ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در کانال متخلخل منحنی با دیواره موجدار متحرک به همراه چشمه حرارتی داخلی

پوریا اکبرزاده[1*]، حسن پناه‌دوست[2]

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، p.akbarzadeh@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 16 تیر 1396

پذیرش: 28 مرداد 1396

ارائه در سایت: 21 مهر 1396

کلید واژگان:

جریان با دیواره موجدار

هیدرودینامیک مغناطیسی

نانوسیال

محیط متخلخل

چشمه حرارتی

چکیده

پدیده کانال با دیواره موجدار متحرک به طور گسترده در اندام‌های بایولوژیکی نظیر سیستم‌های گوارشی، دفع ادرار و صفرا مشاهده می‌شود. همچنین امروزه پمپ‌های انگشتی، غلتکی و پمپ‌های مدیریت زباله در صنعت هسته‌ای نیز بر اساس قوانین دیواره‌های موجدار متحرک کار می‌کنند. لذا در این مقاله جریان هیدرودینامیک مغناطیسی نانوسیال در یک کانال منحنی در محیط متخلخل با دیواره موجدار متحرک به همراه چشمه حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. در مطالعه حاضر، جریان تراکم ناپذیر می‌باشد و معادلات حاکم برای جریان، انتقال حرارت و انتقال جرم با استفاده از فرض طول موج بلند به‌دست آمده‌اند. برای حل عددی معادلات، از روش تقریب تفاضل مرکزی و روش ضمنی جعبه‌ای کلر استفاده شده است. انتقال حرارت به دلیل وجود میدان مغناطیسی کاهش پیدا می کند. همچنین افزایش قدرت چشمه حرارتی و عدد دارسی موجب کاهش انتقال حرارت می‌گردد. افزایش تخلخل در محیط، سبب افزایش انتقال حرارت می‌گردد. افزایش قدرت چشمه حرارتی همراه با کاهش سرعت در خط مرکزی کانال در حالت موجدار می‌باشد. در این مقاله با استفاده از نتایج به‌دست آمده از حل عددی، اثر کمیت‌های چشمه حرارتی، عدد دارسی و همچنین تخلخل روی سرعت سیال، دما، تابع نیروی مغناطیسی، افزایش فشار در واحد طول موج ،عدد ناسلت و همچنین پدیده به دام افتادگی جریان مورد بررسی قرار گرفته است.

MHD flow of a nanofluid inside a peristaltic curved porous channel with internal heat source

Pooria Akbarzadeh*, Hassan Panahdoost

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, p.akbarzadeh@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 07 July 2017
Accepted 19 August 2017
Available Online 99 May 9999

Keywords:
Peristaltic flow
Magnetohydrodynamic
Nanofluids
Porous media
Thermal source

ABSTRACT

Peristaltic phenomenon is widely used for biological tissues such as the digestive and excretion of urine systems. Fingered and roller pumps, hoses and internal pumps, pumps for waste management in the nuclear industry are also working on the wavy walls rules. Hence, in this paper, the magnetic hydrodynamic flow of nanofluids inside a curved porous channel, with peristaltic walls and within the internal heat source has been studied. In the present study, the flow is incompressible and the governing equations, including flow, heat and mass transfer are obtained by using an assumption of long wavelength. For solving the equations, the central finite difference approximation algorithm and Keller-box method are utilized. Heat transfer is reduced due to the presence of a magnetic field. Also, increasing the power of the heat source and the Darcy number reduces the heat transfer. Increasing porosity in the environment increases the heat transfer. Increasing the power of the heat source is accompanied by a reduction in velocity in the central line of the channel in the corrugated mode.

In this paper, by using the numerical solution results, the effect of various parameters such as source term, Darcy number and porosity on the velocity, distribution of temperature, the function of the magnetic force, increasing pressure on the wavelength, Nusselt number and also the flow trapping phenomenon have been studied.

1- مقدمه

در دهه‌های اخیر، تحقیق و پژوهش پیرامون بررسی خصوصیات جریان سیال داخل مجاری با دیواره موجدار متحرک[1] به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یافته است. این پدیده نقش بسیار مهمی در علم فیزیولوژی و انتقال سیالات فیزیولوژیک نظیر انتقال ادرار از کلیه به مثانه، زردابه از کیسه صفرا به روده اثنی عشر، انتقال لقمه غذا در دستگاه گوارش، حمل و نقل ذرات در عروق لنفاوی، انتقال تخمک در لوله رحم و غیره را ایفا می‌کند. در حقیقت انبساط و انقباض دیواره این مجاری، مکانیزم پمپاژ سیال را برعهده دارند. پمپ‌های انگشتی و غلتکی، شلنگ‌ها و پمپ‌های داخلی مدیریت زباله در صنعت هسته‌ای، پمپ‌های مورداستفاده در ریه، قلب و دستگاه‌های دیالیز نیز

[1] Peristaltic

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

P. Akbarzadeh, H. Panahdoost, MHD flow of a nanofluid inside a peristaltic curved porous channel with internal heat source, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 10, pp. 165-175, 2017 (in Persian)

براساس قوانین و اصول حاکم بر مکانیزم دیواره‌های موجدار متحرک کار می‌کنند [1-3].

کارهای پیشنهادی لاتام، شاپیرو و لئو در سال 1964 را می‌توان از جمله کارهای اولیه در این زمینه معرفی نمود [5,4]. در سال 1969 شاپیرو و همکاران [5] مکانیزم پمپاژ موجدار سیال در ارتباط با سیستم‌های حالب، دستگاه گوارش، رگ‌های خونی کوچک و مجراهای غدوی را مورد بررسی قراردادند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که دو پدیده فیزیولوژیکی مهم که برگشت[1] و به دام‌افتادگی[2] جریان موجدار نامیده می‌شود، در این مکانیزم دیده می‌شوند. لئو و همکاران [6] در سال 1971 با بررسی جریان موجدار در روده کوچک مشاهده کردند که در استخراج معادلات حاکم می‌توان عدد رینولدز را بسیار کوچک درنظر گرفت. در سال 1988 تاکاباتاک و همکاران [7] با استفاده از توسعه روش عددی تاکاباتاک و آی یو کاوا [8] مسئله پمپ موجدار را برای یک لوله متقارن محوری حل کردند. همچنین، آن‌ها پدیده به دام‌افتادگی و برگشت در خط مرکزی را مورد مطالعه قراردادند و به این نتیجه رسیدند که ماهیت پدیده برگشت جریان در جریان متقارن به طول موج دیواره متحرک بستگی دارد. به این معنا که برگشت جریان نزدیک محور لوله در طول موج‌های بلند به وجود می‌آید درحالی‌که این پدیده طول‌موج کوچک در نزدیکی دیواره‌های لوله اتفاق می‌افتد.

میشرا و رائو [9] در سال2003 انتقال موجدار سیال نیوتنی را در یک کانال مستقیم با استفاده از یک مدل ریاضی با فرض عدد رینولدز کوچک مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها مشاهده کردند که در کانال متقارن ناحیه به دام افتادگی بزرگتری نسبت به کانال نامتقارن ایجاد می‌شود. علی و همکاران [1] در سال 2010 نتایج حاصل از بررسی انتقال حرارت جریان موجدار در یک کانال منحنی را ارائه دادند. آن‌ها با استفاده از روش شوتینگ و مقادیر مختلف ضریب انحنا و عدد برینکمن مشاهده کردند که نرخ پمپ موجدار در کانال منحنی در مقایسه با کانال مستقیم بیشتر می‌باشد. علاوه براین نرخ انتقال حرارت در کانال منحنی در مقایسه با کانال مستقیم کاهش می‌یابد. در سال 2015 اکبر و بوت [10] نتایج خود را در مورد تحلیل عددی نانولوله‌های کربنی برای دیواره موجدار در کانال منحنی با انتقال حرارت را بدین شکل منتشر کردند: (الف) گرادیان فشار در مرکز کانال در مقایسه با دیواره‌ها بیشتر است. گرادیان فشار به‌طور مستقیم با عدد گراشف و نرخ جریان و به‌طور معکوس با کمیت انحنا در ارتباط است. (ب) افزایش فشار با عدد گراشف به‌طور مستقیم در ارتباط است و تغییرات آن در نانوسیال آب - مس نسبت به آب خالص سریع‌تر می‌باشد. ندیم و شاهزادی [11] در سال 2015 به بررسی جریان دیواره موجدار برای یک نانوسیال دوفازی درون یک کانال انحنادار پرداختند. آنها به تأثیر اندازه انحنای کانال بر پروفیل سرعت، دما و غلظت نانوذره پرداختند.

اولین بررسی‌ها راجع به میدان مغناطیسی القائی روی جریان موجدار توسط پاولوف و ویشنیاکوف [12] در سال 1972 ارائه و پس از آن بیشتر مطالعات جریان موجدار در کانال‌ها و لوله‌های مستقیم متمرکز گردید. بااین‌حال هندسه اکثر مجراهای فیزیولوژیکی و شبکه‌های شریانی[3] به‌صورت منحنی می‌باشد. آگراوال و انورالدین [13] در سال 1984 اثر میدان مغناطیسی روی جریان خون درون یک کانال با دیواره‌های انعطاف‌پذیر را با استفاده از یک مدل ساده ریاضی و فرض طول‌موج بلند بررسی کردند. آنها مشاهده کردند که برای جریان خون داخل عروقی که مبتلا به بیماری‌هایی نظیر تنگی عروق هستند، اثر میدان مغناطیسی می‌تواند به‌عنوان یک محرک در پمپاژ خون به کار گرفته شود. پاندی و تریپاتی [14] در سال 2009 اثر میدان مغناطیسی را روی جریان موجدار سیال لزج در داخل لوله استوانه‌ای با طول محدود بررسی کرد. نتایج نشان داد که کمیت هیدرودینامیک مغناطیسی، سیال را بیشتر در معرض جریان برگشتی قرار می‌دهد. سریناواس و کوتانداپانی [15] در سال 2009 اثر انتقال حرارت و انتقال جرم را روی یک جریان موجدار دارای میدان مغناطیسی درون یک کانال با محیط متخلخل تحت فرض طول موج بلند و عدد رینولدز کوچک مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها مشاهده کردند اندازه گردابه نسبی با افزایش عدد هارتمن کاهش و دما با افزایش تخلخل محیط متخلخل، افزایش می‌یابد. نورین و همکاران [16] در سال 2015 جریان فشاری هیدرودینامیک مغناطیسی نانوسیال را در یک کانال منحنی بررسی کردند. آن‌ها مشاهده کردند که تقارن پروفیل‌های نیروی مغناطیسی، میدان مغناطیسی القایی محوری و سرعت براثر انحنا از بین می‌رود.

