ISSN: 2476-6909; Modares Mechanical Engineering. 2024;24(05):269-280.

Tarbiat Modares University

Stabilization of the Flow Over Cylinder with Time-Varying Disturbance by a Model Reduction Method Using Optimally Time-dependent Modes

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Authors
Dehghan Manshadi M.[1],
Esfahanian V.[1*]

How to cite this article
Dehghan Manshadi M., Esfahanian V, Stabilization of the Flow Over Cylinder with Time-Varying Disturbance by a Model Reduction Method Using Optimally Time-dependent Modes. Modares Mechanical Engineering; *2024;24(05):269-280.*

[1] School of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

****Correspondence***
Address: School of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

evahid@ut.ac.ir

Article History
Received: April 8, 2024
Accepted: July 27, 2024
ePublished: August 19, 2024

ABSTRACT

The main approach in the study of fluid flow instabilities is the theory of linear stability, which is based on linearizing the governing equations and finding unstable eigenvalues. In many flows, like shear flows, the results of linear stability theory fail to match most experiments. In a linear system, even if all the eigenvalues are stable, the perturbations can lead to instability, if the eigenfunctions are not orthogonal. The transient features of these non-normal dynamical systems, can be described with low-dimensional structures, i.e. a few modes. It is possible to suppress the asymptotic and transient growth by identification of time-dependent modes. In this paper, a method of order reduction based on optimally time-dependent modes has been implemented. This method identifies the growth behavior of disturbances in short and long times. Also, a control algorithm based on the above method has been implemented to stabilize the growth of disturbances. The DNS solution of the flow and the implementation of the reduction and control algorithms is based on the NEKTAR++ open-source solver. At first problem, to validate the solution method, the order reduction and control algorithm has been implemented on the flow over a cylinder with Re=50. At second problem, for the first time, the control algorithm is implemented on the flow over a cylinder subjected to persistent time-varying disturbances. The results show that by applying a control force, the Von-Karman vortices are stabilized and a constant lift is obtained and body vibrations are cancelled.

Keywords Instability, Order Reduction, Flow Control, Optimally Time-Dependent Modes

CITATION LINKS

1- From bypass transition to ... 2- The Viscous Initial Value ... 3- Model reduction for flow ... 4- Data-driven science and ... 5- Spectra and pseudospectra. 6- Nonmodal stability theory. 7- A minimization principle for ... 8- Control of linear instabilities ... 9- Stabilization of unsteady flows ... 10- Transient linear stability of ... 11- Nonlinear oscillations, dynamical systems ... 12- Accurate solution of the ... 13- Secondary instability of wall-bounded ... 14- Multivariable feedback control ... 15- Model reduction for fluids ... 16- Dynamic mode decomposition ... 17- Dynamic mode decomposition of ... 18- Spectral analysis of nonlinear ... 19- Modal analysis of fluid flows ... 20- Principal component analysis in ... 21- Stochastic tools in turbulence. 22- Modal analysis of fluid flows: Applications ... 23- Separation control on NACA 0012 ... 24- Effects of wall-normal and ... 25- Computational fluid dynamics ... 26- Global instabilities in spatially ... 27- Nektar++: An open-source ... 28- Nektar++: Enhancing the capability ... 29- A numerical and theoretical study ... 30- Structural sensitivity of the first ... 31- Strouhal–Reynolds number relationship ... 32- Large-eddy simulation of flow ...

[DOI: 10.48311/MME.24.5.269]

پایدارسازی جریان روی استوانه تحت اغتشاش متغیر با زمان توسط روش کاهش‌مرتبه با مودهای بهینه وابسته به زمان

مصطفی دهقان منشادی[1] ، وحید اصفهانیان[2]*
[1] دانشکده مهندسی مکانیک، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

چکیده

رویکرد اصلی در بررسی ناپایداری‌های جریان سیال، تئوری پایداری خطی است که مبتنی بر خطی‌سازی معادلات حاکم و یافتن مقادیر ویژه ناپایدار است. در بسیاری از مسائل، مانند جریان‌های برشی، نتایج تئوری پایداری خطی با مشاهدات تجربی تطابق ندارد. در یک سیستم دینامیکی خطی حتی اگر تمام مقادیر ویژه پایدار باشند، اغتشاشات وارد بر سیستم می‌توانند منجر به ناپایداری شوند، به‌شرط‌آن‌که توابع‌ویژه، متعامد نباشند. ویژگی گذرای این سیستم‌های دینامیکی غیرنرمال علی‌رغم پیچیدگی، با ساختارهایی کم‌بعد یعنی تعداد کمی‌مود، قابل توصیف هستند. کنترل رشد دائمی و گذرای اغتشاشات از طریق شناسایی مودهای وابسته به زمان امکان‌پذیر است. در مقاله‌ی حاضر، یک روش کاهش مرتبه مبتنی بر مودهای بهینه وابسته به زمان پیاده‌سازی شده است. این روش، رفتار رشد اغتشاشات در زمان‌های کوتاه و طولانی را شناسایی می‌نماید. همچنین یک الگوریتم کنترلی بر اساس روش کاهش مرتبه فوق، به‌منظور کنترل رشد اغتشاشات جریان سیال، پیاده‌سازی شده است. حل DNS جریان و پیاده‌سازی الگوریتم‌های کاهش‌مرتبه و کنترلی بر پایه‌ی حلگر متن‌باز NEKTAR++ انجام شده است. در مسأله‌ی اول به‌منظور اعتبارسنجی روش حل، الگوریتم کاهش مرتبه و کنترلی روی جریان عبوری از استوانه با Re = ۵۰ پیاده‌سازی شده است. در ادامه، برای نخستین بار الگوریتم کنترلی برای جریان روی استوانه در معرض اغتشاشات ماندگار متغیر با زمان پیاده‌سازی و به‌ازای پارامترهای مختلف اغتشاش خارجی حساسیت‌سنجی شده‌است. نتایج نشان می‌دهد با اعمال نیروی کنترلی بر میدان جریان، ناپایداری‌های ون کارمن، پایدار شده و جریان با ضریب برآی ثابت شکل می‌گیرد و ارتعاشات جسم حذف می‌شود.

کلیدواژه‌ها: ناپایداری، کاهش مرتبه، کنترل جریان، مودهای بهینه‌ی وابسته به زمان

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۱/۲۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۰۶
*نویسنده مسئول: evahid@ut.ac.ir

۱- مقدمه

تئوری پایداری هیدرودینامیکی به پاسخ جریان سیال در مواجهه با یک اغتشاش کوچک یا متوسط می‌پردازد. در صورتی که جریان به حالت تعادلی خود بازگردد، جریان به صورت پایدار تعریف می‌شود و اگر اغتشاش رشد نماید، جریان به صورت ناپایدار تعریف می‌شود. تئوری پایداری به بررسی تغییرات انرژی اغتشاشات موجود در یک جریان پایه (Base flow) از طریق روابط ریاضی می‌پردازد. این تئوری بر روی بررسی طیف مقادیر ویژه در یک سیستم دینامیکی تمرکز دارد [1]. در این تئوری، یک معادله خطی از تغییرات زمانی و مکانی اغتشاش مورد نیاز است. درصورتی که سرعت اغتشاش از محدوده چند درصدی از سرعت جریان پایه فراتر برود، اثرات غیرخطی اهمیت می‌یابند و معادله خطی، تغییرات زمانی و مکانی اغتشاش را به درستی پیش‌بینی نمی‌کند؛ با این وجود، معادلات خطی نقش مهمی در بررسی مکانیزم رشد اغتشاشات در دینامیک سیالات دارند [2].

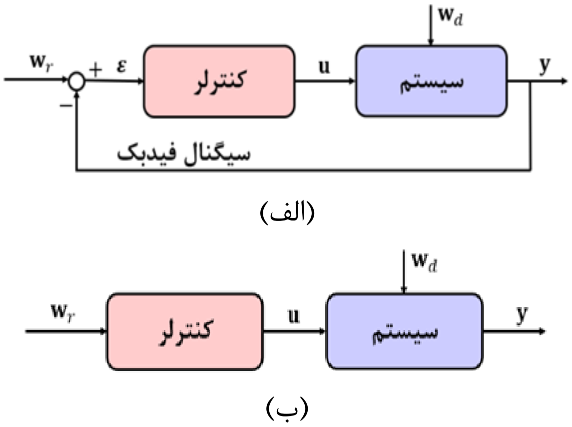
۱-۱- کنترل جریان سیال با استفاده از مدل کاهش‌یافته

یک سیستم دینامیکی خطی دارای کنترل، به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت سیستم دینامیکی است. $\boldsymbol{u}(t)$ ورودی کنترلی و $\boldsymbol{y}(t)$ خروجی سیستم است. هدف از بدست آوردن یک مدل کاهش‌یافته، جایگزینی مدل اصلی با یک مدل خطی است که وابستگی $\boldsymbol{y}(t)$ به $\boldsymbol{u}(t)$ را با دقت خوبی حفظ کند؛ ضمن اینکه بردار حالت سیستم جدید دارای مرتبه‌ی پایین‌تری از $\boldsymbol{x}(t)$ است [3].

