است که در جهت Y نشان داده شده در شکل 1 به ایرفویل وارد می‌شود. از محاسبات هندسی می‌توان این نیرو را به فرم رابطه (57) محاسبه نمود:

$$\hat{f}(\hat{x},\hat{t}) = \hat{L}(\hat{x},\hat{t})\cos(\alpha) + \hat{D}(\hat{x},\hat{t})\sin(\alpha) \quad (57)$$

با استفاده از معادلات (55)، (56) و (57)، نیروی آیرودینامیکی برابر رابطه (58) خواهد بود:

$$\hat{f}(\hat{x},\hat{t}) = \frac{1}{2}\rho_{air}\hat{V}_{rel}^{2}\hat{c}(\hat{x}) \times \left(C_L(\hat{x})\cos(\alpha) + C_D(\hat{x})\sin(\alpha)\right) \quad (58)$$

با در نظر گرفتن معادله (53) و اعمال برخی تبدیلات ریاضی، عبارت‌های $\sin(\alpha)$ و $\cos(\alpha)$ به فرم روابط (59) و (60) قابل بیان هستند:

$$\sin(\alpha) = \frac{\partial\hat{w}/\partial\hat{t}}{\sqrt{\hat{U}^2 + \left(\partial\hat{w}/\partial\hat{t}\right)^2}} \quad (59)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{\hat{U}^2 + (\partial\hat{w}/\partial\hat{t})^2}} \quad (60)$$

معادله (59) و (60) را می‌توان در معادله (58) جای‌گذاری نمود. به این ترتیب نیروی آیرودینامیکی به فرم رابطه (61) خواهد بود.

$$\hat{f}(\hat{x},\hat{t}) = \frac{1}{2}\rho_{air}\hat{c}(\hat{x})\sqrt{\hat{U}^2 + \left(\partial\hat{w}/\partial\hat{t}\right)^2} \times \left(\hat{U}C_L(\hat{x}) + \left(\partial\hat{w}/\partial\hat{t}\right)C_D(\hat{x})\right) \quad (61)$$

معادلات (62) و (63) سرعت باد و طول وتر بدون بعد را نشان می‌دهد.

$$U = \left(\frac{T}{l}\right)\hat{U} \quad (62)$$

$$c = \frac{\hat{c}}{l} \quad (63)$$

با استفاده از این پارامترهای بدون بعد به همراه پارامترهای بدون بعد معرفی شده در معادلات (9) تا (11)، نیروی $\hat{f}(\hat{x},\hat{t})$ برحسب پارامترهای بدون بعد به فرم رابطه (64) قابل بیان خواهد بود.

$$\hat{f}(\hat{x},\hat{t}) = -\frac{1}{2}\frac{l^3}{T^2}\rho_{\mathrm{air}}c(x)\sqrt{U^2 + (\partial w/\partial t)^2} \times \left(UC_L(x) + (\partial w/\partial t)C_D(x)\right) \quad (64)$$

با جایگذاری معادله (64) در معادله (21) نیروی آیرودینامیکی بدون بعد وارده بر واحد طول تیر، مطابق رابطه (65) محاسبه می‌شود.

$$f(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2\rho_{\mathrm{air}}}{\hat{m}(0)}\right)c(x) \times \left(UC_L(x) + (\partial w/\partial t)C_D(x)\right)\sqrt{U^2 + (\partial w/\partial t)^2} \quad (65)$$

با فرض ترکیب شکل مودها برای محاسبه پاسخ دینامیکی تیر که در معادله (47) بیان شد، نیروی $f(x,t)$ برحسب $q_i(t)$، $1 \le i \le N$ طبق رابطه (66) خواهد بود.

$$f(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2\rho_{\mathrm{air}}}{\hat{m}(0)}\right)c(x) \times \left(UC_L(x) + \left(\sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)\frac{dq_i(t)}{dt}\right)C_D(x)\right) \times \sqrt{U^2 + \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\phi_i(x)\frac{dq_i(t)}{dt}\right)\right)^2} \quad (66)$$