شهزاد و همکاران [17] در سال 2015 نتایج حاصل از بررسی جریان موجدار در یک کانال منحنی همراه با میدان مغناطیسی متغیر در راستای شعاعی را این گونه ارائه دادند که گرادیان فشار جریان در کانال منحنی در مقایسه با کانال مستقیم کم‌تر است. فکور و همکاران [18] در سال 2015 انتقال حرارت و جریان نانوسیال دورن کانال صاف با دیواره متخلخل در حضور میدان مغناطیسی را مورد بررسی قرار دارند. نتایج نشان داد که با افزایش عدد هارتمن، سرعت جریان نانوسیال داخل کانال کاهش و همچنین بیشترین مقدار دما نیز افزایش می‌یابد.

در این مقاله برای نخستین بار جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در محیطی متخلخل و درکانال منحنی با دیواره موجدار متحرک به‌همراه چشمه حرارتی داخلی مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به توضیح است که بافتها و نسوج بافتی معمولا متشکل از محیط‌هایی متخلل هستند که سیالات زیستی و فیزیولوژیکی می‌بایست از درون آنها عبور کنند. مطالعه میدان مغناطیسی و اثرات آن نیز که اخیراً به شکل گسترده‌ای مورد توجه محققان قرار گرفته است، به دلیل یکی از کاربردهای آن یعنی انتقال دارو در داخل نسوج بافتی و هدایت داروهای خاص به بخش هدف، می‌باشد. در این مطالعه ابتدا معادلات حاکم بر جریان سیال معرفی و سپس به کمک روش عددی خطی‌سازی نیوتن و جعبه‌ای کلر گسسته می‌گردند. درنهایت معادلات گسسته‌شده به‌کمک یک الگوریتم محاسباتی ماتریس‌های سه‌قطری بلوکی حل و نتایج گزارش می‌شوند. در این مطالعه، اثر چشمه حرارتی، نفوذپذیری و عدد تخلخل محیط روی پروفیل سرعت، دما، تابع نیروی مغناطیسی، گرادیان فشار و عدد ناسلت متوسط مورد بررسی قرار می‌گیرد.

2- تعریف هندسه مسأله

در این مطالعه، یک کانال منحنی دوبعدی که با نانوسیال تراکم‌ناپذیر پر شده است مطابق شکل 1 در نظر گرفته می‌شود. مرکز این کانال O و شعاع متوسط آن R می‌باشد که دیواره آن به صورت یک موج سینوسی با سرعت c حرکت می‌کند. مختصات استوانه‌ای$(\bar{R},\bar{X})$ برای کانال در نظر گرفته می‌شود که $\bar{X}$ راستای انتشار موج و $\bar{R}$ عمود بر آن است. میدان مغناطیسی در راستای شعاعی با شدت $H_0^* = H_0R^*/(R^*+\bar{R})$ (که در آن H_0 میدان مغناطیسی ثابت است) و چشمه حرارتی با قدرت Q_0 به کانال اعمال می‌شوند. بنابراین معادله برداری میدان مغناطیسی اعمال شده روی کانال با

[1] Reflux
[2] Trapping
[3] Arterial network

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.10.37.5]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.10.37.5]

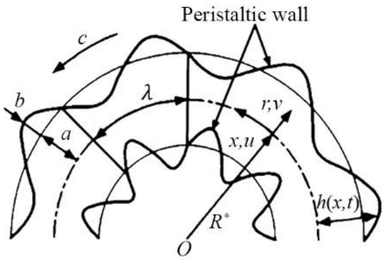


Fig. 1 Schematic diagram of the problem

شکل 1 تصویر شماتیک هندسه مسأله

دیواره موجدار متحرک به صورت $H(H_0^*+\bar h_{\bar r}\,(\bar R,\bar X,\bar t),\bar h_{\bar x}\,(\bar R,\bar X,\bar t),0)$ نوشته می‌شود. همچنین معادله حرکت دیواره کانال توسط رابطه (1) بیان می‌گردد.

$$\bar h(\bar X,\bar t)=a+b\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\bar X-c\bar t) \tag{1}$$

در اینجا λ طول موج، a نصف عرض کانال، $\bar t$ زمان و b دامنه موج می‌باشد. همچنین کمیت‌های $\bar V$ و $\bar U$ به ترتیب مولفه‌های سرعت در راستای شعاعی ($\bar R$) و راستای محوری ($\bar X$) برای ناظر مستقر در دستگاه مختصات ساکن می‌باشند. در نتیجه میدان سرعت را می‌توان به صورت $V=[\bar V(\bar R,\bar X,\bar t),\bar U(\bar R,\bar X,\bar t),0]$ نمایش داد.

3- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر مسأله شامل پیوستگی، ممنتوم (در دو راستای شعاعی و محوری) و انرژی می‌باشد که به ترتیب به‌صورت رابطه‌های (2) تا (5) بیان می‌شود [23-19,16]:

$$\frac{\partial\bar V}{\partial\bar R}+\left(\frac{R^*}{R^*+\bar R}\right)\frac{\partial\bar U}{\partial\bar X}+\frac{\bar V}{R^*+\bar R}=0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\rho_{nf}\left(\frac{1}{\bar\varepsilon}\frac{\partial\bar V}{\partial\bar t}+\frac{1}{\bar\varepsilon^2}\left[\bar V\frac{\partial\bar V}{\partial\bar R}+\frac{R^*\bar U}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar V}{\partial\bar X}-\frac{\bar U^2}{R^*+\bar R}\right]\right)\\
&=\Bigg(-\frac{\partial\bar p}{\partial\bar R}+\frac{2\mu_{\mathrm{nf}}}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar V}{\partial\bar R}+2\mu_{\mathrm{nf}}\frac{\partial^2\bar V}{\partial\bar R^2}+\mu_{\mathrm{nf}}\left[\frac{R^*}{R^*+\bar R}\right]^2\frac{\partial^2\bar V}{\partial\bar X^2}\\
&\quad-\frac{3\mu_{\mathrm{nf}}R^*}{(R^*+\bar R)^2}\frac{\partial\bar U}{\partial\bar X}+\frac{\mu_{\mathrm{nf}}R^*}{R^*+\bar R}\frac{\partial^2\bar U}{\partial\bar R\partial\bar X}-\frac{2\mu_{\mathrm{nf}}}{(R^*+\bar R)^2}\bar V\Bigg)\\
&\quad-\frac{\mu_{\mathrm{nf}}}{\mathrm{K_p}}\bar V-\frac{\mu_{\mathrm{e}}}{2}\frac{\partial H^{+2}}{\partial\bar R}+\mu_e\Bigg(-\frac{(R^*H_0)^2}{(R^*+\bar R)^3}+\frac{R^*H_0}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar h_{\bar r}}{\partial\bar R}\\
&\quad-\frac{R^*H_0}{(R^*+\bar R)^2}\bar h_{\bar r}+\frac{\partial\bar h_{\bar r}}{\partial\bar R}\bar h_{\bar r}+\frac{R^*}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar h_{\bar r}}{\partial\bar X}\bar h_{\bar x}-\frac{\bar h_{\bar x}^2}{R^*+\bar R}\Bigg)
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\rho_{\mathrm{nf}}\left(\frac{1}{\bar\varepsilon}\frac{\partial\bar U}{\partial\bar t}+\frac{1}{\bar\varepsilon^2}\left[\bar V\frac{\partial\bar U}{\partial\bar R}+\frac{R^*\bar U}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar U}{\partial\bar X}+\frac{\bar U\bar V}{R^*+\bar R}\right]\right)\\
&=\Bigg(-\frac{R^*}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar p}{\partial\bar X}+\frac{\mu_{\mathrm{nf}}R^*}{R^*+\bar R}\frac{\partial^2\bar V}{\partial\bar R\partial\bar X}+\frac{3\mu_{\mathrm{nf}}R^*}{(R^*+\bar R)^2}\frac{\partial\bar V}{\partial\bar X}\\
&\quad-\frac{\mu_{\mathrm{nf}}}{(R^*+\bar R)^2}\bar U+\mu_{\mathrm{nf}}\frac{\partial^2\bar U}{\partial\bar R^2}+2\mu_{\mathrm{nf}}\left[\frac{R^*}{R^*+\bar R}\right]^2\frac{\partial^2\bar U}{\partial\bar X^2}\\
&\quad+\frac{\mu_{\mathrm{nf}}}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar U}{\partial\bar R}\Bigg)-\frac{\mu_{\mathrm{nf}}}{\mathrm{K_p}}\bar U-\mu_{\mathrm{e}}\Bigg(\frac{R^*H_0}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar h_{\bar x}}{\partial\bar R}+\frac{\partial\bar h_{\bar x}}{\partial\bar R}\bar h_{\bar r}\\
&\quad+\frac{R^*}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar h_{\bar x}}{\partial\bar X}\bar h_{\bar x}+\frac{R^*H_0}{(R^*+\bar R)^2}\bar h_{\bar x}+\frac{\bar h_{\bar r}\bar h_{\bar x}}{R^*+\bar R}\Bigg)\\
&\quad-\frac{\mu_{\mathrm{e}}}{2}\frac{R^*}{R^*+\bar R}\frac{\partial H^{+2}}{\partial\bar X}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar T}{\partial\bar t}+\frac{R^*\bar U}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar T}{\partial\bar X}+\bar V\frac{\partial\bar T}{\partial\bar R}\\
&=\alpha_{\mathrm{nf}}\left(\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar R^2}+\frac{1}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar T}{\partial\bar R}+\left[\frac{R^*}{R^*+\bar R}\right]^2\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar X^2}\right)+\left(\frac{\nu}{C_{\mathrm p}}\right)_{\mathrm{nf}}\bar\Phi\\
&\quad+\tau\bar\varepsilon\left(\mathrm{D_B}(\nabla\bar C\cdot\nabla\bar T)+\frac{\mathrm{D_T}}{T_{\mathrm m}}(\nabla\bar T\cdot\nabla\bar T)\right)+\frac{1}{(\rho C_{\mathrm p})_{\mathrm{nf}}}Q_0
\end{aligned} \tag{5}$$