روش کنترل حلقه‌بسته فیدبک‌دار، یک روش کنترلی برای سیستم‌های دارای ناپایداری، عدم قطعیت و در معرض اغتشاشات خارجی است [4]. شکل ۱-الف دیاگرام یک سیستم کنترلی حلقه‌بسته را نمایش می‌دهد. در این سیستم، $\boldsymbol{y}(t)$ که خروجی اندازه‌گیری سنسورها است، به کنترلر فیدبک داده می‌شود و طبق الگوریتم کنترلی، سیستم کنترلی توسط سیگنال $\boldsymbol{u}(t)$ تحریک می‌شود. بردار ورودی‌های خارجی به صورت $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{w}_d \quad \boldsymbol{w}_r]$ تجزیه می‌شود که $\boldsymbol{w}_d$ اغتشاشات خارجی بر وضعیت سیستم و $\boldsymbol{w}_r$ مسیر مرجعی است که می‌بایست توسط سیستم کنترلی دنبال شود.



شکل ۱) مقایسه سیستم کنترلی حلقه‌بسته و حلقه‌باز (الف) دیاگرام سیستم حلقه‌بسته (ب) دیاگرام سیستم حلقه‌باز

هدف از یک سیستم کنترلی ایجاد یک قانون کنترلی به صورت $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}_r)$ است که وضعیت سیستم را به سمت وضعیت هدف $\boldsymbol{w}_r$ نزدیک سازد. در مسائلی که یک مسیر مشخص $\boldsymbol{w}_r$ دنبال می‌شود، هدف کمینه کردن خطای خروجی سیستم $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{w}_r$ است. همانطور که در شکل ۱-ب مشخص است، در یک سیستم کنترلی حلقه‌باز، به‌علت عدم وجود فیدبک و وجود استراتژی از پیش‌تعیین‌شده با توجه به مسیر مرجع $\boldsymbol{w}_r$، امکان تصحیح استراتژی کنترلی تحت اعمال اغتشاشات خارجی مختلف و متغیر وجود ندارد؛ به عبارت دیگر، در سیستم کنترلی حلقه‌باز، به طور بنیادی امکان تغییر دینامیک وابسته به اغتشاشات وجود ندارد. اما در یک سیستم کنترلی حلقه‌بسته با توجه به وجود فیدبک از خروجی سیستم، پاسخ واقعی سیستم در مواجهه با مجموعه‌ی ورودی‌ها و اغتشاشات به کنترل داده می‌شود و امکان اصلاح و پایدارسازی دینامیک سیستم و جبران اغتشاشات وجود خواهد داشت.

۱-۲- رشد غیرنرمال یا گذرای اغتشاش (Non-normal or transient growth)

ماتریس دارای بردارهای ویژه‌ی غیرمتعامد را ماتریس غیرنرمال می‌نامند. چنین تعریفی برای یک اپراتور غیرنرمال نیز برقرار است (یعنی اپراتوری که توابع‌ویژه‌ی آن بر هم متعامد نیستند). یکی از ویژگی‌های مهم یک اپراتور غیرنرمال، حساسیت بالای طیف مقادیر ویژه‌ی آن اپراتور نسبت به اغتشاشات کوچک و تغییر رفتار پایداری آن‌ها است [2]. اپراتور اورسامرفیلد (Orr-Sommerfeld) ، یک اپراتور غیرنرمال است و طیف مقادیر ویژه‌ی آن، حساسیت بالایی نسبت به اغتشاشات نشان می‌دهد که عامل آن وجود توابع‌ویژه‌ی غیرمتعامد است. لازم بذکر است که غیرنرمال بودن، یک ویژگی اپراتور و به عبارت دیگر یک سیستم دینامیکی است و مرتبط با روش حل عددی و خطای محاسبات نیست. اپراتور غیرنرمال، اپراتوری است که شرط زیر برای آن برقرار باشد:

$$LL^{+}\neq L^{+}L \qquad (۲)$$

در رابطه‌ی (۲)، $\boldsymbol{L}^{+}$ اپراتور الحاقی اپراتور $\boldsymbol{L}$ است. برخلاف رفتار رشد نمایی یا ماندگار یک اغتشاش در جریان که توسط مقادیر ویژه‌ی اپراتور تعیین می‌شود، رفتار رشد گذرا یا غیرنمایی اغتشاش در یک سیستم دینامیکی غیرنرمال توسط شبه‌مقادیر ویژه (Pseudo-eigenvalue) اپراتور تعیین می‌شود [5]. جدول ۱ اعداد رینولدز بحرانی برای چند نمونه جریان رایج را نشان می‌دهد. سیستم معادلات ناویراستوکس برای سه جریان نخست، غیرنرمال است. اپراتور حاکم بر جریان چهارم، نرمال می‌باشد. در این جدول، Re_E عدد رینولدز بحرانی است که در مقادیر کمتر از آن جریان به صورت یکنواخت پایدار است. در این حالت تمامی اغتشاشات در طول زمان به صورت یکنواخت کوچک‌تر می‌شوند و رشد غیرنرمال یا گذرا در سیستم اتفاق نمی‌افتد.

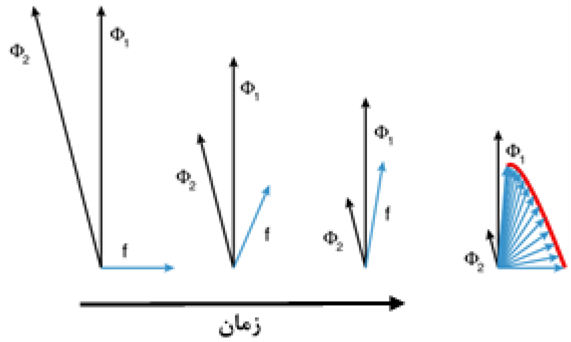
جدول ۱) اعداد رینولدز بحرانی برای چند جریان برشی [6] و [2]

نوع جریان	Re_E	Re_T	Re_L
پوازی لوله‌ای	۸۱/۵	۲۰۰۰	∞
پوازی صفحه‌ای	٤٩/٦	۱۰۰۰	٥٧٧٢
کوئت صفحه ای	۲۰/۷	٣٦٠	∞
انتقال حرارت طبیعی	۱۷۰۸	۱۷۱۰	۱۷۰۸

Re_L عدد رینولدز بحرانی است که در مقادیر بزرگ‌تر از آن، سیستم به صورت خطی ناپایدار است. در این حالت به ازای مقادیر رینولدز بیشتر از Re_L، اغتشاشاتی وجود دارند که در زمان‌های طولانی نیز پایدار نمی‌شوند و رشد می‌کنند و موجب ایجاد ناپایداری ماندگار می‌شوند. Re_T نیز عدد رینولدزی است که در آزمایشات به‌ازای مقادیر بیشتر از آن، گذر جریان و شکل‌گیری جریان آشفته مشاهده می‌شود.

همانطور که از مقادیر جدول ۱ مشخص است، در سه جریان اول، مشاهدات تجربی با پیش‌بینی تئوری پایداری خطی متفاوت است و جریان آشفته در اعداد رینولدز کمتر از مقادیر بحرانی پیش‌بینی شده شکل می‌گیرد. این رخداد به علت رشد گذرای اغتشاشات و فعال شدن ترم‌های غیرخطی و گذر جریان از آرام به آشفته است. اما در جریان انتقال حرارت جابجایی رایلی-بنارد، عدد رایلی پیش‌بینی شده از تئوری پایداری خطی، با نتایج مشاهدات تجربی مطابقت دارد. علت این تطابق، نرمال بودن معادله‌ی حاکم بر سیستم و عدم وجود رشد گذرا و غیرنمایی اغتشاشات جریان است [6]. در یک سیستم دینامیکی خطی با اپراتور غیرنرمال، حتی در صورت وجود پایداری مجانبی (یا همان پایداری نمایی یا به عبارت دیگر پایداری در زمان طولانی)، رشد گذرای اغتشاشات (یا همان رشد غیرنرمال یا غیر مودال به عبارت دیگر رشد انرژی در زمان کوتاه) می‌تواند وجود داشته باشد که در صورت کافی بودن انرژی اغتشاش می‌تواند موجب فعال شدن ترم‌های غیرخطی و گذر جریان از وضعیت آرام به وضعیت دیگری مانند جریان آشفته شود. توابع ویژه غیرمتعامد مرتبط با یک اپراتور غیرنرمال، زیرفضایی را تشکیل می‌دهند که اعضای این زیرفضا حتی در صورت برقراری پایداری مجانبی (Asymptotic stability) - یعنی مقادیر ویژه مرتبط با این توابع ویژه دارای بخش حقیقی منفی باشد - در طول زمان می‌توانند قبل از میرا شدن، دچار رشد گذرا شوند. در شکل ۲ تعبیری هندسی از رشد گذرای اغتشاش ارائه شده است. در این شکل، $\boldsymbol{\Phi}_1$ و $\boldsymbol{\Phi}_2$ دو پایه غیرمتعامد هستند که بردار $\boldsymbol{f}$ را ایجاد می‌کنند.

[DOI: 10.48311/MME.24.5.269]



شکل ۲) تعبیر هندسی رشد غیرنرمال یا گذرا

با توجه به پایدار بودن مقادیر ویژه، پایه‌های Φ_1 و Φ_2 با نرخ‌های متفاوت میرا می‌شوند (Φ_2 سریعتر از Φ_1 کوچک می‌شود). سیر تغییرات بردار $\boldsymbol{f}$ نشان می‌دهد که در ابتدا اندازه بردار $\boldsymbol{f}$ نسبت به اندازه اولیه افزایش یافته و با گذر زمان، به راستای Φ_1 متمایل شده و اندازه آن به صفر میل می‌کند.