دو مدل آیرودینامیکی برای شبیه‌سازی نیروهای وارده بر سازه وجود دارد که عبارتند از مدل دینامیک سیالات محاسباتی[2] و روش شبکه‌بندی. در مقایسه با روش CFD، روش شبکه‌بندی توانایی مدل‌سازی نیروها را در حد قابل قبول و با هزینه محاسبات کمتر داراست. روش شبکه‌بندی، تئوری جریان پتانسیل را برای مدل‌سازی و مطالعه رفتار سیال در سرعت بادهای پایین به کار می‌برد. در این مقاله نیروهای آیرودینامیکی به کمک معادله (66) محاسبه و ضرایب برآ و پسا نیز به کمک نرم افزار کد بازِ XFOIL در هر مرحله زمانی تعیین می‌گردند. این نرم‌افزار بر پایه تئوری‌های جریان پتانسیل در خارج از لایه مرزی و جریان لزج درون لایه مرزی، ضرایب برآ و پسا را محاسبه می‌نماید. فرآیند محاسبه این ضرایب بدین صورت است: از آن‌جا که ضرایب برآ و پسا تابع زاویه حمله (یعنی α) و سرعت باد (یعنی $\hat{V}_{\mathrm{rel}}$) هستند، این دو پارامتر ابتدا محاسبه و سپس به عنوان ورودی به نرم‌افزار XFOIL وارد می‌شوند. در ادامه نرم‌افزار ضرایب برآ و پسا را برای ایرفویل موردنظر محاسبه کرده و نتایج آن را به عنوان خروجی به کد اصلی حل پاسخ دینامیکی تیر باز می‌گرداند. کد اصلی نیز با استفاده از رابطه (66)، نیروی آیرودینامیکی $f(x,t)$ را محاسبه می‌نماید.

2-5- بیان فضای حالت معادلات دینامیکی حرکت تیر

با جای‌گذاری معادله (66) در معادله (52) فرم نهایی معادله دیفرانسیل برای محاسبه $q_i(t)$، $1 \le i \le N$ حاصل خواهد شد. نتیجه در رابطه (67) نمایش داده شده است

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{1}{2}\frac{l^2\rho_{\mathrm{air}}}{\hat{m}(0)\int_0^1 m(x)\phi_i^2(x)dx} \times \int_0^1\left\{\phi_j(x)c(x)\left[UC_L(x) + \left(\sum_{j=1}^{N}\phi_j(x)\dot{q}_j(t)\right)C_D(x)\right] \times \sqrt{U^2 + \left(\sum_{j=1}^{N}\phi_j(x)\,\dot{q}_j(t)\right)^2}\right\}dx \quad 1 \le i \le N \quad (67)$$

برای حل این معادله در فضای حالت نیاز به تعریف $2N$ متغیر حالت است که

1- Chord

2- CFD

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.3.35.5]

عبارتند از $y_k(t)$، $1 \le k \le 2N$ و در رابطه (68) تعریف می‌شوند.

$$y_k(t) = \begin{cases} q_k(t) & 1 \le k \le N \\ \dfrac{dq_{k-N}(t)}{dt}(t) & (N+1) \le k \le 2N \end{cases} \tag{68}$$

به کمک متغیرهای حالت تعریف شده در معادله (68) بیان فضای حالت معادله حرکت تیر طبق روابط (69) و (70) خواهد بود.

$$\dot{y}_k(t) = y_{N+k}(t) \qquad 1 \le k \le N \tag{69}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_k(t) &= -2\xi_i\omega_i y_k(t) - \omega_i^2 y_{k-N}(t) + \\ &\frac{0.5 l^2 \rho_{\mathrm{air}}}{\widehat{m}(0)\int_0^1 m(x)\phi_i^2(x)dx} \times \int_0^1 \Bigg\{ f_i(x)c(x) \times \\ &\left[UC_L(x) + \left(\sum_{j=1}^{N} f_j(x) y_{j+N}(t) \right) C_D(x) \right] \times \\ &\sqrt{U^2 + \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x)\, y_{j+N}(t) \right)^2} \Bigg\} dx \\ &N+1 \le k \le 2N \end{aligned} \tag{70}$$

معادلات حالت معرفی شده در معادله (69) و (70) را می‌توان به کمک دستور *ode45* نرم افزار MATLAB حل نمود. این دستور حل براساس ترکیب روش حل صریح رانج-کوتا[1] [5,4] و الگوریتم دُرمند-پرینس[2] اقدام به حل معادلات دیفرانسیلی می‌نماید، با داشتن $y_k(t)$ ، $1 \le k \le 2N$ از حل معادلات فضای حالت پاسخ دینامیکی تیر $w(x,t)$ از رابطه (71) قابل محاسبه خواهد بود.