در رابطه (5)، $\bar\Phi$ معرف جمله تلفات ویسکوز می‌باشد:

$$\begin{aligned}
\bar\Phi&=2\left(\frac{\partial\bar V}{\partial\bar R}\right)^2+2\left(\frac{R^*}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar U}{\partial\bar X}+\frac{\bar V}{R^*+\bar R}\right)^2\\
&\quad+\left(\frac{R^*}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar V}{\partial\bar X}-\frac{\bar U}{R^*+\bar R}\right)\left(\frac{\partial\bar U}{\partial\bar R}-\frac{\bar U}{R^*+\bar R}+\frac{R^*}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar V}{\partial\bar X}\right)\\
&\quad+\frac{\partial\bar U}{\partial\bar R}\left(\frac{\partial\bar U}{\partial\bar R}-\frac{\bar U}{R^*+\bar R}+\frac{R^*}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar V}{\partial\bar X}\right)
\end{aligned} \tag{6}$$

معادله انتقال حرارت به‌صورت رابطه (7) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar C}{\partial\bar t}+\frac{1}{\bar\varepsilon}\frac{R^*\bar U}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar C}{\partial\bar X}+\frac{1}{\bar\varepsilon}\bar V\frac{\partial\bar C}{\partial\bar R}\\
&=\mathrm{D_B}\left[\frac{\partial^2\bar C}{\partial\bar R^2}+\frac{1}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar C}{\partial\bar R}+\left(\frac{R^*}{R^*+\bar R}\right)^2\frac{\partial^2\bar C}{\partial\bar X^2}\right]\\
&\quad+\frac{\mathrm{D_T}}{T_{\mathrm m}}\left[\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar R^2}+\frac{1}{R^*+\bar R}\frac{\partial\bar T}{\partial\bar R}+\left(\frac{R^*}{R^*+\bar R}\right)^2\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar X^2}\right]
\end{aligned} \tag{7}$$

در روابط (3) تا (7)، اندیس nf معرف نانوسیال می‌باشد. همچنین در این روابط ρ چگالی، $\bar\varepsilon$ تخلخل محیط متخلخل، $\bar P$ فشار، μ لزجت دینامیکی، $\mathrm{K_P}$ نفوذپذیری محیط متخلخل، μ_e نفوذپذیری مغناطیسی، $\mathrm{H_0}$ میدان مغناطیسی ثابت، $\bar T$ دما، $\bar C$ غلظت، $\mathrm{D_T}$ ضریب پخش ترموفورتیک، $\mathrm{D_B}$ ضریب پخش براونی و g شتاب گرانش می‌باشد. همچین کمیت τ معرف نسبت ظرفیت گرمایی مخصوص نانوذرات به ظرفیت گرمایی مخصوص نانوسیال می‌باشد که به‌صورت رابطه (8) بیان می‌گردد.

$$\tau=\frac{(\rho C_{\mathrm p})_{\mathrm p}}{(\rho C_{\mathrm p})_{\mathrm{nf}}} \tag{8}$$

در اینجا به کمک رابطه (9)، مختصات متحرک موجدار $(\bar r,\bar x)$ در مقایسه با دستگاه مختصات ساکن $(\bar R,\bar X)$ تعریف می‌شود.

$$\bar x=\bar X-c\bar t,\quad \bar r=\bar R,\quad \bar u=\bar U-c,\quad \bar v=\bar V \tag{9}$$

برای ساده کردن روابط شماره (2) تا (9) کمیت‌های بدون بعد مطابق رابطه (10) تعریف می‌شوند. در کمیت‌های رابطه (10)، δ، p، Ω، γ، ϕ، Pr، Ec، Nb و Nt به‌ترتیب بیان‌گر طول موج، فشار، غلظت بدون بعد، دمای بدون بعد، تابع نیروی مغناطیسی، عدد پرانتل[1]، عدد اکرت[2]، پارامتر حرکت براونی و پارامتر حرکت ترموفرسیس می‌باشند. همچنین کمیت Gc معرف عدد بدون بعد غلظت، Gr معرف عدد گراشف می‌باشند. در اینجا M معرف عدد هارتمن[3]، Da معرف عدد دارسی[4]، ζ عدد بدون بعد چشمه حرارتی و ψ تابع جریان می‌باشند.

$$\begin{aligned}
&x=\frac{\bar x}{\lambda}, && r=\frac{\bar r}{a}, && p=\frac{a^2\bar p}{c\lambda\mu_{\mathrm{nf}}},\\
&k=\frac{R^*}{a}, && u=\frac{\bar u}{c}, && \bar h_{\bar x}=-H_0\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right),\\
&\delta=\frac{a}{\lambda}, && v=\frac{\bar v}{c}, && \Omega=\frac{\bar C-\bar C_0}{\bar C_1-\bar C_0},
\end{aligned}$$

[1] Prandtl Number
[2] Eckert Number
[3] Hartmann Number
[4] Darcy Number

$$\phi=\frac{\bar{\phi}}{H_0 a},\qquad u=-\frac{\partial\psi}{\partial r},\qquad \gamma=\frac{\bar{T}-\bar{T}_0}{\bar{T}_1-\bar{T}_0},$$
$$t=\frac{c\bar{t}}{\lambda},\qquad \mathrm{Da}=\frac{\mathrm{K_P}}{a^2},\qquad \mathrm{Ec}=\frac{c^2}{c_\mathrm{p}(\bar{T}_1-\bar{T}_0)},$$
$$\mathrm{Nt}=\frac{\tau \mathrm{D_T}(\bar{T}_1-\bar{T}_0)}{\nu_\mathrm{nf}T_\mathrm{m}},\qquad \mathrm{Pr}=\frac{(\mu C_\mathrm{p})_\mathrm{nf}}{k^*},$$
$$\zeta=\frac{Q_0 a^2}{(\bar{T}_1-\bar{T}_0)(\rho C_\mathrm{p}\nu)_\mathrm{nf}},\qquad \bar{h}_{\bar{r}}=\delta\frac{kH_0}{k+r}\frac{\partial\phi}{\partial x},$$
$$\mathrm{Gr}=\frac{g\beta a^2(\bar{T}_1-\bar{T}_0)}{\nu_\mathrm{nf}c},\qquad \mathrm{M}^2=\frac{a^2H_0^2\mu_\mathrm{e}^2\sigma}{\mu_\mathrm{nf}},$$
$$\mathrm{Gc}=\frac{g\beta a^2(\bar{C}_1-\bar{C}_0)}{\nu_\mathrm{nf}c},\qquad \mathrm{Nb}=\frac{\tau \mathrm{D_B}(\bar{C}_1-\bar{C}_0)}{\nu_\mathrm{nf}} \tag{10}$$

در این مقاله با درنظر گرفتن فرض طول‌موج بلند$0 \to \delta$ و با استفاده معادلات (9) و (10)، معادلات حاکم بر مسأله به شکل ساده شده و بدون بعد (11) تا (14) تبدیل می‌شوند:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{1}{k}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{k+r}{k}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}-\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{k(k+r)}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{k(k+r)}$$
$$-\frac{k+r}{k}\frac{1}{\mathrm{Da}}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial r}+1\right)+\frac{k+r}{k}(\mathrm{Gr}\gamma+\mathrm{Gc}\Omega)+\mathrm{M}^2E \tag{11}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}=0 \tag{12}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2}+\frac{1}{k+r}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)+\mathrm{Ec}\left[-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}-1\right)\right]^2$$
$$+\mathrm{Nb}\bar{\varepsilon}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial\gamma}{\partial r}+\mathrm{Nt}\,\bar{\varepsilon}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)^2+\zeta\ =0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r+k}\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2}+\frac{1}{r+k}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)=0 \tag{14}$$

در رابطه (11)، E بیانگر قدرت میدان الکتریکی می‌باشد که عبارت است از:

$$E=\left[\frac{k}{(k+r)}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{R_m}}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{k+r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right] \tag{15}$$

با عنایت به رابطه (12) که بیان می‌کند فشار تابعی از r نمی‌باشد، با مشتق‌گیری از رابطه (11) و حذف فشار، رابطه (16) حاصل می‌شود:

$$(k+r)\frac{\partial^4\psi}{\partial r^4}+2\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}+\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{k+r}-\frac{k+r}{\mathrm{Da}}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$
$$-\left[\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{(k+r)^2}+\frac{1}{\mathrm{Da}}\right]\frac{\partial\psi}{\partial r}-(\mathrm{Gr}\gamma+\mathrm{Gc}\Omega)$$
$$-(k+r)\left(\mathrm{Gr}\frac{\partial\gamma}{\partial r}+\mathrm{Gc}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)+\frac{1}{\mathrm{Da}}=\frac{1-\mathrm{M}^2k^2}{(k+r)^2} \tag{16}$$