۱-۳- مودهای بهینه وابسته به زمان (Optimally time-dependent modes)

بابایی و سپسیس در سال ۲۰۱٦ در [۷] پایه‌های متعامد، یکه و وابسته به زمانی را معرفی نمودند که مسیرهایی در فضای فاز را شناسایی می‌کند که منجر به ناپایداری می‌شوند. با اینکه این ناپایداری‌های گذرا عمر محدودی دارند، می‌توانند نقش مهمی در تغییر دینامیک سیستم از طریق فعال‌سازی ناپایداری‌های دیگر یا ایجاد انتقال انرژی غیرخطی ناگهانی در سیستم داشته باشند و منجر به ایجاد ناپایداری دائمی در سیستم شوند. آن‌ها یک چارچوب کمینه‌سازی معرفی کردند که تمرکز آن بر روی تقریب بهینه‌ی دینامیکی سیستم است. این کمینه‌سازی منتج به دستگاه معادلات دیفرانسیلی می‌شود که مسیر تغییرات وابسته به زمان پایه‌ها را تعیین می‌کند و به طور بهینه ناپایدارترین مسیرها را تخمین می‌زند. آن‌ها در این پژوهش، قابلیت‌های این روش را با اعمال بر روی سیستم‌های دینامیکی خطی و غیرخطی حاوی ناپایداری‌های گذرا نشان می‌دهند. بلانچارد و همکاران در سال ۲۰۱۹ در [8, 9] قابلیت کنترل ناپایداری‌های جریان با استفاده از مودهای بهینه وابسته به زمان (به اختصار OTD) را معرفی نمودند. آن ها با فرض کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری کامل سیستم دینامیکی جریان سیال، مدل کنترلی را برای پایدارسازی جریان سیال ارائه نمودند. کرن و همکاران در [10]، ناپایداری جریان پوآزی صفحه‌ای ضربان‌دار (Pulsating) را با استفاده از مودهای بهینه‌ی وابسته به زمان تحلیل نموده‌اند. آن‌ها بیان می‌کنند که تاکنون بر روی پایداری خطی گذرای درون سیکلی پژوهش مهمی صورت نگرفته است و ابزار محاسباتی برای این تحلیل وجود ندارد. آن‌ها در این پژوهش، پتانسیل مودهای بهینه‌ی وابسته به زمان برای استخراج اطلاعات پایداری خطی گذرا و مجانبی جریان پوآزی ضربان‌دار را بررسی نموده‌اند.

اپراتور اورسامرفیلد (اپراتور ناویراستوکس خطی‌شده)، یک اپراتور غیرنرمال است و طیف مقادیر ویژه‌ی آن، حساسیت بالایی نسبت به اغتشاشات نشان می‌دهد که عامل آن وجود توابع‌ویژه‌ی غیرمتعامد است. شناسایی و کنترل ناپایداری‌های گذرا در سیستم‌های دینامیکی مرتبه‌بالا همچنان بعنوان یک چالش محاسباتی مهم به شمار می‌رود. زیرا رشد غیرنرمال اغتشاشات توسط روش‌های کاهش مرتبه مودال مبتنی بر مقادیر ویژه قابل شناسایی و کنترل نیست [7]. روش‌های مبتنی بر مقادیر ویژه، سیستم‌ها را بر اساس رفتار مجانبی اغتشاشات (یعنی در زمان‌های طولانی) به دو دسته پایدار و ناپایدار تقسیم‌بندی کرده و از تشخیص رفتار اغتشات در زمان کوتاه شامل رشد گذرا ناتوان هستند. در این مقاله در مرحله اول، یک روش کاهش‌مرتبه مبتنی بر مودهای بهینه وابسته به زمان تشریح و پیاده‌سازی شده‌است که به صورت بهینه رفتار رشد یا میرایی اغتشاشات در زمان‌های کوتاه و طولانی و جهت‌هایی که ناپایداری‌های گذرا و دائمی رشد می‌کنند را شناسایی می‌نماید. در مرحله دوم، یک الگوریتم کنترلی بر اساس روش کاهش مرتبه فوق، به‌منظور کنترل رشد اغتشاشات جریان سیال، بر روی مسأله‌ی جدیدی که تاکنون توسط این روش حل نشده است، پیاده‌سازی می‌شود. قانون کنترلی بر روی سیستم دینامیکی مرتبه پایین حاصل از تصویر کردن دینامیک سیستم مرتبه‌بالا بر زیرفضای تولیدشده از مودهای بهینه وابسته به زمان اعمال می‌شود و هدف از به‌کارگیری این الگوریتم کنترلی، به حداقل رساندن رشد لحظه‌ای اغتشاشات در فضای کاهش‌یافته است. مفهوم ناپایداری در سیستم‌های دینامیکی همواره با بررسی طیف مقادیر ویژه اپراتورهای خطی همراه بوده است. براساس تئوری پایداری مودال، یک نقطه‌ی ثابت از معادلات حاکم بر سیستم دینامیکی (یعنی یک حالت پایا از سیستم) پایدار است اگر و فقط اگر طیف مقادیر ویژه در محدوده‌ی پایدار صفحه مختلط باشند [11]. این تئوری به طور گسترده در مکانیک سیالات به‌ویژه در موضوع بررسی پایداری جریان‌های برشی به کار گرفته شده است [13]. اما در بسیاری از جریان‌های برشی مانند جریان پوآزی و کوئت، تئوری پایداری مودال اعداد رینولدز بحرانی را بالاتر از عدد رینولدز گذر جریان در آزمایشات تجربی محاسبه می‌کند. در این نوع جریان‌ها، تحلیل غیرمودال تصویر بهتری از فیزیک گذر از جریان آرام نسبت به تئوری رایج مودال بدست می‌دهد.

مبحث کنترل اغتشاشات جریان سیال به سرعت در حال گسترش است و یکی از چالش‌های مهم در این زمینه، ابعاد بالای سیستم‌های دینامیکی است. در سیستم‌های مرتبه بالا مانند جریان سیال، بعلت هزینه‌ی محاسباتی بالا، بسیاری از روش‌های کنترلی قابل اعمال بر روی سیستم نیستند. روش‌های کاهش‌مرتبه بعلت کاهش قابل‌ملاحظه‌ی هزینه محاسباتی و امکان عملی پیاده‌سازی بر روی سیستم دینامیکی، مورد استقبال

قرار گرفته‌اند [14]. برخی روش‌های کاهش‌مرتبه مانند روش تجزیه متعامد سره (Proper orthogonal decomposition یا به اختصار POD) ، از سال‌ها پیش مورد استفاده قرار گرفته‌اند و سایر روش‌ها مانند برش متوازن (Balanced truncation یا به اختصار BT)، تجزیه متعامد سره متوازن (Balanced proper orthogonal decomposition یا به اختصار BPOD) در [15] و تجزیه مود پویا (Dynamic mode decomposition یا به اختصار DMD) در [16-18] اخیراً توسعه داده شده‌اند. BPOD یک تکنیک تجزیه‌ی مودال است که می‌تواند دو مجموعه مود را از یک سیستم دینامیکی شامل ورودی‌ها و خروجی‌های مشخص استخراج کند [19]. ورودی‌ها، اغتشاش یا تحریک خارجی هستند که برای کنترل جریان سیال به کار گرفته می‌شوند. خروجی‌ها نیز معمولاً داده‌های اندازه‌گیری‌شده‌ی سنسورها و یا کمیت‌هایی هستند که می‌بایست توسط یک مدل شناسایی شوند. این روش، تقریبی از روش برش متوازن است که در تئوری کنترل به عنوان روشی استاندارد برای متوازن کردن کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری سیستم به کار می‌رود [20]. روش‌های کاهش‌مرتبه ذکر شده در شناسایی ناپایداری‌های غیرنرمال دچار چالش هستند. روش کاهش مرتبه‌ی POD برای اولین بار توسط لاملی در [21] در مکانیک سیالات معرفی و مورد استفاده واقع شد. این روش کاهش‌مرتبه، در حل مسائل دینامیکی سیالات دارای مزایا و ضعف‌هایی است و مجموعه‌ای از پایه‌های برداری متعامد و یکه با حداقل ابعاد بدست می‌دهد که مدلی کاهش‌یافته از میدان جریان ایجاد می‌کند [19, 22]. از جمله ضعف‌های روش POD این است که مودها را بر اساس میزان انرژی آن‌ها نه بر اساس اهمیت دینامیکی آن‌ها مرتب می‌کند. همچنین در این روش، روشن نیست که چه تعداد مود POD برای مدل‌سازی مناسب سیستم دینامیکی موردنیاز است. ماندی و تایرا در [23-25] جریان سه‌بعدی آشفته جداشده عبوری از ایرفویل NACA0012 را توسط این روش مورد حل و بررسی قرار داده‌اند. در یک سیستم پایدار خطی، رشد لحظه‌ای اغتشاشات حاضر در میدان جریان هرچند دارای انرژی کم، می‌تواند موجب واگرایی اغتشاش و ناپایداری سیستم شود [26]. اگرچه مودهای بدست آمده از روش POD، از نظر میزان انرژی مودها بهینه هستند و تقریباً تمامی انرژی موجود در داده‌ها را شامل می‌شوند، اما در بسیاری مسائل، مودهای POD برای استفاده در روش تصویرسازی گالرکین مناسب نیستند؛ زیرا بعضی مودهای کم‌انرژی می‌توانند تأثیر بالایی در دینامیک سیستم بگذارند. درحالی که در میان مودهای کاهش‌یافته‌ی POD قرار نمی‌گیرند. روش POD برای سیستم‌های دینامیکی غیرنرمال با رشد گذرا (برای مثال در جریان‌های برشی) ضعیف عمل می‌کند و عملاً مودهای با محتوای انرژی پایین ولی دارای نرخ رشد انرژی بالا که می‌توانند با رشد غیرخطی موجب ناپایداری سیستم شوند را شناسایی نمی‌کند [8]. روش‌های اشاره شده در بالا به زیرفضاهایی با مرتبه‌ی بالا حتی برای جریان‌های ساده‌ای مانند پوآزی صفحه‌ای نیاز دارند که عملاً هزینه محاسباتی را به شدت بالا می‌برد [3]. هدف از این پژوهش، پیاده‌سازی روش کاهش‌مرتبه مبتنی بر مودهای بهینه وابسته به زمان است که قادر است با داشتن ابعادی به مراتب پایین‌تر نسبت به روش‌های فوق‌الذکر، ناپایداری‌های دائمی و گذرای سیستم دینامیکی جریان سیال را شناسایی و کنترل نماید. مفاهیم این روش، برای اولین بار در [7] معرفی شده است و ابعاد یک سیستم را به صورت سازگار دینامیکی کاهش می‌دهد (یعنی ویژگی‌های دینامیکی و تأثیرگذار سیستم اصلی در مدل کاهش‌یافته حفظ شده است). مودهای OTD مجموعه‌ای از بردارهای متعامدیکه هستند که به صورت وابسته به زمان جهت‌هایی را در فضای فاز دنبال می‌کنند که منتج به رشد اغتشاش و ناپایداری جریان می‌شوند. مودهای OTD بعلت توانایی بالا در شناسایی جهات رشد ناپایداری‌ها علی‌رغم تعداد کم مودها و هزینه محاسباتی پایین، گزینه‌ی مناسبی برای طراحی و پیاده‌سازی یک الگوریتم کنترلی به‌منظور پایدارسازی لحظه‌ای سیستم دینامیکی جریان سیال هستند.