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x) q_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x) y_i(t) \tag{71}$$

به ویژه برای محاسبه پاسخ نوک تیر از رابطه (72) استفاده خواهد شد:

$$w_t(t) = w(1,t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(1) y_i(t) \tag{72}$$

3- نتایج و بحث در نتایج

در شکل 2 سه شکل مود اول به‌دست آمده برای تیر یکنواخت با مشخصات واحد ($EI(x) = 1$ و $m(x) = 1$) به کمک روش عددی ارائه شده، رسم شده است و با شکل مودهای حاصل از حل دقیق معادله ارتعاشات آزاد تیر یکنواخت یکسرگیردار مقایسه شده است.

مشخص است که نتایج حل دقیق و حل عددی همخوانی بالایی با یکدیگر دارند. در جدول 1 فرکانس‌های طبیعی بدون بعد متناظر با سه شکل مود اول تیر در دو حالت حل دقیق و حل عددی با یکدیگر مقایسه شده‌اند. مشهود است که درصد خطای نهایی بین مقادیر دقیق و عددی بسیار کم است. لذا روش حل ارائه شده کاملا قابل اعتماد خواهد بود.

1- Runge-Kutta (4,5)
2- Dormand-Prince

شکل 2 قابلیت اطمینان این الگوریتم در محاسبه شکل مودهای تیر نشان می‌دهد. لذا در ادامه از این الگوریتم برای پیدا کردن شکل مودهای تیر با خواص هندسی و فیزیکی متغیر استفاده خواهد شد. فرض بر این است که تیر مورد نظر دارای سطح مقطع به شکل ایرفویلِ S809 باشد. این ایرفویل به طور عمده در طراحی پره‌های توربین باد مورد استفاده قرار می‌گیرد. پارامترهای نرمال تیر مقطع متغیر مورد مطالعه در جدول 2 معرفی شده‌اند.

تغییرات $EI(x)$ و $m(x)$ برحسب طول تیر نیز در شکل 3 نمایش داده شده است. در این شکل همچنین تغییرات وتر ایرفویل (یعنی $c(x)$) در طول تیر بر روی محور عمودی در سمت راست شکل قابل مشاهده است.

سه شکل مود اول تیر مقطع متغیر در شکل 4 رسم شده است. همچنین سه فرکانس طبیعی بدون بعد این تیر در جدول 3 لیست گردیده است. در ادامه این شکل مودها در قالب معادلات (69)، (70) و (71) به منظور پیدا کردن پاسخ دینامیکی تیر تحت تحریک باد به کار گرفته شده اند. به منظور کاهش حداکثری زمان و هزینه محاسبات در معادله (71)، هر کدام از شکل مودها با یک چند جمله ای درجه 8 تقریب زده شده‌اند.

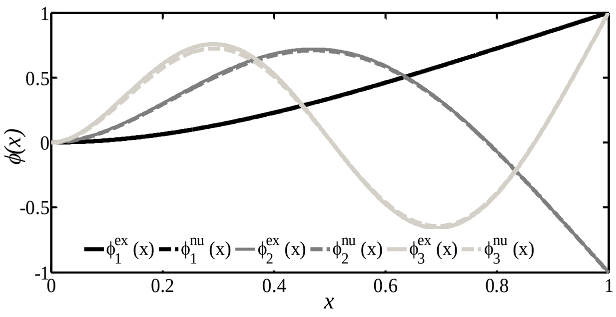
شکل 5 پاسخ دینامیکی نوک تیر یعنی $w_t(t)$ را تحت اثر باد با سرعت $\widehat{U} = 50 m/s$ نشان می‌دهد. نتایج به ازای در نظر گرفتن یک، دو و سه شکل