در دستگاه مختصات ساکن، نرخ جریان حجمی به‌صورت$Q=\int_{-\bar{H}}^{\bar{H}}\bar{U}d\bar{R}$ تعریف می‌شود که در آن $\bar{H}$ تابعی از $\bar{t}$ و $\bar{X}$ می‌باشد. این رابطه در مختصات متحرک موجدار به صورت $F=\int_{-\bar{H}}^{\bar{H}}\bar{u}d\bar{r}$ نوشته می‌شود که در این حالت $\bar{H}$ تنها تابعی از x می‌باشد. با استفاده از رابطه (9)، ارتباط بین نرخ جریان حجمی در مختصات ساکن و متحرک به شکل $Q=F+2c\bar{H}$ خواهد شد. در مختصات ساکن، نرخ متوسط زمانی جریان حجمی در یک دوره زمانی T به صورت $\bar{Q}=1/T\int_0^T Qdt$ نوشته می‌شود با جایگذاری رابطه مقدار Q در این عبارت و انتگرال‌گیری از آن، رابطه ساده شده زیر به‌دست می‌آید [20]:

$$\bar{Q}=\bar{q}+2ca \tag{17}$$

با تعریف $\bar{q}$ در مختصات متحرک موجدار به‌صورت $\bar{q}=F/(ca)$ و نرخ جریان حجمی بدون بعد در مختصات ساکن به‌صورت , $Q=\bar{Q}/(ca)$ معادله ساده شده $Q=\bar{q}+2$ به‌دست می‌آید که $\bar{q}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{q}=-\int_{-h}^{h}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,dr=-[\psi(h)-\psi(-h)] \tag{18}$$

شرایط مرزی در مختصات متحرک موجدار برای حل معادلات به‌صورت رابطه (19) تعریف می‌شود:

در $\mathrm{r=h=-1-\alpha(cos2\pi x)}$

$$\psi=+\frac{q}{2},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial r}=1,\qquad \gamma=0,\qquad \phi=0,\qquad \Omega=0$$

در $\mathrm{r=h=+1+\alpha(cos2\pi x)}$

$$\psi=-\frac{q}{2},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial r}=1,\qquad \gamma=0,\qquad \phi=0,\qquad \Omega=0 \tag{19}$$

پس از حل معادلات و به‌دست آوردن مقدار ψ، با جایگذاری این مقدار در رابطه (11) و همچنین استفاده از رابطه (20) می‌توان گرادیان فشار را محاسبه کرد [16].

$$\Delta P_\lambda=\int_0^1\left(\frac{dp}{dx}\right)_{r=0}dx \tag{20}$$

برای محاسبه عدد ناسلت محلی می‌توان از عبارت $\mathrm{Nu_x}=-\partial\gamma/\partial r$ استفاده کرده و با استفاده از عدد ناسلت محلی، عدد ناسلت متوسط به‌شکل رابطه (21) تعریف می‌گردد [21]:

$$\mathrm{Nu_{ave}}=\int_0^1\mathrm{Nu_x}\,dx \tag{21}$$

4- گسسته‌سازی معادلات و الگوریتم حل مسئله

برای حل مسئله، باید رابطه‌های (13)، (14) و (16) با توجه به شرایط مرزی ارائه شده، به‌صورت همزمان حل شوند. در این مقاله، برای حل عددی از زبان برنامه‌نویسی C + + استفاده شده است. الگوریتم این برنامه عددی براساس روش خطی‌سازی نیوتن و جعبه‌ای کلر می‌باشد [24]. در گسسته‌سازی روابط ابتدا با تعریف متغیرهایی دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تشکیل می‌گردد سپس با استفاده از تقریب تفاضل محدود مرکزی می‌توان دستگاه معادلات دیفرانسیل را گسسته‌سازی نمود. از آن‌جا که روابط به‌دست آمده در این قسمت در گام $n+1$ تقریب زده می‌شوند، می‌توان با به‌کارگیری روش خطی‌سازی نیوتن، آن را به مقادیر متناظرشان در گام n و یک مقدار خطایی از جنس خود متغیر تعریف نمود، به عنوان مثال $\psi_k^{n+1}=\psi_k^n+\delta\psi_k^n$ و $u_k^{n+1}=u_k^n+\delta u_k^n$ [25]. سپس در تحلیل عددی، معیار همگرایی را کوچک شدن تمام خطاها به‌طور هم‌زمان از یک مقدار مشخص در نظر گرفته خواهد شد. به عنوان مثال برای معادله (16) که بیان‌گر معادله حرکت می‌باشد، $\vec{\delta}_j^n$ به‌صورت رابطه (22) تعریف می‌شود:

$$\vec{\delta}_j^n=\left[\delta\psi_j^n\quad \delta u_j^n\quad \delta v_j^n\quad \delta w_j^n\right]^\mathrm{T} \tag{22}$$

که $u=\partial\psi/\partial r$، $v=\partial u/\partial r=\partial^2\psi/\partial r^2$ و $w=\partial v/\partial r=\partial^3\psi/\partial r^3$. دستگاه جبری معادلات حاکم به‌دست آمده از گسسته‌سازی جعبه‌ای کلر را می‌توان به‌صورت ماتریسی مطابق رابطه (23) نشان داد:

$$A_j^n\vec{\delta}_{j-1}^n+B_j^n\vec{\delta}_j^n+C_j^n\vec{\delta}_{j+1}^n=\vec{R}_j^n \tag{23}$$

در روش جعبه‌ای کلر شکل کلی ماتریس‌های سه قطری به‌صورت ماتریس موجود در رابطه (24) و آرایه‌های ماتریس‌های C_j^n، B_j^n و A_j^n به‌ترتیب به‌صورت روابط (25) تا (27) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & A_j & B_j & C_j & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & A_N & B_N \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix}\vec{\delta}_1\\ \vec{\delta}_2\\ \vdots\\ \vec{\delta}_j\\ \vdots\\ \vec{\delta}_N\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\vec{R}_1\\ \vec{R}_2\\ \vdots\\ \vec{R}_j\\ \vdots\\ \vec{R}_N\end{pmatrix}^n \tag{24}$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.10.37.5]

$$A_j^n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \qquad 2 \le j \le j_{\max} \tag{25}$$

$$B_j^n=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \qquad 2 \le j \le j_{\max-1} \tag{26}$$

$$C_j^n=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \qquad 2 \le j \le j_{\max-1} \tag{27}$$

که برای درایه‌های این سه ماتریس می‌توان روابط (28) الی (30) را نوشت:

$$\begin{aligned} &a_{11}=-1, a_{12}=-\frac{h_j}{2}, a_{13}=0, a_{14}=0, \\ &a_{21}=0, a_{22}=0, a_{23}=-1, a_{24}=-\frac{h_j}{2}, \\ &a_{31}=0, a_{32}=0, a_{33}=0, a_{34}=0, \\ &a_{41}=0, a_{42}=0, a_{43}=0, a_{44}=0. \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &b_{11}=1, b_{12}=-\frac{h_j}{2}, b_{13}=0, b_{14}=0, \\ &b_{21}=0, b_{22}=0, b_{23}=1, b_{24}=-\frac{h_j}{2}, \\ &b_{31}=0, b_{32}=-\frac{h_{j+1}\left(\mathrm{M}^2k^2-1\right)}{2\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3}+\frac{h_{j+1}}{2\mathrm{Da}\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)}, \\ &b_{33}=\frac{h_{j+1}\left(\mathrm{M}^2k^2-1\right)}{2\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^2}-\frac{h_{j+1}}{2\mathrm{Da}}, b_{34}=-1+\frac{h_{j+1}}{k+r_{j-\frac{1}{2}}}, \\ &b_{41}=0, b_{42}=-1, b_{43}=-\frac{h_{j+1}}{2}, b_{44}=0. \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &c_{11}=0, c_{12}=0, c_{13}=0, c_{14}=0, \\ &c_{21}=0, c_{22}=0, c_{23}=0, c_{24}=0, \\ &c_{31}=0, c_{32}=-\frac{h_{j+1}\left(\mathrm{M}^2k^2-1\right)}{2\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3}+\frac{h_{j+1}}{2\mathrm{Da}\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)}, \\ &c_{33}=\frac{h_{j+1}\left(\mathrm{M}^2k^2-1\right)}{2\left(k+h_{j-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^3}-\frac{h_{j+1}}{2\mathrm{Da}}, c_{34}=1+\frac{h_{j+1}}{k+r_{j-\frac{1}{2}}}, \\ &c_{41}=0, c_{42}=1, c_{43}=-\frac{h_{j+1}}{2}, c_{44}=0. \end{aligned} \tag{30}$$

و در نهایت ماتریس $\vec{R}_j^n$ به‌صورت رابطه (31) تعریف می‌گردد:

$$\vec{R}_j^n=\left[r_j^n \quad s_j^n \quad x_{j+1}^n \quad t_{j+1}^n\right]^{\mathrm{T}} \qquad 2 \le j \le j_{\max-1} \tag{31}$$

که در این رابطه، عبارات r_j^n، s_j^n، x_{j+1}^n و t_{j+1}^n به‌ترتیب در روابط (32) تا (35) تعریف شده‌اند. لازم به توضیح است که ماتریس‌های سه قطری و آرایه‌های آن برای روابط (13) و (14) نیز به‌همین صورت به‌دست می‌آیند:

$$r_j^n=\psi_{j+1}^n-\psi_j^n+\frac{h_j}{2}\left(u_j^n+u_{j-1}^n\right), \tag{32}$$

$$s_j^n=v_{j+1}^n-v_j^n+\frac{h_j}{2}\left(w_j^n+w_{j-1}^n\right), \tag{33}$$

$$\begin{aligned} x_{j+1}^n=&\left(-1-\frac{h_{j+1}}{k+r_{j+\frac{1}{2}}}\right)w_{j+1}^n+\left(1-\frac{h_{j+1}}{k+r_{j+\frac{1}{2}}}\right)w_j^n \\ &-h_{j+1}\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{2\left(k+r_{j+\frac{1}{2}}\right)^2}-\frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)v_{j+1}^n \\ &-h_{j+1}\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{2\left(k+r_{j+\frac{1}{2}}\right)^2}-\frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)v_j^n \\ &+h_{j+1}\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{2\left(k+r_{j+\frac{1}{2}}\right)^3}+\frac{1}{k+r_{j+\frac{1}{2}}}\frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)u_{j+1}^n \\ &+h_{j+1}\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{2\left(k+r_{j+\frac{1}{2}}\right)^3}+\frac{1}{k+r_{j+\frac{1}{2}}}\frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)u_j^n \\ &+\left(\mathrm{Gr}-\left(\frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\right)\mathrm{Gc}\right)h_{j+1}\left(\frac{1}{k+r_{j+\frac{1}{2}}}\gamma_{j+\frac{1}{2}}+d\gamma_{j+\frac{1}{2}}\right) \\ &-\left(\frac{h_{j+1}\left(1-\mathrm{M}^2k^2\right)}{\left(k+r_{j+\frac{1}{2}}\right)^3}\right)-\frac{h_{j+1}}{k+r_{j+\frac{1}{2}}}\frac{1}{\mathrm{Da}} \end{aligned} \tag{34}$$