۲- معادلات حاکم بر مودهای بهینه وابسته به زمان

اگر دینامیک تغییرات سیستمی با بعد محدود به صورت $\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})$ تعریف گردد، که در این رابطه، $\boldsymbol{z}(t) \in \mathbb{R}^d$ بردار وضعیت سیستم در زمان t و $\boldsymbol{F}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ میدان برداری باشد، با فرض اینکه حداقل یک نقطه ثابت (Fixed point) $\boldsymbol{z}_e$ در سیستم موجود باشد که در آن $\dot{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}_e) = 0$، آن‌گاه مسیرهای شروع شده از نزدیکی نقطه تعادلی $\boldsymbol{z}_e$ به سرعت از این نقطه منحرف شده و به وضعیت جاذب متفاوت $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ می‌گرایند. روند تغییرات زمانی اغتشاشات بسیار کوچک حول یک وضعیت معین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{u}_i = L(z)u_i, \quad 1 \leq i \leq r \qquad (۳)$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{z}) = \nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ماتریس ژاکوبی $\boldsymbol{F}$ در نقطه $\boldsymbol{z}$ می‌باشد. $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{z})$ اپراتور خطی وابسته به زمان و وضعیت لحظه‌ای $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})$ است. در نگاه تئوری، رابطه (۳) می‌تواند برای دنبال کردن مسیر ناپایداری‌ها حول وضعیت‌های سیستم به کار گرفته شود. اما در عمل این کاربرد امکان‌پذیر نیست؛ زیرا مقدار مؤلفه اغتشاشات $\{\boldsymbol{u}_i(t)\}_{i=1}^{r}$ در راستای مودهای اپراتور $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{z})$ منتج از رابطه (۳) در زمان‌های به اندازه کافی طولانی، به صورت مجزا و به‌سرعت کاهش یا افزایش می‌یابد، اما زاویه میان مودها نیز به سمت صفر میل می‌کند و عملاً امکان ردیابی اغتشاش توسط مودهای اصلی سیستم دینامیکی وجود ندارد. برای محاسبه مجموعه‌ای از جهات یا مودهای کارآمد از معادله تغییرات (۳)، بابایی و سپسیس در [7] پیشنهاد دادند که $\{\boldsymbol{u}_i(t)\}$ می‌بایست به صورت پیوسته در زمان، یکه و متعامد شوند. یک

[DOI: 10.48311/MME.24.5.269]

راه برای برقراری این قید، اعمال الگوریتم گرام-اشمیت بر روی پایه‌های $\{\boldsymbol{u}_i(t)\}_{i=1}^{r}$ به صورت پیوسته در طول زمان با شروع از $\boldsymbol{u}_1$ و ادامه به سایر پایه‌ها است. آن‌ها پایه‌های متعامد، یکه و وابسته به زمان را با عنوان مودهای بهینه وابسته به زمان معرفی نمودند که مسیرهایی در فضای فاز را شناسایی می‌کند که منجر به ناپایداری گذرا می‌شوند. با اینکه این ناپایداری‌های گذرا عمر محدودی دارند، می‌توانند نقش مهمی در تغییر دینامیک سیستم از طریق فعال‌سازی ناپایداری‌های دیگر یا ایجاد انتقال انرژی غیرخطی ناگهانی در سیستم داشته باشند و منجر به ایجاد ناپایداری دائمی در سیستم شوند. آن‌ها یک چارچوب کمینه‌سازی معرفی می‌کنند که تمرکز آن بر روی تقریب بهینه‌ی دینامیکی سیستم است. این کمینه‌سازی منتج به دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌شود که مسیر تغییرات وابسته به زمان پایه‌ها را تعیین می‌کند و به طور بهینه ناپایدارترین مسیرها را تخمین می‌زند.

هدف از روش معرفی‌شده در [۷]، یافتن پایه‌های وابسته به زمان $\boldsymbol{u}_i(t)$ است، طوری که تابع فاصله‌ی F کمینه شود:

$$F = \sum_{i=1}^{r} \left\| \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} - L(S_t, t) u_i(t) \right\|^2 \qquad (۴)$$

می‌توان اثبات نمود که برقراری رابطه کمینه‌سازی (٤) معادل با حل مجموعه معادلات زیر می‌باشد:

$$\dot{u}_i = L(z)u_i - \langle L(z)u_i, u_i\rangle u_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\langle L(z)u_i, u_k\rangle + \langle L(z)u_k, u_i\rangle) u_k, \quad 1 \le i \le r \qquad (۵)$$

در رابطه (٥)، ضرب داخلی در این رابطه می‌بایست به صورت انتگرال روی میدان حل محاسبه شود. در این رابطه $\boldsymbol{u}_i$ ها مودهای OTD و مجموعه $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^{r}$ زیرفضای OTD است. معادلات OTD را می‌توان در فرم ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$\dot{U} = LU - U(U^T LU + \Phi) = LU - UL_r \qquad (۶)$$

در این رابطه $\boldsymbol{\Phi}$ یک تانسور پادمتقارن دلخواه است.

۳- معادلات حاکم بر کنترل سیستم توسط مودهای OTD

تغییرات زمانی اغتشاش بسیار کوچک $\boldsymbol{z}' \in \mathbb{R}^p$ حول نقطه تعادلی (یا نقطه ثابت) $\boldsymbol{z}_e$ توسط سیستم دینامیکی کنترل خطی زیر توصیف می‌شود [8]:

$$\dot{z} = F(z) + Bc \qquad (۷)$$

با تعریف تصویر اغتشاش فضای فیزیکی در زیرفضای حاصل از مودهای OTD به صورت $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z}'$ و تعریف ماتریس کنترلی کاهش‌یافته (Reduced control matrix) به صورت $\boldsymbol{B}_r = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{r\times p}$، معادله تغییرات زمانی اغتشاش در فضای کاهش‌یافته‌ی OTD به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\dot{\eta} = L_r(z)\eta + B_r c \qquad (۸)$$

اگر بردار کنترل به صورت $\boldsymbol{c} = K_r\eta$ تعریف شود که در این رابطه $\boldsymbol{K}_r \in \mathbb{R}^{p\times r}$ ماتریس بهره فیدبک کاهش‌یافته (Reduced feedback gain matrix) است، رابطه (۸) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\dot{\eta} = L_{r,c}\eta \qquad (۹)$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{L}_{r,c} = \boldsymbol{L}_r + \boldsymbol{B}_r\boldsymbol{K}_r$ اپراتور خطی کاهش‌یافته حلقه‌بسته (closed-loop reduced linear operator) می‌باشد. $\boldsymbol{L}_{r,c}$ یک اپراتور وابسته به زمان است؛ بنابراین مقادیر ویژه‌ی آن معیار مناسبی برای رشد یا کاهش $\|\boldsymbol{\eta}\|$ نیستند. برای این اپراتور، مقادیر ویژه‌ی بخش متقارن، نشانگر رفتار لحظه‌ای تغییرات $\|\boldsymbol{\eta}\|$ است:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\eta\|^2 = \frac{\langle L_{r,c}\eta, \eta\rangle + \langle \eta, L_{r,c}\eta\rangle}{2} = \langle \eta, S_{r,c}\eta\rangle \qquad (۱۰)$$