جدول 1 فرکانس‌های طبیعی بدون بعد حاصل از حل عددی و حل دقیق

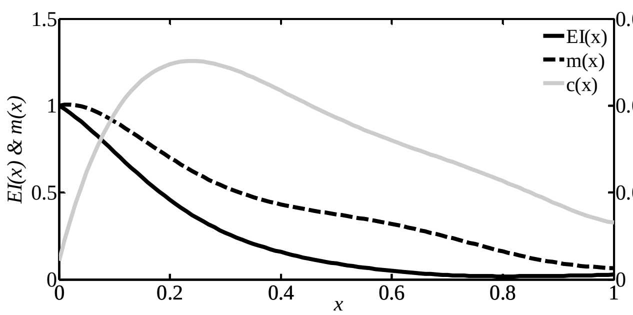
شماره مود	حل دقیق	حل عددی	درصد خطا
1	3/5160	3/5161	0/002
2	22/0346	22/03357	0/005
3	61/6963	61/7074	0/018

جدول 2 خواص هندسی و فیزیکی تیر با مقطع متغیر

پارامتر	T (s)	$\widehat{m}(0)$ (kg/m)	$\widehat{EI}(0)$ (N.m²)	l (m)
مقدار	1/0534	64/60	19320000	24



شکل 2 شکل مودهای تیر یکنواخت، مقایسه نتایج حل عددی و حل دقیق



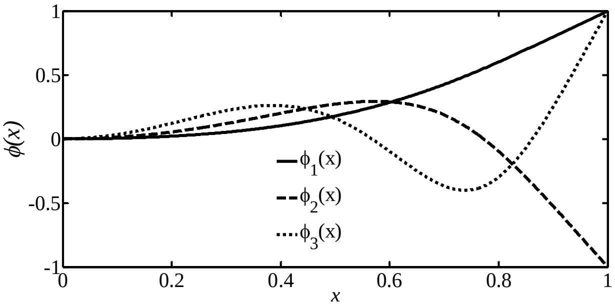
شکل 3 تغییرات $EI(x)$، $m(x)$ و $c(x)$ تیر تحت بررسی

مود موثر در پاسخ دینامیکی تیر با یکدیگر مقایسه شده است. به‌طور واضح، شکل 5 نشان می‌دهد که حتی در نظر گرفتن یک شکل مود هم در تخمین پاسخ دینامیکی تیر، نتیجه قابل قبولی خواهد داشت. لذا افزایش تعداد شکل مودهای موثر در پاسخ دینامیکی تیر تنها منجر به افزایش زمان و هزینه محاسبات خواهد شد و تاثیر قابل توجهی بر پاسخ دینامیکی تخمینی نخواهد داشت. لذا از این جا به بعد تخمین پاسخ دینامیکی تیر تنها با احتساب یک شکل مود انجام خواهد شد.

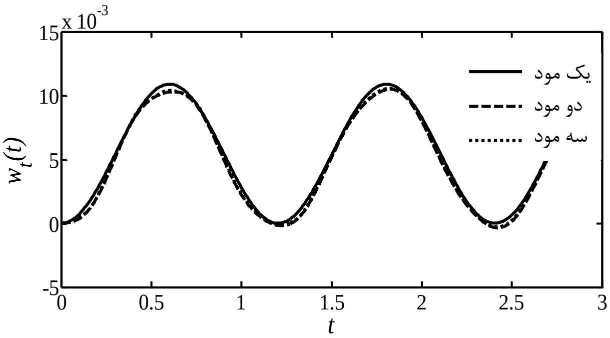
شکل 6 پاسخ دینامیکی نوک تیر را به ازای سرعت باد $\hat{U} = 10m/s$ نشان می دهد. نتیجه مشخص می‌کند که زمانی که میرایی از حد بحرانی بالاتر باشد، تیر با گذشت زمان در یک حالت خیز ثابت و بدون ارتعاش قرار می‌گیرد.

جدول 3 فرکانس های طبیعی بدون بعد تیر معرفی شده در جدول 2 و شکل 3

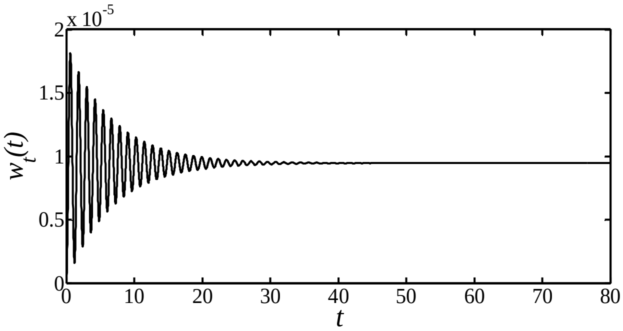
شماره مود	فرکانس طبیعی بدون بعد
1	3/1356
2	15/8016
3	36/4652