$$t_{j+1}^n=u_j^n-u_{j+1}^n+\left(v_{j+1}^n+v_j^n\right)\frac{h_j}{2} \tag{35}$$

5- اعتبار سنجی

برای بررسی صحت برنامه عددی نوشته شده، نتایج به‌دست آمده با عدد گزارش‌شده توسط نورین و همکاران [16] (برای حالت ساده‌تر محیط بدون تخلخل و بدون حضور چشمه حرارتی) مقایسه شده است. بدین منظور پروفیل سرعت بدون بعد برای شرایط $\mathrm{M}=1.8$، $\theta=-3$، $\mathrm{Nt}=0.1$، $k=6$، $\mathrm{Nb}=0.3$، $\mathrm{Ec}=1$، $\mathrm{Pr}=3.97$، $\mathrm{Gc}=1$، $\mathrm{Gr}=1$ و موقعیت x=1 در شکل 2 و پروفیل دمای بی‌بعد برای شرایط کاری $\mathrm{M}=1$، $\theta=4$، $\mathrm{Nt}=0.1$، $k=7$، $\mathrm{Nb}=0.3$، $\mathrm{Ec}=1$، $\mathrm{Pr}=21$، $\mathrm{Gc}=1$، $\mathrm{Gr}=1$ و موقعیت $x=1$ در شکل 3 نمایش داده شده است. همان‌طور که در این دو شکل مشاهده می‌شود، الگوریتم عددی حاضر، قابلیت و دقت لازم برای حل جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار بدون در نظر گرفتن چشمه حرارتی و محیط متخلخل را داراست.

6- نتایج عددی

عبور جریان الکتریکی از داخل سیم باعث می‌شود که میدان مغناطیسی حول سیم حامل جریان ایجاد گردد بنابراین با داشتن سیم حامل جریان می‌توان میدان مغناطیسی تولید کرد که جهت این میدان مغناطیسی طبق قانون دست راست مشخص می‌گردد.

هنگامی‌که جریان داخل کانال حاوی نانوذرات مغناطیسی تحت تأثیر میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرد روی پروفیل سرعت جریان داخل کانال اثر می‌گذارند. همان‌طور که در شکل 4 (الف) مشاهده می‌شود با افزایش عدد هارتمن، سرعت کاهش می‌یابد. هدف از تزریق نانوذرات در سیال، کاهش انتقال حرارت جابه‌جایی و افزایش انتقال حرارت هدایتی می‌باشد. با استفاده از رابطه بدون بعد دما و با افزایش عدد بدون بعد دما، میزان انتقال حرارت کاهش می‌یابد (شکل 4 (ب)). درنتیجه می‌توان این‌گونه بیان کرد که میدان مغناطیسی تأثیر بسزایی روی میدان جریان و تبع آن روی میزان انتقال حرارت دارد، زیرا وجود میدان مغناطیسی سبب به وجود آمدن نیروی لورنتز در میدان جریان می‌شود و این نیرو در حالت کلی سبب کاهش جریان جابجایی و میزان انتقال حرارت می‌شود. همان‌طور که در شکل 4 (ج) و رابطه بدون بعد $\phi=\bar{\phi}/H_0a$ مشخص می‌باشد با افزایش شدت میدان مغناطیسی (H_0)، تابع نیروی مغناطیسی در جهت شعاع نیز کاهش می‌یابد.

چگونگی افزایش گرادیان فشار با افزایش عدد هارتمن در شکل 5 (الف) نمایش داده شده است. این بدین معنی است که با اعمال میدان مغناطیسی

بزرگ به میدان جریان، گرادیان فشار بزرگ‌تری برای عبور جریان نیاز است؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که فشار سیال می‌تواند با به کار بردن مناسب قدرت میدان مغناطیسی کنترل شود. این پدیده در طول عمل جراحی برای کنترل خون‌ریزی بیش از حد مفید خواهد بود. همان‌طور که در شکل‌های 5 (ب و ج) مشاهده می‌شود با افزایش عدد هارتمن گردابه‌های نسبی که در حالت موج‌دار مشاهده می‌گردد با قدرت بیشتری در دیواره خارجی تشکیل می‌گردد. همچنین این گردابه‌های نسبی با افزایش عدد هارتمن از دیواره خارجی به سمت مرکز کانال متمایل می‌گردند و این امر سبب می‌شود که جریان به سختی از مقطع مشخص شده عبور کند.

در جدول 1، اثر عدد هارتمن روی عدد ناسلت متوسط نیز بیان شده است. همان‌طور که مشخص می‌باشد، افزایش عدد هارتمن سبب کاهش عدد ناسلت متوسط می‌شود.

شکل‌های 6 و 7 به بررسی اثر چشمه حرارتی بر عملکرد کانال موج‌دار می‌پردازد. همان‌طور که در شکل 6 (الف) مشاهده می‌شود با افزایش قدرت

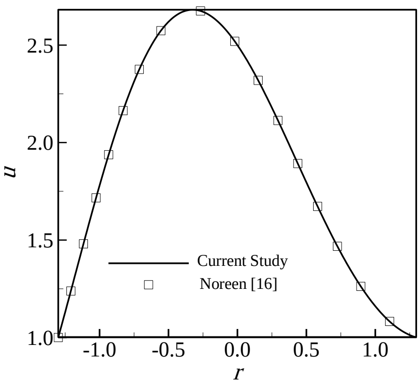


Fig. 2 Profile of dimensionless velocity for $\mathrm{M}=1.8, \theta=-3, \mathrm{Nt}=0.1, \mathrm{Nb}=0.3, x=1, \mathrm{Ec}=1, \mathrm{Pr}=3.97, \mathrm{Gr}=1, \mathrm{Gc}=1, k=6$.

شکل 2 پروفیل سرعت بدون بعد در شرایط: $\mathrm{M}=1.8, \theta=-3, \mathrm{Nt}=0.1, \mathrm{Nb}=0.3, x=1, \mathrm{Ec}=1, \mathrm{Pr}=3.97, \mathrm{Gr}=1, \mathrm{Gc}=1, k=6$

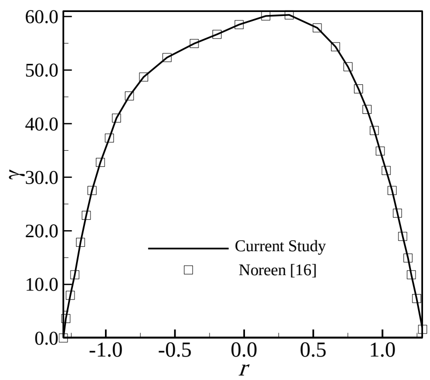


Fig. 3 Profile of dimensionless temperature for $\mathrm{M}=1, \theta=4, \mathrm{Nt}=0.1, \mathrm{Nb}=0.3, x=1, \mathrm{Ec}=1, \mathrm{Pr}=21, \mathrm{Gr}=1, \mathrm{Gc}=1, k=7$

شکل 3 پروفیل دمای بدون بعد در شرایط: $\mathrm{M}=1, \theta=4, \mathrm{Nt}=0.1, \mathrm{Nb}=0.3, x=1, \mathrm{Ec}=1, \mathrm{Pr}=21, \mathrm{Gr}=1, \mathrm{Gc}=1, k=7$

جدول 1 تأثیر عدد هارتمن روی عدد ناسلت متوسط

Table 1 Effect of Hartmann number on average Nusselt number

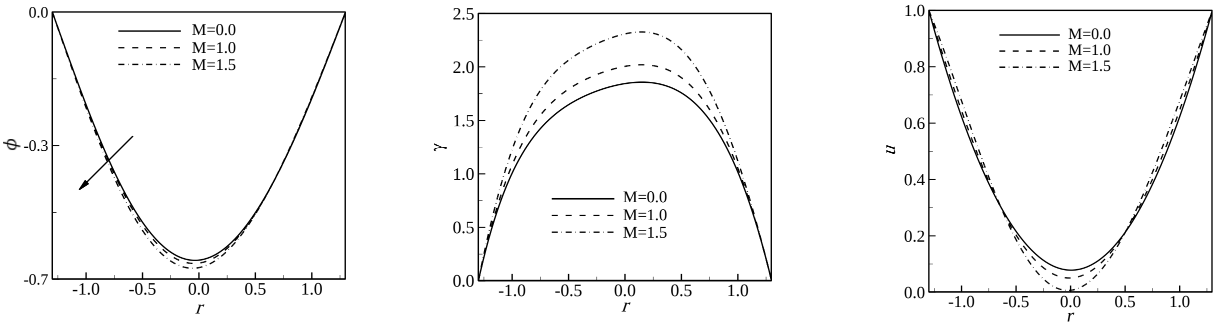
M	1.5	1	0
Nu	3.34181	3.36018	3.39251

چشمه حرارتی، مقدار سرعت در نزدیک خط مرکزی کانال کاهش می‌یابد و به سمت دیواره خارجی متمایل می‌گردد. مطابق شکل 6 (ب) مشاهده می‌گردد که با افزایش قدرت چشمه حرارتی، پروفیل توزیع دمای بدون بعد افزایش پیدا می‌کند در نتیجه، دما کاهش و متعاقباً انتقال حرارت کاهش می‌یابد. با دقت در نمودار می‌توان دریافت که اختلاف دمای بدون‌بعد در دو نقطه خاص در کانال با افزایش چشمه حرارتی، افزایش می‌یابد؛ بنابراین با افزایش چشمه حرارتی اختلاف دما در همان نقاط کاهش می‌یابد در نتیجه انتقال حرارت رو به کاهش خواهد بود. همان‌طور که از رابطه (15) مشخص است تغییر قدرت چشمه حرارتی، تأثیری در تابع نیروی مغناطیسی و میدان مغناطیسی القا شده محوری نخواهد داشت که این موضوع نیز در شکل 6 (ج) کاملا مشهود می‌باشد. همان‌طور که در شکل 7 (الف) مشخص می‌باشد با افزایش قدرت چشمه حرارتی، گرادیان فشار افزایش می‌یابد. ولی این امر موجب کاهش اندازه گردابه‌های نسبی حالت موج‌دار می‌گردد (شکل7 (ب و ج)) که این امر سبب عبور ساده‌تر جریان از مقطع درنظر گرفته شده، می‌شود. سرانجام همان‌طور که از جدول 2 مشاهده می‌شود، با افزایش قدرت چشمه حرارتی، مقدار عدد ناسلت متوسط نیز افزایش می‌یابد.