برای پایدارسازی نقطه ثابت $\boldsymbol{z}_e$ لازم است که اندازه اغتشاش در فضای کاهش‌یافته در طول زمان کاهش یابد؛ یعنی $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{\eta}\|^2 < 0$ که در نتیجه می‌بایست بخش متقارن اپراتور کاهش‌یافته حلقه بسته $\boldsymbol{S}_{r,c} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L}_{r,c} + \boldsymbol{L}_{r,c}{}^T\right)$، منفی معین (Negative definite) باشد. نیروی کنترلی مورد نیاز برای رسیدن به شرط فوق‌الذکر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_c = Bc = UQdiag[-(\lambda_i + \zeta)\mathcal{H}(\lambda_i)]Q^T U^T (z - z_e) \qquad (۱۱)$$

در این رابطه $\mathcal{H}$ تابع هویساید (Heaviside function)، $\zeta \in \mathbb{R}^+$ پارامتر میرایی، $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ ماتریسی متعامد یکه حاوی بردار ویژه‌های ماتریس $\boldsymbol{S}_{r,c}$ و $\{\lambda_i\}_{i=1}^{r}$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس $\boldsymbol{S}_{r,c}$ هستند که به صورت ناپایدار تا پایدار مرتب شده‌اند. تابع هویساید $\mathcal{H}$ متضمن این است که نیروی کنترلی فقط در جهاتی از زیرفضای کاهش یافته عمل می‌کند که موجب رشد ناپایداری می‌شوند. همچنین پارامتر میرایی ζ میزان شدت نیروی کنترلی را تعیین می‌کند. در این حالت می‌توان نشان داد [۸]:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\eta\|^2 = -\zeta \sum_{\lambda_i \geqslant 0} \hat{\eta}_i{}^2 + \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i \hat{\eta}_i{}^2 \qquad (۱۲)$$

در این رابطه $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{\eta} = \hat{\boldsymbol{\eta}}_i\boldsymbol{e}_i$. از رابطه (۱۲) مشخص است که تغییرات زمانی $\|\boldsymbol{\eta}\|$ همواره منفی است و وضعیت جریان به حالت پایای $\boldsymbol{z}_e$ نزدیک می‌شود.

[DOI: 10.48311/MME.24.5.269]

۴- اعتبارسنجی و نتایج شبیه‌سازی

در این مقاله، حل معادلات ناویراستوکس جریان سیال از روش شبیه‌سازی عددی مستقیم (Direct numerical simulation یا به اختصار DNS) و به کمک حل‌گر متن‌باز ++NEKTAR [27, 28] به روش المان طیفی (Spectral element method) انجام شده است. در ادامه، ابتدا به منظور اعتبارسنجی نتایج حل جریان DNS، محاسبه مودهای OTD و صحت و دقت الگوریتم کنترل جریان، نتایج شبیه‌سازی جریان سیال تراکم‌ناپذیر دوبعدی عبوری از روی استوانه در دو حالت بدون کنترل و اعمال الگوریتم کنترلی، ارائه و با نتایج مرجع [9] مقایسه و صحه‌گذاری شده است. سپس الگوریتم کنترلی بر روی جریان عبوری از استوانه با $Re = ۵۰$ در معرض اغتشاشات با منشأ مرزی متغیر با زمان برای نخستین بار پیاده‌سازی شده و نتایج آن ارائه می‌شود. شکل ۳ شماتیک سیر مراحل حل جریان پایه، محاسبه مودهای OTD و نیروی کنترلی وارد بر میدان جریان را برای یک گام زمانی توصیف می‌کند.

۴-۱- ناپایداری سیکل محدود جریان عبوری از استوانه (صحت‌سنجی روش و نتایج)

در یک جریان دوبعدی سیال نیوتنی غیرتراکم‌پذیر با چگالی ثابت ρ، لزجت سینماتیکی ν عبوری از استوانه‌ای با قطر D با سرعت جریان آزاد یکنواخت Ue_x ، معادلات حاکم بدون بعد برای جریان پایه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial U_b}{\partial t} + (U_b.\nabla)U_b = -\nabla p_b + \frac{1}{Re}\nabla^2 U_b \tag{۱-۱۳}$$

$$\nabla \cdot U_b = 0 \tag{۲-۱۳}$$

همچنین شرط مرزی عدم لغزش در مرز دیواره جسم و شرط مرزی جریان یکنواخت در مرزهای میدان به ترتیب از روابط زیر بیان می‌شود:

$$U_b\Big|_{\Gamma_{Cylinder}} = 0 \tag{۱-۱۴}$$

$$\lim_{x,y\to\infty} U_b = e_x \tag{۲-۱۴}$$

در معادلات فوق، سرعت، زمان و طول توسط پارامترهای قطر استوانه D، سرعت جریان آزاد U و عدد رینولدز $Re = UD/\nu$ بدون بعد شده‌اند.

شکل ۳) شماتیک مراحل حل جریان پایه، محاسبه مودهای OTD و نیروی کنترلی در یک گام زمانی

همچنین معادله مودهای OTD به صورت روابط زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = L_{NS}(u_i) - \langle L_{NS}(u_i), u_i\rangle u_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\langle L_{NS}(u_i), u_k\rangle + \langle L_{NS}(u_k), u_i\rangle) u_k \tag{۱-۱۵}$$

$$\nabla \cdot u_i = 0 \tag{۲-۱۵}$$

شرط مرزی دیواره و شرط مرزی مرزهای دامنه حل نیز از روابط زیر مشخص می‌گردد:

$$u_i\Big|_{\Gamma_{Cylinder}} = 0 \tag{۱-۱۶}$$

$$\lim_{x,y\to\infty} u_i = 0 \tag{۲-۱۶}$$

در رابطه‌ی (۱-۱۵)، $\boldsymbol{L}_{NS}$ اپراتور خطی ناویراستوکس است که با استفاده از سرعت لحظه‌ای $\boldsymbol{U}_b$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_{NS}(u_i) = -(U_b.\nabla)u_i - (u_i.\nabla)U_b + \frac{1}{Re}\nabla^2 u_i - \nabla p'_i \tag{۱۷}$$

در ادامه، نتایج حل معادلات جریان پایه و معادلات OTD برای جریان روی استوانه با شرایط تعریف شده در مرجع [۹] ارائه می‌گردد. برای جریان روی استوانه به ازای $Re = ٤٧$ جریان پایه از وضعیت پایای متقارن $\boldsymbol{U}_e$ خارج می‌شود و در زمان‌های طولانی به سمت یک سیکل محدود (Limit cycle) به صورت ریزش گردابه (Vortex shedding) پشت جسم میل می‌کند [۲۹و۳۰]. در $Re = ۵۰$ دقیقاً یک جفت مقدار ویژه ناپایدار مختلط برای اپراتور خطی ناویراستوکس وجود دارد. در این مسأله، شرایط اولیه مودهای OTD به صورت زیرفضای $\{\sin(my)\boldsymbol{e}_x + \cos(mx)\boldsymbol{e}_y\}_{m=1}^{r}$ تعریف شده است که توسط روش گرام-اشمیت روی دامنه‌ی حل یکه و متعامد شده است. برای انتخاب

گام زمانی مناسب، دو معیار عدد کورانت (CFL number) و عدد اشتروهال (Strouhal number) می‌بایست مدنظر قرار بگیرد. عدد اشتروهال ($St = \frac{f \times D}{U}$) در جریان دوبعدی روی استوانه با مقادیر پارامترهای مسأله حاضر را می‌توان در محدوده ۰/۱ تا ۰/۲ تخمین زد [31]؛ یعنی دوره زمانی سیکل‌های ریزش گردابه در حدود T=۷ (بدون بعد) خواهد بود. با اتخاذ گام زمانی کمتر از ۰/۲، حداقل ۳۰ گام زمانی در هر سیکل نوسان وجود خواهد داشت. بنابراین، پارامتر محدودکننده‌ی انتخاب گام زمانی در این مسأله، عدد کورانت خواهد بود. در شبیه‌سازی حاضر، به‌منظور برقراری شرایط مناسب همگرایی و پایداری حل، شرط CFL < ۰/۵ معیار انتخاب گام زمانی بوده است [32] و برای حل معادلات جریان پایه و OTD، $\Delta t = ۰/۰۰۵$ (بدون بعد) در نظر گرفته شده است.