شکل 4 شکل مود های تیر با مقطع متغیر معرفی شده در جدول 2 و شکل 3



شکل 5 تاثیر افزایش تعداد شکل مودها در تخمین پاسخ دینامیکی



شکل 6 جابجایی نوک تیر با سطح مقطع غیر یکنواخت در حالتی که میرایی مودال سیستم از مقدار بحرانی بیشتر است (ξ =0/03 , $\hat{U}$=10 m/s)

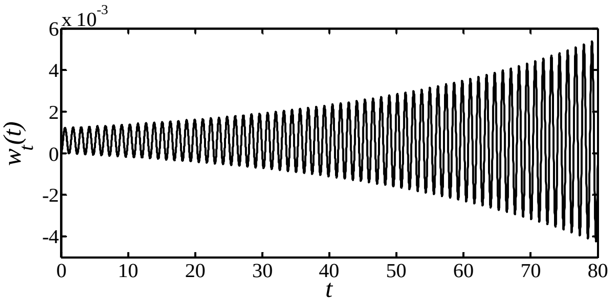
شکل 7 پاسخ دینامیکی نوک تیر را در سرعت باد $\hat{U} = 80m/s$ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که هرگاه میرایی سیستم از حد بحرانی کمتر باشد، دامنه ارتعاشات تیر واگرا خواهد شد که به وضوح نشان از ناپایداری سیستم دارد.

به منظور درک راحت‌تر تاثیر میرایی مودال بر روی پاسخ دینامیکی و وضعیت پایداری تیر، در شکل 8 جابجایی نوک تیر $w_t(t)$ به ازای سه مقدار مختلف میرایی ξ_1 رسم شده است. مشاهده می‌گردد که در هر سرعت بادی، اگر میرایی کمتر از مقدار میرایی بحرانی باشد، پاسخ دینامیکی تیر در طول زمان رشد خواهد نمود که نشان دهنده ناپایداری سیستم است. اگر میرایی بیشتر از حد میرایی بحرانی باشد، تیر با گذشت زمان به سمت یک خیز ثابت میل خواهد کرد و دیگر نوسان نخواهد داشت، اما اگر میرایی تیر با میرایی بحرانی برابر باشد تیر با گذشت زمان با دامنه ثابت نوسان خواهد نمود. به عبارت دیگر به ازای هر مقدار میرایی، یک سرعت باد بحرانی وجود خواهد داشت که به ازای مقادیر سرعت باد بالاتر از آن سیستم وارد ناحیه ناپایداری می‌شود.

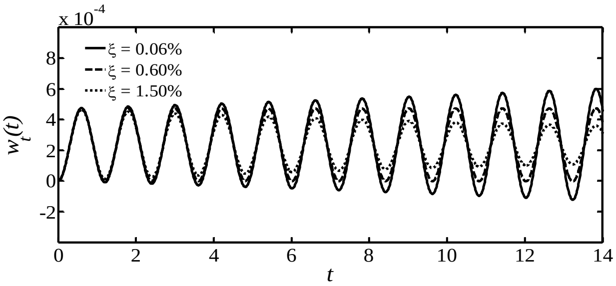
در شکل 9 نوسانات پره در یک میرایی خاص و به ازای سه سرعت باد مختلف رسم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت باد علاوه بر آنکه مقدار پاسخ استاتیکی پره افزایش پیدا می‌کند، دامنه نوسانات نیز ممکن است سه حالت مختلف داشته باشد. این سه حالت عبارتند از (1) ارتعاش گذرا و در نهایت همگرایی حول یک خیز استاتیکی (2) ارتعاش با دامنه ثابت حول خیز استاتیکی سیستم و (3) ارتعاش واگرا با دامنه‌ای که با گذشت زمان افزایش می‌یابد.

در شکل 10 برای تیر یکسرگیردار مقطع متغیر با مشخصات ارئه شده در جدول 2 و شکل 3 سرعت باد بحرانی به ازای میرایی مودال متناظر با مود اول (ξ) رسم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار میرایی، سرعت باد بحرانی نیز افزایش خواهد یافت. به عبارت دیگر، با افزایش میرایی، سیستم در محدوده سرعت‌های بالاتری از باد، پایداری خواهد داشت.