نفوذپذیری خاصیتی از محیط متخلخل می‌باشد که با نماد $\mathrm{K_p}$ نشان داده می‌شود و عدد بدون بعد آن به صورت $\mathrm{Da}=\mathrm{K_p}/a^2$ تعریف می‌شود، که عدد دارسی نام دارد. بنابراین همان‌طور که مشخص است نفوذپذیری محیط متخلخل و عدد دارسی رابطه مستقیم با هم دارند. هرچه مقدار این کمیت برای یک محیط بیشتر باشد، عبور سیال از آن نیز آسان‌تر است. این کمیت یک خاصیت محیط متخلخل است و از لزجت یا چگالی سیال مستقل می‌باشد. بنابراین با افزایش مقدار نفوذپذیری (در نتیجه عدد دارسی)، مطابق شکل 8 (الف) سرعت سیال داخل کانال کاهش می‌یابد. همان‌طور که از شکل 8 (ب) مشخص می‌باشد، هرچه که مقدار نفوذپذیری محیط افزایش پیدا می‌کند، توزیع دمای بدون بعد افزایش می‌یابد. از دیگر نکات حائز اهمیت در این بخش می‌توان به کاهش تابع نیروی مغناطیسی در طول کانال در نیمه پائینی کانال اشاره کرد که می‌توان آن را در شکل 8 (ج) به خوبی مشاهده نمود. مطابق شکل 9 (الف) می‌توان مشاهده کرد که با افزایش عدد دارسی، گرادیان فشار افزایش می‌یابد. با توجه به گردابه‌های نسبی که در اثر افزایش عدد دارسی و در حالت موج‌دار شکل گرفته‌اند، می‌توان به این نتیجه رسید که در محیطی با نفوذپذیری پایین امکان تشکیل گردابه نسبی بسیار پایین می‌باشد. با افزایش نفوذپذیری محیط، گردابه‌های نسبی تشکیل می‌شود و هرچه که مقدار نفوذپذیری افزایش می‌یابد این گردابه نسبی به سمت مرکز لوله گرایش پیدا می‌کند و سبب می‌شود که حرکت سیال از مقطع مشخص شده به سختی صورت می‌گیرد (شکل 9 (ب و ج)). در نهایت تأثیر عدد دارسی روی عدد ناسلت متوسط در جدول 3 آمده است. مشاهده می‌شود که با افزایش عدد دارسی، عدد ناسلت نیز روند کاهش پیدا می‌کند.

شکل 10 اثر عدد هارتمن، چشمه حرارتی و عدد دارسی را روی عدد ناسلت محلی نشان می‌دهد. مطابق شکل 10 (الف) می‌توان مشاهده کرد که با افزایش عدد هارتمن، عدد ناسلت محلی در طول کانال کاهش می‌یابد. با افزایش قدرت چشمه حرارتی عدد ناسلت محلی در طول لوله افزایش و با افزایش عدد دارسی عدد ناسلت محلی در طول لوله کاهش می‌یابد (شکل 10 (ب) و (ج)).

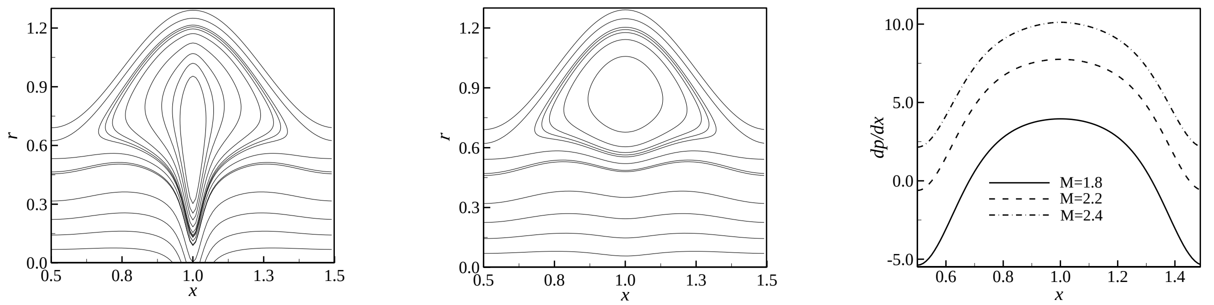
در ادامه به بررسی تغییرات افزایش فشار یعنی ΔP_λ با نرخ جریان حجمی θ برای پارامترهای مختلف پرداخته می‌شود. این نمودارها همانند



(ج)   (ب)   (الف)

Fig. 4 Profile of a) dimensionless velocity, b) dimensionless temperature, c) the magnetic force for different values of Hartmann number in $k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \mathrm{Ec} = 1, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$

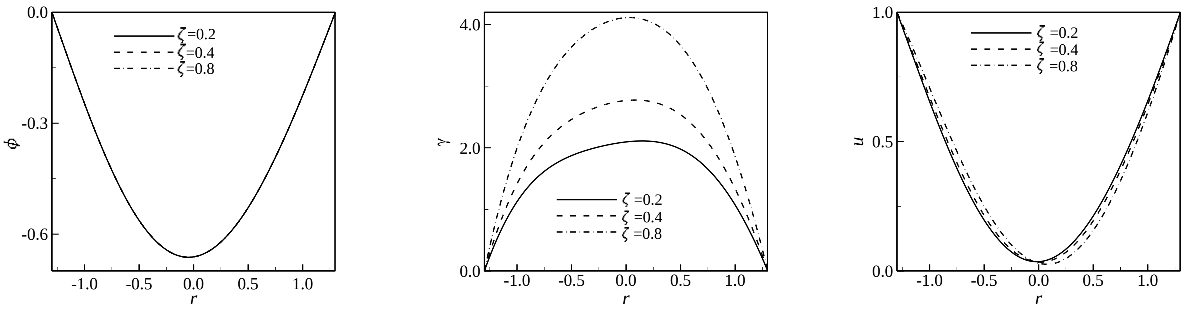
شکل 4 پروفیل (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دمای بدون بعد، (ج) تابع نیروی مغناطیسی برای مقادیر مختلف عدد هارتمن در شرایط: $k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \mathrm{Ec} = 1, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$



(ج)   (ب)   (الف)

Fig. 5 a) Variation of pressure gradient and streamlines for b) M=2.2, c) M=2.4 in $k = 100, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Nt} = 0.3, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2, \mathrm{Da} = 100, \alpha = 0.3$

شکل 5 (الف) نمودار گرادیان فشار و خطوط جریان در (ب) M = 2.2، (ج) M = 2.4 در شرایط: $k = 100, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Nt} = 0.3, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2, \mathrm{Da} = 100, \alpha = 0.3$



(ج)   (ب)   (الف)

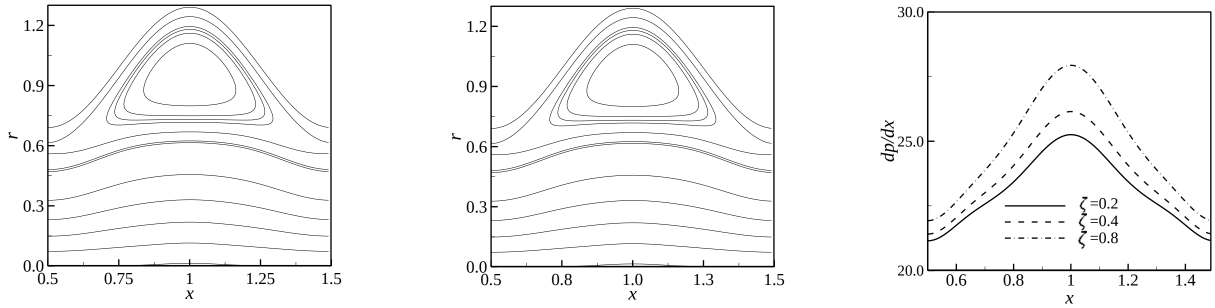
Fig. 6 Profile of a) dimensionless velocity, b) dimensionless temperature, c) the magnetic force for different values of source term in $\mathrm{M} = 1.2, k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \mathrm{Ec} = 1, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$

شکل 6 پروفیل (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دمای بدون بعد، (ج) تابع نیروی مغناطیسی برای مقادیر مختلف چشمه حرارتی در شرایط: $\mathrm{M} = 1.2, k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{F} = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$

آنچه در شکل 11 دیده می‌شود به سه ناحیه مهم دسته‌بندی می‌گردند. به ناحیه اول با ویژگی $(\Delta P_\lambda > 0 , \theta > 0)$ در اصطلاح ناحیه پمپاژ موجدار گفته می‌شود. در این ناحیه مقدار دبی مثبت و گرادیان فشار نامطلوب می‌باشد. ناحیه دوم که در آن $(\Delta P_\lambda > 0 , \theta < 0)$ می‌باشد، ناحیه پمپاژ منفی می‌باشد که در آنجا گرادیان فشار نامطلوب و مقدار دبی منفی می‌باشد. ناحیه سوم که در آن $(\Delta P_\lambda < 0 , \theta > 0)$ می‌باشد، ناحیه پمپاژ افزوده یا پمپاژ کمکی گفته می‌شود. در ناحیه پمپاژ افزوده، گرادیان فشار به‌صورت مطلوب وجود دارد. همچنین خطی که روی آن $\Delta P_\lambda = 0$ می‌باشد را ناحیه پمپاژ آزاد می‌نامند. همان‌طور که در شکل 12 مشاهده می‌شود افزایش در مقدار عدد هارتمن موجب بیشتر شدن افزایش فشار در منطقه پمپاژ افزوده می‌گردد. همچـنین مطابق شکـل 13 افـزایش قدرت چشمه حرارتی سبب افـزایش در سرتاسر نواحی اعلام شده در خصوص افزایش فشار می‌گردد. هرچه که محیط دارای نفوذپذیری بیشتری باشد و مقدار عدد دارسی آن به‌سمت بی‌نهایت میل کند، سبب می‌شود که ΔP_λ به‌شدت در ناحیه اول افت کند، ولی در منطقه پمپاژ افزوده، موجب افزایش چشمگیری می‌گردد (شکل 14).