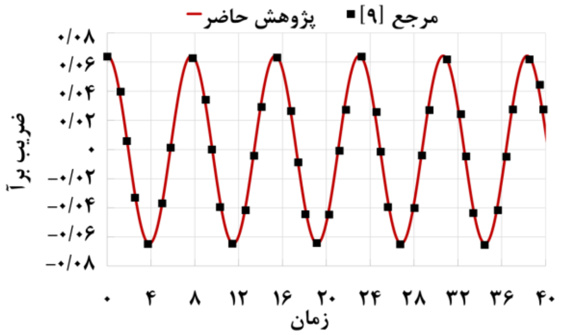
۴-۱-۱- حل DNS جریان و محاسبه‌ی مودهای OTD بدون اعمال نیروی کنترلی

در این بخش، کانتور ورتیسیتی جریان پایه برای دو حالت لحظه‌ای و جریان پایای متقارن، ورتیسیتی مودهای اول و دوم OTD و همچنین گراف تغییرات زمانی ضریب برآ (Lift coefficient) در حالت وجود ناپایداری سیکل محدود پشت استوانه ارائه شده و با نتایج مرجع [9] مقایسه و صحه‌گذاری شده است. برای جلوگیری از پرش و عدم پیوستگی در مقادیر نیروی وارده بر میدان جریان، می‌توان در رابطه‌ی (۱۱)، تابع هویساید را حذف نمود و تمامی مودهای OTD را در محاسبه‌ی نیروی کنترلی وارد نمود. در نتایج ارائه شده، نیروی کنترلی از رابطه زیر محاسبه و پیاده‌سازی شده است:

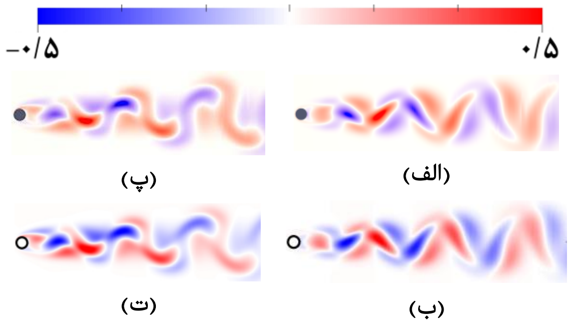
$$f_{c,all} = UQdiag[-(\zeta)]Q^T U^T (z - z_e) \qquad (۱۸)$$

شکل ٤ نتایج ضریب آیرودینامیکی برآ حاصل از حل DNS جریان روی استوانه در پژوهش حاضر و مرجع [9] را به ازای Re = ۵۰ را نشان می‌دهد. علت انتخاب مرجع [9] به عنوان معیار صحت‌سنجی روش، تشریح مناسب پارامترهای ورودی مسأله و ارائه نتایج شبیه‌سازی مودهای OTD در حالت بدون کنترل و حالت دارای کنترل است. لازم بذکر است ایده‌ی پایدارسازی جریان سیال توسط مودهای OTD، نخست در مرجع [8] معرفی و سپس در مرجع [9] توسعه داده شده است و در حال حاضر مرجع دیگری با این موضوع وجود ندارد. علت اهمیت پایدارسازی نیروی برآ این است که نوسان و تغییر جهت این نیرو موجب ایجاد نوسان و ارتعاش در جسم در معرض ناپایداری می‌شود.

همانطور که از شکل ٤ مشخص است، در وضعیت ناپایداری سیکل محدود، ضریب برآی استوانه حاصل از حل DNS جریان در پژوهش حاضر، انطباق خوبی با نتایج مرجع [9] دارد. همچنین پریود زمانی سیکل تغییرات ضریب برآ نیز T=۷/۷۵ است که با نتایج مرجع [9]، ۰/۵٪ اختلاف دارد و نشان‌دهنده انطباق خوب نتایج است.



شکل ۴) ضریب برآ در جریان روی استوانه در حالت سیکل محدود (محورها بدون بعد)

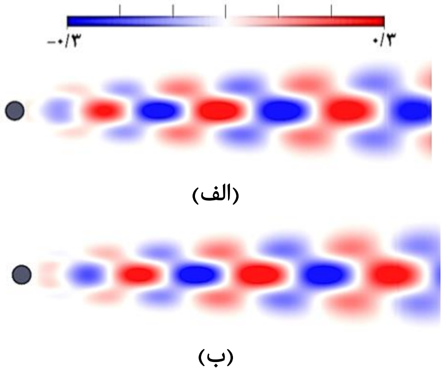


شکل ۵) کانتور ورتیسیتی مودهای OTD دوران‌یافته در حالت ناپایای سیکل محدود استوانه. الف و ب) مود اول OTD. پ و ت) مود دوم OTD. الف و پ) نتایج پژوهش حاضر. ب و ت) تصاویر مستقیم مرجع [9].

شکل ۵ کانتور توزیع مود اول و دوم OTD را برای حالت ناپایای ناپایدار در وضعیت سیکل محدود نشان می‌دهد. در این شکل، به‌منظور صحت‌سنجی محاسبه مودهای OTD ناپایا در پژوهش حاضر، نتایج کانتورهای متناظر ارائه شده در مرجع [9] نیز آورده شده است که گواه انطباق مناسب کیفی و کمّی نتایج دو پژوهش و صحت روش و نتایج محاسبه مودهای OTD در پژوهش حاضر می‌باشد. لازم به ذکر است در شکل ۵، به‌منظور مقایسه، کانتور ورتیسیتی مودهای دوران‌یافته $\boldsymbol{UQ}$ (چرخش مودهای OTD توسط ماتریس دوران متعامد یکه $\boldsymbol{Q}$ که در بخش ۳ معرفی شده است) ترسیم شده و مبنای مقایسه قرار گرفته است.

شکل ٦ کانتور توزیع مود اول و دوم OTD را برای حالت پایای متقارن نشان می‌دهد. همانطور که از شکل ٦ مشخص است، در حالت پایای متقارن، شکل مودهای اول و دوم OTD شبیه به یکدیگر است؛ با این تفاوت که میان توزیع ورتیسیتی این دو مود، اختلاف زمانی مشاهده می‌شود. در بخش بعدی نشان داده می‌شود که با اعمال الگوریتم کنترلی بر میدان جریان، توزیع ورتیسیتی گذرای مودهای OTD از وضعیت شکل ۵ به توزیع ورتیسیتی در شکل ٦ میل می‌کند.

[DOI: 10.48311/MME.24.5.269]

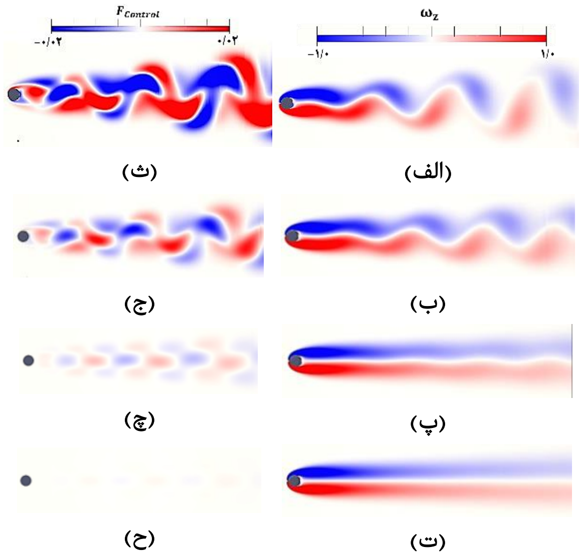


شکل ۶) کانتور ورتیسیتی مود OTD در حالت پایای متقارن استوانه الف) مود اول OTD ب) مود دوم OTD

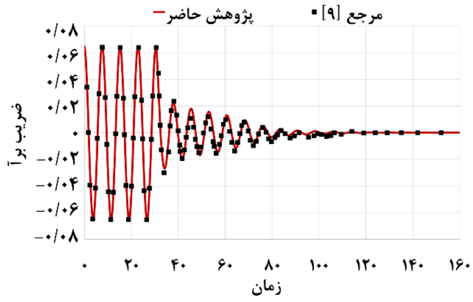
۴-۱-۲- حل DNS جریان و محاسبه‌ی مودهای OTD با اعمال الگوریتم کنترلی

در این قسمت، الگوریتم کنترلی تشریح شده بر روی مسأله‌ی ارائه شده در بخش قبل پیاده‌سازی شده و نتایج آن ارائه شده و با نتایج مرجع [9] مقایسه و صحه‌گذاری است.

در این مسأله، شرایط مرزی، شرایط اولیه و هندسی مشابه مسأله قسمت قبل است. در شکل ۷ کانتور توزیع ورتیسیتی جریان پایه و توزیع نیروی کنترلی اعمالی بر میدان جریان حول استوانه برای شرایط $\mathrm{Re}=۵۰$، $\zeta=۰/۱$ و $r=۲$ در چند نقطه‌ی زمانی نشان داده شده است. همانطور که مشخص است، نیروی کنترلی در ابتدای شروع کنترل (t=۳۰) مقادیر بزرگی دارد و در طول زمان با کاهش میزان ناپایداری سیکل محدود میدان جریان، مقدار نیروی کنترلی نیز کاهش می‌یابد و در پایان با گرایش وضعیت جریان پایه به حالت پایای متقارن، نیروی کنترلی نیز به مقدار صفر میل می‌کند.



شکل ۷) کانتور توزیع ورتیسیتی لحظه‌ای با شرایط $\mathrm{Re}=۵۰$، $\zeta=۰/۱$ و $r=۲$. الف،ب،پ،ت) جریان پایه ث،ج،چ،ح) نیروی کنترلی اعمالی بر میدان جریان الف و ث) زمان شروع کنترل (t=۳۰) ب و ج) t=۶۰ پ و چ) t=۹۰ ت و ح) t=۱۲۰



شکل ۸) تغییرات ضریب برآی استوانه قبل و پس از اعمال نیروی کنترلی در t=۳۰ (محورها بدون بعد)

همچنین شکل ۸ روند تغییرات ضریب برآ را در شرایط قبل و بعد از اعمال نیروی کنترلی در زمان t=۳۰ نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است، پس از اعمال نیروی کنترلی بر میدان جریان، جریان پایه به سرعت به سمت وضعیت تعادلی پایا حرکت می‌کند و نوسانات ضرایب آیرودینامیکی از بین رفته‌است.