همان‌گونه که قبلا نیز اشاره شده بود، نتایج بدست حاکی از این است که

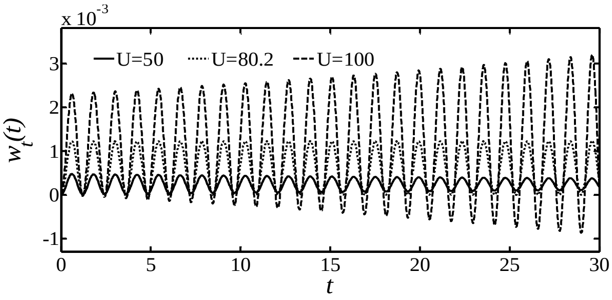


شکل 7 جابجایی نوک تیر با سطح مقطع غیریکنواخت در حالتی که میرایی مودال سیستم از مقدار بحرانی کمتراست (ξ =0/005 , $\hat{U}$=80 m/s)

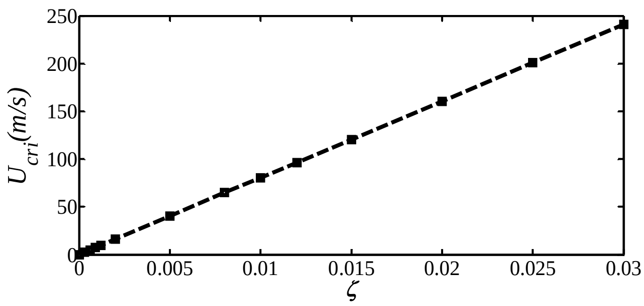


شکل 8 تاثیر میرایی بر جابجایی نوک تیر با مقطع غیریکنواخت ($\hat{U}$=50m/s)

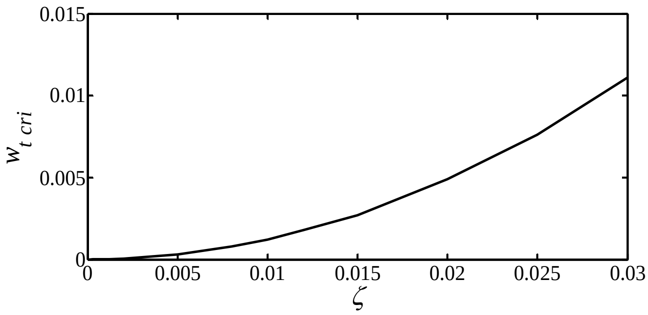
در هر میرایی بسته به آن‌که سرعت باد چه مقدار است، نوسان تیر ممکن است یکی از سه حالت همگرا، واگرا و دامنه ثابت را داشته باشد. در شکل 11 میزان دامنه بحرانی بدون بعد که با $w_{t\ cri}$ نشان داده می‌شود، برای تیر مورد نظر در میرایی‌های مختلف و سرعت باد بحرانی متناسب با هر میرایی نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت میرایی، در حالت نوسانات بحرانیِ آستانه ناپایداری، دامنه ارتعاشات نوک تیر افزایش می‌یابد.



شکل 9 دامنه حرکت نوک تیر به ازای سرعت بادهای مختلف (ξ =0/01)