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.10.37.5]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.10.37.5]



(ج) (ب) (الف)

Fig. 7 a) Variation of dp/dx, and streamlines for b) $\zeta = 0.2$, c) $\zeta = 0.8$ in $k = 100, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Nt} = 0.3, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2, \mathrm{Da} = 100, \alpha = 0.3$

شکل 7 (الف) نمودار گرادیان فشار و خط جریان در (ب) $\zeta = 0.2$، (ج) $\zeta = 0.8$ در شرایط: $k = 100, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Nt} = 0.3, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2, \mathrm{Da} = 100, \alpha = 0.3$

جدول 2 تأثیر چشمه حرارتی روی عدد ناسلت متوسط

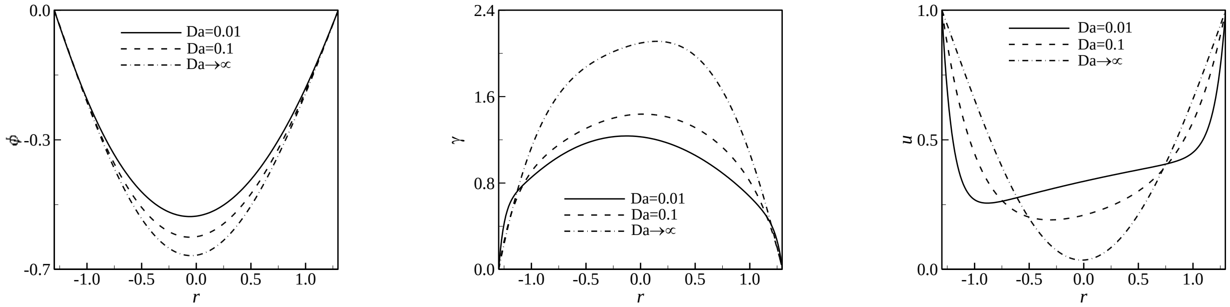
Table 2 Effect of source term on average Nusselt number

0.2	0.4	0.8	ζ
3.35025	4.11003	5.62959	Nu

جدول 3 تأثیر عدد دارسی روی عدد ناسلت متوسط

Table 3 Effect of Darcy number on average Nusselt number

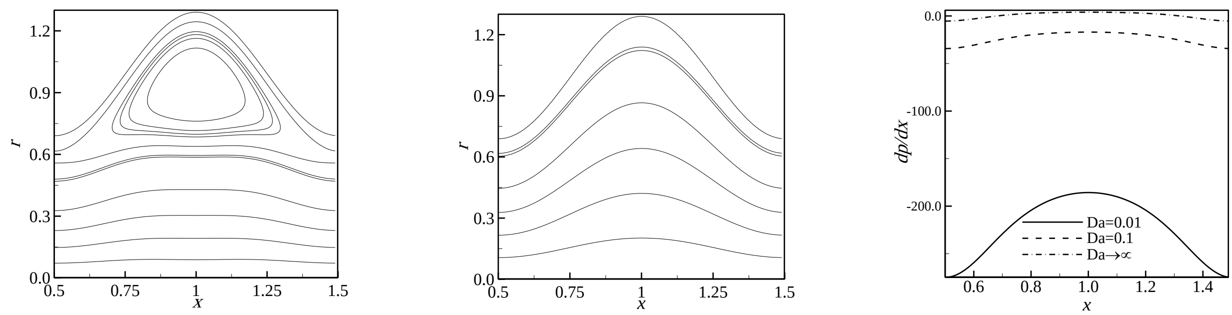
0.01	0.1	100	Da
5.40256	3.39546	3.35025	Nu



(ج) (ب) (الف)

Fig. 8 Profile of a) dimensionless velocity, b) dimensionless temperature, c) the magnetic force for different values of Darcy number in $\mathrm{M} = 1.2, k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \mathrm{Ec} = 1, F = -1, \zeta = 0.2, x = 1, \alpha = 0.3$

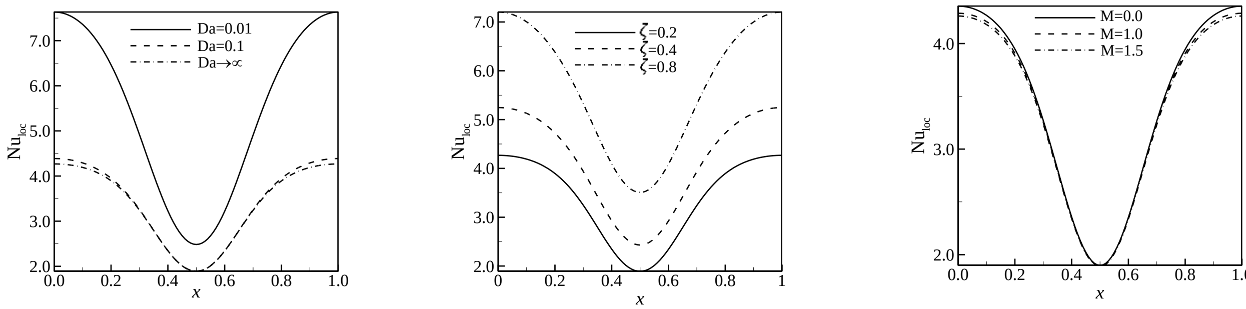
شکل 8 پروفیل (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دمای بدون بعد، (ج) تابع نیروی مغناطیسی برای مقادیر مختلف عدد دارسی در شرایط: $\mathrm{M} = 1.2, k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \mathrm{Ec} = 1, F = -1, \zeta = 0.2, x = 1, \alpha = 0.3$



(ج) (ب) (الف)

Fig. 9 a) Variation of dp/dx, and streamlines for b) $\mathrm{Da} = 0.01$, c) $\mathrm{Da} \to \infty$ in $k = 100, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Nt} = 0.3, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2, \alpha = 0.3$

شکل 9 (الف) نمودار گرادیان فشار و خط جریان در (ب) $\mathrm{Da} = 0.01$، (ج) $\mathrm{Da} \to \infty$ در شرایط: $k = 100, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Nt} = 0.3, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2, \alpha = 0.3$



(ج) (ب) (الف)

Fig. 10 a) Profile of Local Nusselt number for different values of Hartmann number in $k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \mathrm{Ec} = 1, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$

b) Profile of Local Nusselt number for different values of source term in $\mathrm{M} = 1.2, k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, Ec = 1, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$

c) Profile of Local Nusselt number for different values of of Darcy number in $\mathrm{M} = 1.2, k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \mathrm{Ec} = 1, F = -1, \zeta = 0.2, x = 1, \alpha = 0.3$

شکل 10 (الف) پروفیل عدد ناسلت محلی برای مقادیر مختلف عدد هارتمن در شرایط: $k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \mathrm{Ec} = 1, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$

(ب) پروفیل عدد ناسلت محلی برای مقادیر مختلف چشمه حرارتی در شرایط: $\mathrm{M} = 1.2, \mathrm{k} = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \mathrm{Ec} = 1, F = -1, \mathrm{Da} = 100, \mathrm{x} = 1, \alpha = 0.3$

(ج) پروفیل عدد ناسلت محلی برای مقادیر مختلف عدد دارسی در شرایط: $\mathrm{M} = 1.2, k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \mathrm{Ec} = 1, F = -1, \zeta = 0.2, x = 1, \alpha = 0.3$