۴-۲- کنترل ناپایداری جریان روی استوانه در معرض اغتشاش مرزی ماندگار متغیر با زمان

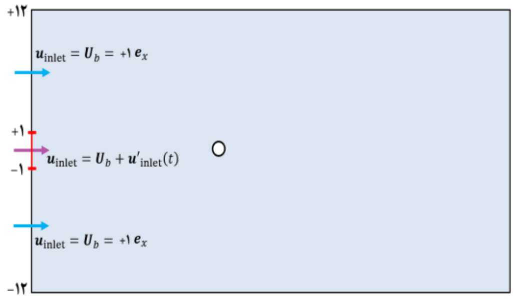
در این بخش، قابلیت و اثربخشی روش کنترل OTD در پایدارسازی اغتشاش خارجی ماندگار و پریودیک متغیر با زمان به‌ازای پارامترهای مختلف اغتشاش خارجی و روش کنترلی (شامل دامنه، تعداد مودها و پارامتر میرایی کنترلی) مورد ارزیابی قرار گرفته که نوآوری و گام مهمی در جهت شناخت قابلیت‌ها و توسعه روش کنترل OTD به شمار می‌رود. در ادامه، الگوریتم کنترل جریان با مودهای بهینه وابسته به زمان برای کنترل ناپایداری ناشی از اغتشاش مرزی متغیر با زمان با همان تعریف مسأله قسمت قبل پیاده‌سازی شده‌است. رابطه‌ی اغتشاش وابسته به زمان وارد بر سیستم از مرز ورودی به صورت زیر در نظر گرفته شده‌است:

$$u'_{inlet}(t) = A|sin(2\pi f t)|e_x \qquad -1 \leq y \leq 1 \qquad (۱۹)$$

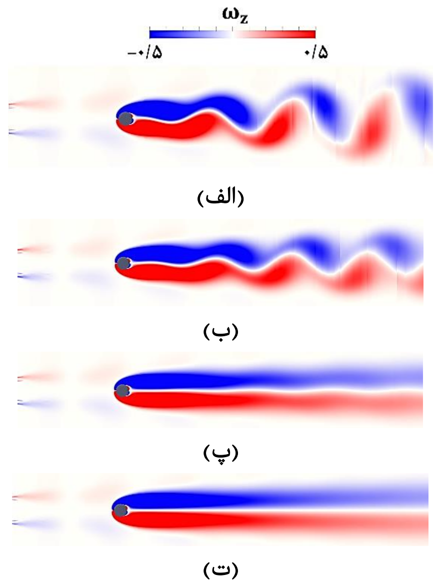
در این رابطه، A دامنه‌ی اغتشاش و f فرکانس اغتشاش سوار بر جریان آزاد از مرز ورودی میدان می‌باشد. شکل ۹ شماتیک نحوه‌ی اعمال ورودی اغتشاشی متغیر با زمان در مرز ورودی سیستم را نشان می‌دهد. در ادامه این بخش، کارکرد الگوریتم کنترلی به ازای تغییر پارامترهای r (تعداد مودهای OTD)، A (دامنه‌ی اغتشاش ورودی) و ζ (پارامتر میرایی) ارزیابی شده و نتایج شبیه‌سازی و روند تغییرات نیروی برآ ارائه می‌شود.

شکل ۱۰، روند پایدارسازی جریان پایه را در چند نقطه‌ی زمانی با شرایط A=۰/۰۵ ، f=۰/۱ ، $\mathrm{Re}=۵۰$، $\zeta=۰/۱$ و $r=۲$ و در فواصل زمانی $\Delta t=۴۰$ با شروع از زمان اعمال کنترل نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشخص است، در حضور دائمی اغتشاش ورودی نیز الگوریتم کنترل جریان مبتنی بر مودهای OTD، اثربخشی مناسبی دارد.

[DOI: 10.48311/MME.24.5.269]



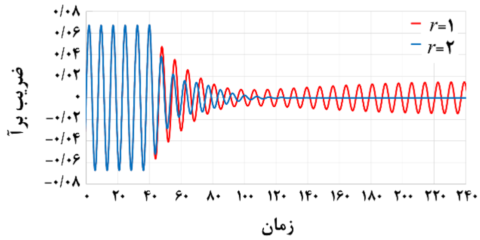
شکل ۹) اعمال ورودی اغتشاشی پریودیک متغیر با زمان در مرز سیستم



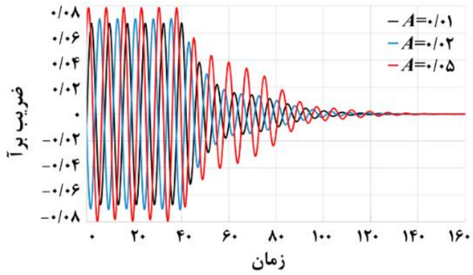
شکل ۱۰) کانتور ورتیسیتی لحظه‌ای جریان روی استوانه حاوی اغتشاش ورودی (۱۹) با شرایط $A = ۰/۰۵$ ، $f = ۰/۱$ ، $\mathrm{Re} = ۵۰$، $\zeta = ۰/۱$ و $r = ۲$ در فواصل زمانی $\Delta t = ۴۰$ با شروع از زمان اعمال کنترل

در شکل ۱۱، روند تغییرات ضریب برآ در دو حالت $r = ۱$ و $r = ۲$ به ازای $A = ۰/۰۱$ ، $\zeta = ۰/۱$ و $f = ۰/۱$ با یکدیگر مقایسه شده‌است. دامنه‌ی نوسانات نیروی برآ در این شرایط، حدود ۵٪ بیشتر از حالت جریان ورودی بدون اغتشاش است. همانطور که در شکل ۱۱ مشخص است، در حالت استفاده از تنها یک مود OTD، الگوریتم کنترلی قادر به پایدارسازی جریان و ایجاد نیروی برآی ثابت نمی‌باشد. درحالی‌که در حالت $r = ۲$ پایدارسازی جریان اتفاق می‌افتد و ضریب برآی ثابت بدست می‌آید. در شکل ۱۲، روند تغییرات ضریب برآ در سه حالت $A = ۰/۰۱$، $A = ۰/۰۲$ و $A = ۰/۰۵$ به ازای $r = ۲$، $\zeta = ۰/۱$ و $f = ۰/۱$ با یکدیگر مقایسه شده‌است.

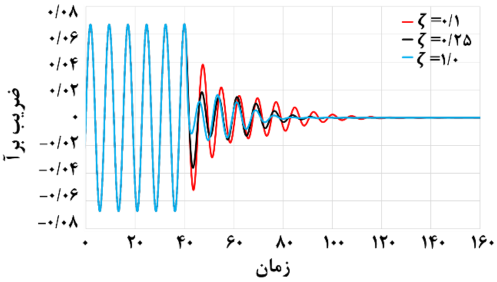
در شکل ۱۲، دامنه‌ی نوسانات نیروی برآ در حالت $A = ۰/۰۵$، ۲۲٪ بیشتر از حالت بدون ورودی اغتشاشی است. همچنین این نتیجه دریافت می‌شود که هرچه دامنه‌ی اغتشاش ورودی بیشتر باشد، دامنه‌ی نوسانات سیستم و انرژی لازم برای کنترل سیستم بیشتر است و مدت زمان میل کردن سیستم به حالت پایدار افزایش می‌یابد.



شکل ۱۱) تغییرات ضریب برآی استوانه در دو حالت $r = ۱$ و $r = ۲$ به ازای $A = ۰/۰۱$ ، $\zeta = ۰/۱$ و $f = ۰/۱$ - شروع کنترل از زمان $t = ۴۰$ (محورها بدون بعد)



شکل ۱۲) تغییرات ضریب برآی استوانه در سه حالت $A = ۰/۰۱$، $A = ۰/۰۲$ و $A = ۰/۰۵$ به ازای $r = ۲$، $\zeta = ۰/۱$ و $f = ۰/۱$ - شروع کنترل از زمان $t = ۴۰$ (محورها بدون بعد)



شکل ۱۳) تغییرات ضریب برآی استوانه در سه حالت $\zeta = ۰/۱$، $\zeta = ۰/۲۵$ و $\zeta = ۱/۰$ به ازای $r = ۲$، $A = ۰/۰۱$ و $f = ۰/۱$ - شروع کنترل از زمان $t = ۴۰$ (محورها بدون بعد)

شکل ۱۳، تغییرات ضریب برآ را برای سه حالت $\zeta = ۰/۱$، $\zeta = ۰/۲۵$ و $\zeta = ۱/۰$ به ازای $r = ۲$، $A = ۰/۰۱$ و $f = ۰/۱$ نشان می‌دهد. همانطور که از نتایج مشخص است، به ازای ضریب میرایی بزرگتر، کاهش دامنه‌ی نوسانات نیروی برآ با نرخ بیشتری اتفاق می‌افتد. می‌توان با تحلیل میزان انرژی لازم برای کنترل سیستم، ضریب میرایی بهینه را بدست آورد. همچنین با افزایش بیش از حد ضریب میرایی، نیروی کنترلی وارد بر میدان جریان، موجب برهم زدن الگوی جریان پایه شده و الگوریتم کنترلی قادر به پایدارسازی جریان نخواهد بود.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

کنترل جریان سیال بر مبنای مودهای بهینه‌ی وابسته به زمان روش جدیدی است که در آن کاهش مرتبه‌ی سیستم دینامیکی توسط پایه‌های متعامد، یکه و وابسته به زمان با حفظ سازگاری

دینامیکی صورت می‌گیرد و می‌تواند مسیرهای منتج به ناپایداری‌های مجانبی و گذرا را شناسایی و دنبال کرده و مقدار مؤلفه‌ی پارامترهای جریان در راستای آن پایه‌ها را کاهش دهد و در نهایت به حذف ناپایداری منجر شود. مودهای OTD، ناپایدارترین زیرفضای r بعدی فضا را پوشش می‌دهند. در حال حاضر رابطه‌ی مشخصی برای تعیین تعداد مودهای موردنیاز برای تشکیل زیرفضای OTD به‌منظور کاهش مرتبه‌ی سیستم و پایدارسازی جریان وجود ندارد. تعداد مودهای موردنیاز به نوع مسأله و سیستم دینامیکی و اهداف کنترلی وابسته است. یک راهبرد تخمینی برای انتخاب تعداد مودهای ضروری، تعداد توابع ویژه ناپایدار اپراتور خطی اصلی سیستم و بخش متقارن آن است.