شکل 10 مقادیر سرعت باد بحرانی به ازای میرایی های مودال مختلف



شکل 11 دامنه نوسان نوک تیر در میرایی و سرعت بادهای بحرانی

4- نتیجه گیری

اهمیت مدل‌سازی تیرهای تحت تحریک نیروهای آیرودینامیکی به جهت بهبود فرآیند طراحی و بهینه‌سازی آن‌ها کاملا پذیرفته شده است. با این حال حضور فاکتورهایی از قبیل ناپایداری خود برنگیخته و نیروهای آیرودینامیک با خواص غیرخطی ذاتی، تحلیل این تیرها را با پیچیدگی همراه ساخته است. هدف از این پژوهش، ارائه رویکردی برای بررسی دینامیکی یک تیر با مقطع متغیر تحت تاثیر وزش باد بود. نوآوری‌های مقاله را می‌توان به‌صورت خلاصه بدین صورت ذکر نمود: (1) یافتن الگوریتمی جدید برای یافتن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیرهای با مقطع متغیر و صحه‌گذاری بر این الگوریتم (2) ارائه و حلِ یک فرمولاسیون جدید برای بررسی دینامیک یک تیر تحت وزش باد که در آن ضرایب برآ و پسای آیرودینامیکی به صورت برخط و با در نظر گرفتن زاویه حمله، سرعت باد و از همه مهم‌تر، سرعت حرکت پره، محاسبه می‌گردند. نتایج ارائه شده حاکی از آن بود که سرعت ناپایداری در تیرهای با میرایی نسبتا بالا بیشتر از سرعت ناپایداری در تیرهای با میرایی پایین است. همچنین تاثیر میرایی تیر بر دامنه نوسان هارمونیک تیر در آستانه ناپایداری سیستم، به‌صورت کمی و کیفی بررسی شد و مورد بحث قرار گرفت. رویکرد ارائه شده در این پژوهش، در مطالعه پاسخ دینامیکی و بررسی پایداری تیرهای با سطح مقطع و خواص هندسی متغیر که در توربین‌های بادی کاربرد پیدا می‌کنند، قابل استفاده و استناد خواهد بود.

قدردانی

کار تحقیقاتی انجام شده در این مقاله با حمایت‌های پژوهشکده هواخورشیدِ دانشگاه فردوسی مشهد که مجری طراحی و ساخت توربین بادی در ایران می‌باشد، صورت گرفته است.

5- مراجع

[1] E. H. Dowell and K. C. Hall, Modeling of fluid-structure interaction, *Annual Review of Fluid Mechanics,* vol. 33, pp. 445-490, 2001.
[2] M. Goland, The flutter of a uniform cantilever wing, *Journal of Applied Mechanics*vol. 12(4), pp. A-197 - A-208 ,1945.
[3] K. Eskandary, M. Dardel, M. H. Pashaei, and A. K. Moosavi, Nonlinear aeroelastic analysis of high-aspect-ratio wings in low subsonic flow, *Acta Astronautica,* vol. 70, pp. 6-22, 2012.
[4] M. Yu and C. Hwu, Aeroelastic divergence and free vibration of tapered composite wings, *ICCM16,* 2007.
[5] D. Tang, J. K. Henry, and E. H. Dowell, Limit Cycle Oscillations of Delta Wing Models in Low Subsonic Flow, *AIAA Journal,* vol. 37, pp. 1355-1362, 1999/11/01 1999.
[6] D. M. Tang and E. H. Dowell, Effects of geometric structural nonlinearity on flutter and limit cycle oscillations of high-aspect-ratio wings, *Journal of Fluids and Structures,* vol. 19, pp. 291-306, 2004.
[7] M. J. Patil, D. H. Hodges, and C. E. S. Cesnik, Nonlinear aeroelastic analysis of complete aircraft in subsonic flow, *Journal of Aircraft,* vol. 37, pp. 753-760, 2000.
[8] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*. Hoboken, NJ.: Wiley, 2007.
[9] H. Moeenfard and S. Awtar, Modeling Geometric Nonlinearities in the Free Vibration of a Planar Beam Flexure With a Tip Mass, *Journal of Mechanical Design,* vol. 136, pp. 044502-044502, 2014.
[10] M. Drela, XFOIL: an analysis and design system for low Reynolds number airfoils, in *Conference on low Reynolds number airfoil aerodynamics* ,University of Notre Dame, 1989.
[11] E. Hoogedoorn, G. B. Jacobs, and A. Beyene, Aero-elastic behavior of a flexible blade for wind turbine application: A 2D computational study, *Energy,* vol. 35, pp. 778-785, 2010.
[12] S. Irani, S. Sazesh, M. ShayanMehr, Jump Phenomenon and Flutter Analysis of Nonlinear Airfoil with Stochastic Approach, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 15, pp. 116-125, 2012. (In Persian)
[13] J. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics (Mcgraw-Hill Series in Aeronautical and Aerospace Engineering)*: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2005
[14] B. Ghadiri, M. Razi, S. Hamidi, Dynamic Instability Analysis of a Swept Wing in Time Domain, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 9, No. 37, pp. 93-106, 2009. (In Persian)