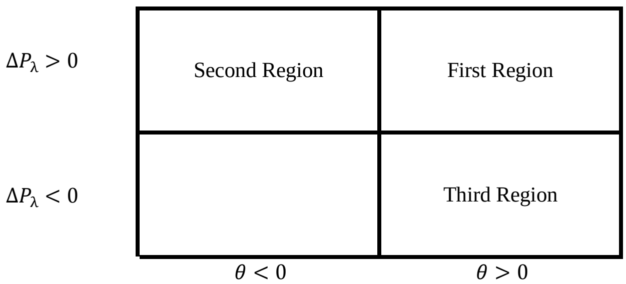


Fig. 11 Schematic diagram of pressure rise ΔP_λ

شکل 11 تصویر شماتیک ناحیه‌های افزایش فشار ΔP_λ

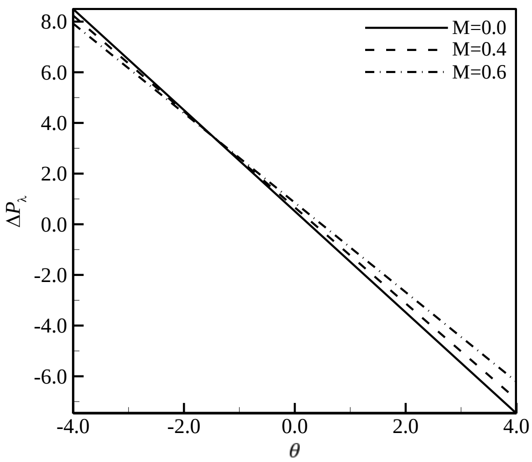


Fig. 12 Effect of Hartmann number on pressure rise ΔP_λ

شکل 12 اثر عدد هارتمن بر نمودار افزایش فشار ΔP_λ

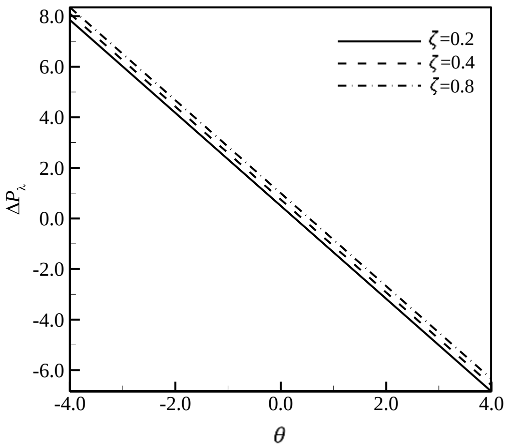


Fig. 13 Effect of Source term on pressure rise ΔP_λ

شکل 13 اثر قدرت چشمه حرارتی بر نمودار افزایش فشار ΔP_λ

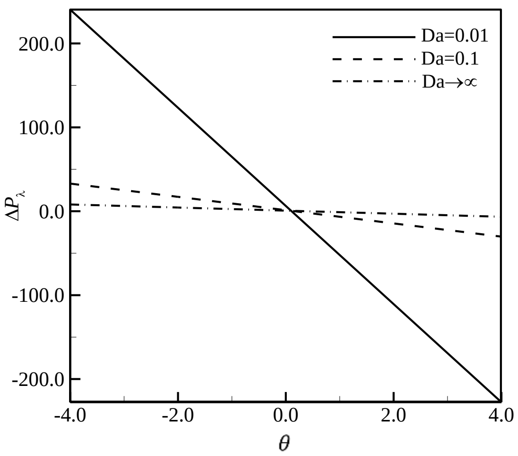


Fig. 14 Effect of Darcy number on pressure rise ΔP_λ

شکل 14 اثر عدد دارسی بر نمودار افزایش فشار ΔP_λ

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.10.37.5]

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی عددی جریان مگنتوهیدرودینامیک یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موجدار به همراه چشمه حرارتی در محیطی متخلخل پرداخته شد. معادلات حاکم ابتدا گسسته‌سازی شده و سپس برنامه‌ای با زبان برنامه‌نویسی C++ نوشته شد. سپس اثر کمیت‌های مختلفی نظیر عدد هارتمن، چشمه حرارتی، عدد دارسی و تخلخل محیط متخلخل مورد بررسی قرار گرفت.

- انتقال حرارت به دلیل وجود میدان مغناطیسی کاهش پیدا کرده و همچنین گرادیان فشار همراه با افزایش عدد هارتمن افزایش می‌یابد که از این موضوع می‌توان برای کنترل خون‌ریزی بیش از حد در طی عمل‌های جراحی استفاده کرد.
- افزایش قدرت چشمه حرارتی همراه با کاهش سرعت در خط مرکزی کانال در حالت موجدار می‌باشد همچنین باعث کاهش انتقال حرارت می‌گردد.
- افزایش عدد دارسی میزان نفوذپذیری و در نتیجه سرعت سیال را در حالت موجدار کاهش می‌دهد و از طرفی باعث کاهش انتقال حرارت و تابع نیروی مغناطیسی می‌گردد.
- با افزایش تخلخل در محیط، تقارن سرعت در مرکز کانال از بین رفته و همچنین انتقال حرارت افزایش می‌یابد. از طرفی این کمیت برروی کمیت‌های تابع میدان مغناطیسی و میدان القاشده محوری اثری ندارد.

8- فهرست علایم

a	نصف عرض کانال
b	دامنه موج
$\bar{C}$	غلظت
Da	عدد دارسی
D_B	ضریب پخش براونی
D_T	ضریب پخش ترموفورتیک
E	قدرت میدان الکتریکی
Ec	عدد اکرت
F	نرخ جریان حجمی در مختصات متحرک موجدار
g	شتاب گرانش
Gc	کمیت بدون بعد غلظت
Gr	عدد گراشف
H_0	میدان مغناطیسی ثابت
H_0^*	قدرت میدان مغناطیسی در راستای شعاعی
K_P	نفوذپذیری محیط متخلخل
M	عدد هارتمن
Nb	پارامتر حرکت براونی
Nt	پارامتر حرکت ترموفورسیس
Nu_{ave}	عدد ناسلت متوسط
Nu_x	عدد ناسلت محلی
P	فشار
Pr	عدد پرانتل
Q	نرخ جریان حجمی در دستگاه مختصات ساکن
Q_0	قدرت چشمه حرارتی
$\bar{T}$	دما
$\bar{t}$	زمان
$\bar{U}$	مولفه سرعت در راستای محوری
$\bar{V}$	مولفه سرعت در راستای شعاعی

علایم یونانی

λ	طول موج
$\bar{\varepsilon}$	تخلخل محیط متخلخل
γ	دمای بدون بعد
Ω	غلظت بدون بعد
μ	لزجت دینامیکی
μ_e	نفوذپذیری مغناطیسی
ρ	چگالی
τ	ظرفیت گرمایی مخصوص نانوسیال
Φ	تابع نیروی مغناطیسی
ζ	عدد بدون بعد چشمه حرارتی
$\bar{\Phi}$	تلفات ویسکوز
Ψ	تابع جریان

زیرنویس‌ها

ave	مقدار متوسط
nf	نانو سیال

9- مراجع

[1]N. Ali, M. Sajid, T. Javed, Z. Abbas, Heat transfer analysis of peristaltic flow in a curved channel, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, No. 15-16, pp. 3319-3325, 2010.

[2]M. Mustafa, S. Hina, T. Hayat, A. Alsaedi, Influence of wall properties on the peristaltic flow of a nanofluid: analytic and numerical solutions, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 55, No. 17-18, pp. 4871-4877, 2012.

[3] B. Seyfi, N. Fatoraei, Design and build a device for the peristaltic movement simulation in the body, *20th Annual International Conference of Mechanical Engineering* (*ISME2012)*, Faculty of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran, May 15-17, 2012. (in Persian فارسی)

[4]T. Latham, *Motion in a Peristaltic Pump*, MS thesis, ed: MIT-Press, Cambridge, Mass, USA, 1966.

[5]A. H. Shapiro, M. Y. Jaffrin, S. L. Weinberg, Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 37, No. 4, pp. 799-825, 1969.

[6] H. Lew, Y. Fung, C. Lowenstein, Peristaltic carrying and mixing of chyme in the small intestine (an analysis of a mathematical model of peristalsis of the small intestine), *Journal of Biomechanics*, Vol. 4, No.4, pp. 297-315, 1971.

[7]S. Takabatake, K. Ayukawa, A. Mori, Peristaltic pumping in circular cylindrical tubes: a numerical study of fluid transport and its efficiency, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 193, pp. 267-283, 1988.

[8] S. Takabatake, K. Ayukawa, Numerical study of two-dimensional peristaltic flows, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 122, pp. 439-465, 1982.

[9] M. Mishra, A. R. Rao, Peristaltic transport of a Newtonian fluid in an asymmetric channel, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, Vol. 54, No. 3, pp. 532–550, 2003.

[10]N. S. Akbar, A. W. Butt, Carbon nanotubes analysis for the peristaltic flow in curved channel with heat transfer, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 259, pp. 231-241, 2015.

[11] S. Nadeem, I. Shahzadi, Mathematical analysis for peristaltic flow of two phase nanofluid in a curved channel, *Communications in Theoretical Physics*, Vol. 64, No. 5, pp. 547, 2015.

[12]K. Pavlov, V. Vishnyakov, Peristaltic flow of a conductive liquid in a transverse magnetic field, Translated from *Magnitnaya Gidrodinamika*, Vol. 8, pp. 174-178, 1972.

[13]H. Agrawal, B. Anwaruddin, Ranchi Univ, Peristaltic flow of blood in a branch, *Ranchi University Mathematical Journal*, Vol. 15, pp. 111-121, 1984.

[14]S. Pandey, D. Tripathi, Influence of magnetic field on the peristaltic flow of a viscous fluid through a finite-length cylindrical tube, *Applied Bionics and Biomechanics*, Vol. 7, No. 3, pp. 169-176, 2010.

[15] S. Srinivas, M. Kothandapani, The influence of heat and mass transfer on MHD peristaltic flow through a porous space with compliant walls, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 213, No. 1, pp. 197–208, 2009.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.10.37.5]

[16] S. Noreen, M. Qasim, Z. Khan, MHD pressure driven flow of nanofluid in curved channel, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 393, pp. 490-497, 2015.

[17] S. A. Shehzad, F. M. Abbasi, T. Hayat, F. Alsaadi, G. Mousa, Peristalsis in a curved channel with slip condition and radial magnetic field, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 91, pp. 562–569, 2015.

[18] M. Fakour, A. Vahabzadeh, D. D. Ganji, Study of heat transfer and flow of nanofluid in permeable channel in the presence of magnetic field, *Propulsion and Power Research*, Vol. 4, No. 1, pp. 50–62, 2015.

[19]T. Hayat, M. U. Qureshi, Q. Hussain, Effect of heat transfer on the peristaltic flow of an electrically conducting fluid in a porous space, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, No. 4, pp. 1862-1873, 2009.

[20]N. Ali, M. Sajid, T. Hayat, Long wavelength flow analysis in a curved channel, *Zeitschrift für Naturforschung A*, Vol. 65, No. 3, pp. 191-196, 2010.

[21]M. Ahmed, N. Shuaib, M. Yusoff, A. Al-Falahi, Numerical investigations of flow and heat transfer enhancement in a corrugated channel using nanofluid, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, No. 10, pp. 1368-1375, 2011.

[22] A. Tanveer, T. Hayat, A. Alsaedi, Peristaltic flow of MHD Jeffery nanofluid in curved channel with convective boundary conditions: a numerical study, *Neural Computing and Applications*, (in press), 2017.

[23] A. Tanveer, T. Hayat, A. Alsaedi, B. Ahmad, Mixed convective peristaltic flow of Sisko fluid in curved channel with homogeneous-heterogeneous reaction effects, *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 233, pp. 131-138, 2017.

[24]R. H. Pletcher, J. C. Tannehill, D. Anderson, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* pp. 247-252, Third Edition, United States of America: CRC Press, 2012.

[25]M. E. Davis, *Numerical Methods and Modeling for Chemical Engineers*: Courier Corporation, pp. 130-147, First Edittion, New York: Dover Publications, 2013.