در این مقاله، اثربخشی الگوریتم کنترلی کاهش‌مرتبه مبتنی بر مودهای بهینه‌ی وابسته به زمان برای جریان دوبعدی تراکم‌ناپذیر عبوری از استوانه در معرض اغتشاش خارجی ماندگار وابسته به زمان به صورت نوآورانه شبیه‌سازی، تحلیل و حساسیت‌سنجی شده است. نتایج نشان می‌دهد که در حالت وجود اغتشاش ورودی ماندگار وابسته به زمان، دامنه‌ی نوسانات نیروی برآی وارد بر استوانه و در نتیجه ارتعاشات جسم ناشی از تغییر جهت نیروی برآ افزایش می‌یابد. بنابراین در این حالت، کنترل ناپایداری جریان دارای اهمیت بیشتری است و انرژی کنترلی بیشتری نیز نیاز دارد. ابتدا تغییرات ضریب برآ برای دو حالت $r = ۱$ و $r = ۲$ به ازای $A = ۰/۰۱$، $\zeta = ۰/۱$ و $f = ۰/۱$ ارزیابی شده‌است. نتایج نشان می‌دهد با استفاده از تنها یک مود OTD، سیستم کنترلی قادر به پایدارسازی جریان نخواهد بود؛ ولی با استفاده از دو مود، پایداری جریان حاصل می‌شود. همچنین تغییرات ضریب برآ در سه حالت $A = ۰/۰۱$، $A = ۰/۰۲$ و $A = ۰/۰۵$ به ازای $r = ۲$، $\zeta = ۰/۱$ و $f = ۰/۱$ ارائه شده‌است. نتایج نشان می‌دهد هرچه دامنه‌ی اغتشاش بزرگتر باشد، دامنه‌ی نوسانات سیستم افزایش می‌یابد. در ادامه تغییرات ضریب برآ برای سه حالت $\zeta = ۰/۱$، $\zeta = ۰/۲۵$ و $\zeta = ۱/۰$ به ازای $r = ۲$، $A = ۰/۰۱$ و $f = ۰/۱$ تحلیل شده‌است. نتایج نشان می‌دهد به ازای ضریب میرایی بزرگتر، نرخ زمانی پایدارسازی جریان کاهش می‌یابد. می‌توان با تحلیل میزان انرژی موردنیاز برای کنترل سیستم، ضریب میرایی بهینه را از منظر مصرف انرژی بدست آورد.

تاییدیه اخلاقی: محتوای علمی این مقاله حاصل فعالیت‌های پژوهشی نویسندگان بوده و صحت نتایج آن برعهده نویسندگان آن است.

تعارض منافع: مقاله‌ی حاضر تعارض منافعی با اشخاص و سازمان‌های دیگر ندارد.

منابع مالی: هزینه‌های این پژوهش توسط نویسندگان تأمین شده است.

منابع

1- Jovanović MR. From bypass transition to flow control and data-driven turbulence modeling: an input–output viewpoint. Annual Review of Fluid Mechanics. 2021 Jan 5;53(1):311-45.

2- Schmid PJ, Henningson DS, Schmid PJ, Henningson DS. The Viscous Initial Value Problem. Stability and Transition in Shear Flows. 2001:99-151.

۳- Rowley CW, Dawson ST. Model reduction for flow analysis and control. Annual Review of Fluid Mechanics. 2017 Jan 3;49(1):387-417.

4- Brunton SL, Kutz JN. Data-driven science and engineering: Machine learning, dynamical systems, and control. Cambridge University Press; 2022 May 5.

5- Trefethen, Lloyd N., and Mark Embree. Spectra and pseudospectra. Princeton university press, 2020.

6- Schmid PJ. Nonmodal stability theory. Annu. Rev. Fluid Mech. 2007 Jan 21;39(1):129-62.

7- Babaee H, Sapsis TP. A minimization principle for the description of modes associated with finite-time instabilities. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2016 Feb 29;472(2186):20150779.

8- Blanchard A, Mowlavi S, Sapsis TP. Control of linear instabilities by dynamically consistent order reduction on optimally time-dependent modes. Nonlinear Dynamics. 2019 Mar 1;95:2745-64.

9- Blanchard A, Sapsis TP. Stabilization of unsteady flows by reduced-order control with optimally time-dependent modes. Physical Review Fluids. 2019 May;4(5):053902.

10- Kern JS, Beneitez M, Hanifi A, Henningson DS. Transient linear stability of pulsating Poiseuille flow using optimally time-dependent modes. Journal of Fluid Mechanics. 2021 Nov;927:A6.

11- Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer Science & Business Media; 2013 Nov 21.

12- Orszag SA. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation. Journal of Fluid Mechanics. 1971 Dec;50(4):689-703.

13- Orszag SA, Patera AT. Secondary instability of wall-bounded shear flows. Journal of Fluid Mechanics. 1983 Mar;128:347-85.

14- Skogestad S, Postlethwaite I. Multivariable feedback control: analysis and design. john Wiley & sons; 2005 Nov 4.

15- Rowley CW. Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005 Mar;15(03):997-1013.

16- Kutz JN, Brunton SL, Brunton BW, Proctor JL. Dynamic mode decomposition: data-driven modeling of complex systems. Society for Industrial and Applied Mathematics; 2016 Nov 23.

17- Schmid PJ. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. Journal of fluid mechanics. 2010 Aug;656:5-28.

18- Rowley CW, Mezić I, Bagheri S, Schlatter P, Henningson DS. Spectral analysis of nonlinear flows. Journal of fluid mechanics. 2009 Dec;641:115-27.

[DOI: 10.48311/MME.24.5.269]

19- Taira K, Brunton SL, Dawson ST, Rowley CW, Colonius T, McKeon BJ, Schmidt OT, Gordeyev S, Theofilis V, Ukeiley LS. Modal analysis of fluid flows: An overview. Aiaa Journal. 2017 Dec;55(12):4013-41.
20- Moore B. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. IEEE transactions on automatic control. 1981 Feb;26(1):17-32.
21- Lumley, John L. Stochastic tools in turbulence. volume 12. applied mathematics and mechanics. Pennsylvania state university park dept of aerospace engineering, 1970.
22- Taira K, Hemati MS, Brunton SL, Sun Y, Duraisamy K, Bagheri S, Dawson ST, Yeh CA. Modal analysis of fluid flows: Applications and outlook. AIAA journal. 2020 Mar;58(3):998-1022.
23- Munday PM, Taira K. Separation control on NACA 0012 airfoil using momentum and wall-normal vorticity injection. In32nd AIAA Applied Aerodynamics Conference 2014 (p. 2685).
24- Munday PM, Taira K. Effects of wall-normal and angular momentum injections in airfoil separation control. AIAA Journal. 2018 May;56(5):1830-42.
25- Kajishima T, Taira K. Computational fluid dynamics: incompressible turbulent flows. Springer; 2016 Oct 1.
26- Chomaz JM. Global instabilities in spatially developing flows: non-normality and nonlinearity. Annu. Rev. Fluid Mech.. 2005 Jan 21;37(1):357-92.
27- Cantwell CD, Moxey D, Comerford A, Bolis A, Rocco G, Mengaldo G, De Grazia D, Yakovlev S, Lombard JE, Ekelschot D, Jordi B. Nektar++: An open-source spectral/hp element framework. Computer physics communications. 2015 Jul 1;192:205-19.
28- Moxey D, Cantwell CD, Bao Y, Cassinelli A, Castiglioni G, Chun S, Juda E, Kazemi E, Lackhove K, Marcon J, Mengaldo G. Nektar++: Enhancing the capability and application of high-fidelity spectral/hp element methods. Computer Physics Communications. 2020 Apr 1;249:107110.
29- Dušek J, Le Gal P, Fraunié P. A numerical and theoretical study of the first Hopf bifurcation in a cylinder wake. Journal of Fluid Mechanics. 1994 Apr;264:59-80.
30- Giannetti F, Luchini P. Structural sensitivity of the first instability of the cylinder wake. Journal of Fluid Mechanics. 2007 Jun;581:167-97.
31- Jiang H, Cheng L. Strouhal–Reynolds number relationship for flow past a circular cylinder. Journal of Fluid Mechanics. 2017 Dec;832:170-88.
32- Jiang H, Cheng L. Large-eddy simulation of flow past a circular cylinder for Reynolds numbers 400 to 3900. Physics of Fluids. 2021 Mar 1;33(3).