



پیشنهاد روابط تحلیلی جهت برآورد طول ابر کاواک طبیعی بر اساس عدد کاواک و عدد رینولدز

مهدی معرفت^{1*}، سهراب طهماسبی²، محمدرضا انصاری³

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی، 14115-111، maerefat@modares.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 13 بهمن 1394
پذیرش: 18 اسفند 1394
ارائه در سایت: 27 اردیبهشت 1395
کلید واژگان:
طول کاواک
عدد کاواک
مرتبه بزرگی متغیرها

در شرایطی که ابر کاواک تشکیل می‌گردد، محاسبه طول کاواک طبیعی حائز اهمیت می‌باشد. طول کاواک تابع عدد کاواک بوده و با استفاده از روابط ناشی از نتایج تجربی محاسبه می‌شود، که روابط متفاوتی می‌باشند و مبنای تحلیلی ندارند. همچنین در پیشینه تحقیقات روابطی وجود ندارد که بتوان طول کاواک را بر حسب عدد رینولدز بدست آورد و ارتباط بین عدد کاواک و عدد رینولدز را نشان دهد. در این تحقیق جهت بدست آوردن روابط تحلیلی مربوط به محاسبه طول کاواک طبیعی، با توجه به مدل انتقال جرم، معادله پیوستگی و معادله مومنتوم، براساس روش مرتبه بزرگی متغیرها، سه رابطه بدست آمده، رابطه تحلیلی اول مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد کاواک می‌باشد، که در آن نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت معکوس با ریشه عدد کاواک دارد. رابطه تحلیلی دوم مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد رینولدز می‌باشد، که در آن نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت مستقیم با ریشه عدد رینولدز دارد، رابطه تحلیلی سوم مربوط به محاسبه عدد کاواک نسبت به عدد رینولدز می‌باشد، که در آن عدد کاواک نسبت معکوس با عدد رینولدز دارد. با تطبیق نتایج کار حاضر با نتایج تجربی، ضرایب مجهول مربوط به روابط تحلیلی حاصل می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که روابط تحلیلی بدست آمده جایگزین مناسبی برای روابط تجربی می‌باشند. این روابط طول کاواک را بر حسب عدد کاواک و عدد رینولدز محاسبه و ارائه می‌دهند.

Analytical approach to estimate supercavity length based on Cavity and Reynolds Numbers

Mehdi Maerefat*, Sohrab Tahmasbi, Mohammad Reza Ansari

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

*P.O.Box 14115-111, Tehran, Iran, maerefat@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 02 February 2016
Accepted 09 March 2016
Available Online 16 May 2016

Keywords:
Cavity Length
Cavity Number
Order of Magnitude Method

ABSTRACT

Cavity length estimation is important as supercavity condition is generated. The natural cavity length is function of cavity number and is calculated by relations deduced from experimental results which are different from each other and are not driven from analytical approaches. Literature survey shows that correlations based on cavity length in relation with Reynolds and cavity numbers have not been attempted. The purpose of the present work is to estimate analytical based relations for cavity length with respect to mass transfer, continuity and momentum conservation equations. This attempt, which was conducted by order of magnitude method resulted in three relations. The first analytical based relation calculates cavity length versus cavity number. The obtained relation shows that cavity length is proportional to the inverse square root of cavity number. The second analytical relation calculates cavity length with respect to Reynolds number. It shows cavity length has a proportional relation to Reynolds square root. The third analytical relation considers cavity number with respect to Reynolds number. The third relation shows that cavity number has inverse relation to Reynolds number. Unknown coefficients values of the relations are obtained through comparison with the already existed experimental results. These analytical relations which are an appropriate alternative to experimental based relations estimate cavity length with respect to cavity and Reynolds number.

1- مقدمه

پدیده باعث سایش، خوردگی روی سطح و ایجاد ارتعاش و نویز در سیستم می‌گردد.

در کاربردهای دریایی و نظامی این پدیده بسیار مفید است و با تشکیل ابر کاواک می‌توان پسای اصطکاکی روی بدنه روندهای تند رو زیر سطحی را شدیداً کاهش داد. وقتی این پدیده شکل می‌گیرد، اطراف بدنه رونده توسط

کاواک یک پدیده فیزیکی است که در آن فشار سیال تا حد فشار بخار اشباع کاهش یافته و بخار آب حاصل می‌گردد. این پدیده در بسیاری از تجهیزات مکانیکی مانند پمپ‌ها، توربین‌ها، نازل‌ها و پروانه‌های دریایی اتفاق می‌افتد و اثر نامطلوبی بر روی کارایی تجهیزات فوق اعمال می‌کند. از طرف دیگر این

Please cite this article using:

M. Maerefat, S. Tahmasbi, M. R. Ansari, Analytical approach to estimate supercavity length based on Cavity and Reynolds Numbers, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 5, pp. 153-159, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Maerefat, S. Tahmasbi, M. R. Ansari, Analytical approach to estimate supercavity length based on Cavity and Reynolds Numbers, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 5, pp. 153-159, 2016 (in Persian)

دادند. چانسون [10] مکانیزم پراکندگی گاز دمشی که به واسطه گردآیدان فشار و تنش برشی هست را نشان دادند. وانگ و همکاران [11] روابط بین شکل کاواک و پارامترهای هندسی مربوط به کاواک را از به صورت عددی بررسی کردند و فرمول‌های تجربی جهت محاسبه طول و قطر حباب کاواک بر روی پرتابه‌های تحت تأثیر کاواک طبیعی ارائه نمودند. معرفت و همکاران [12] کاواک طبیعی را بر روی سه هندسه متفاوت شبیه‌سازی کردند و روابط مربوط به محاسبه طول کاواک سه هندسه را پس از شبیه‌سازی و صحنه سنجی ارائه نمودند.

در معادله دینامیک حباب، تغییرات شعاع حباب نسبت به زمان، فقط تابعی از تغییرات فشار داخل و خارج حباب می‌باشد و از ترم مشتق دوم تغییرات شعاع حباب، ترم کشش سطحی و ترم دمپینگ لزج صرف‌نظر گردیده است [13]. بدلیل اینکه تدوین و استخراج مدل‌های انتقال جرم از معادله پیوستگی به همراه ترم چشمه بطور کامل در پیشینه تحقیقات، بحث و بررسی نشده است، لذا مراحل استخراج مدل‌ها و فرضیات بکار رفته، با توضیحات لازم و کافی ارائه می‌شود.

با توجه به اینکه در کارهای گذشته و مطالعات انجام شده، مطالعه و تحقیقی بر روی محاسبه طول کاواک بر مبنای تحلیلی انجام نشده است. در شرایطی که پدیده ابرکاواک⁵ تشکیل می‌گردد، طول کاواک با استفاده از روابط ناشی از نتایج تجربی محاسبه می‌شود، که مبنای تحلیلی ندارند و روابط متفاوتی می‌باشند. در این تحقیق جهت بدست آوردن روابط تحلیلی مربوط به محاسبه طول کاواک، با توجه به مدل انتقال جرم، معادله پیوستگی و معادله مومنوم، براساس روش بزرگی مرتبه متغیرها⁶، سه رابطه تحلیلی بدست آمده، رابطه تحلیلی اول مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد کاواک می‌باشد. رابطه تحلیلی دوم مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد رینولدز می‌باشد، توسط دو رابطه فوق می‌توان در محیط جریان، طول کاواک را بر حسب عدد کاواک و عدد رینولدز جریان محاسبه نمود. رابطه تحلیلی سوم مربوط به محاسبه عدد کاواک نسبت به عدد رینولدز می‌باشد، توسط این رابطه می‌توان تغییرات عدد کاواک را بر حسب عدد رینولدز پیش‌بینی کرد. ضرایب مجهول مربوط به روابط تحلیلی، در تطبیق با نتایج تجربی، حاصل می‌شوند. میزان خطای روابط تحلیلی بدست آمده نسبت به نتایج تجربی محاسبه شده است.

2- روابط حاکم

جریان حاکم بر پدیده مخلوط⁷ دو فازی می‌باشد. در این حالت جرم حجمی، مخلوطی از فاز بخار، فاز مایع و گازهای غیرمحلول می‌باشد و توسط پارامترکسر حجمی، میزان فازها تعیین می‌گردد. معادلات پیوستگی و مومنوم بصورت مخلوط حل می‌شود. برای هر فاز یک معادله پیوستگی بطور مجزا منظور می‌گردد. وقتی که جریان بصورت مخلوط در نظر گرفته می‌شود رابطه (1) معادله پیوستگی جریان مخلوط، رابطه (2) معادله پیوستگی فاز بخار و رابطه (3) معادله پیوستگی فاز مایع را نشان می‌دهد.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha \rho_v) + \nabla \cdot (\alpha \rho_v \vec{v}) = R \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1-\alpha)\rho_l) + \nabla \cdot ((1-\alpha)\rho_l \vec{v}) = -R \quad (3)$$

که در روابط (1) تا (3)، R نرخ تغییر فاز خالص از مایع به بخار و بخار به

غلافی از بخار و هوا پوشیده می‌شود و تماس بدنه با جریان آب از بین می‌رود. از کاویتاتور جهت دمش هوا و ایجاد غلاف کاواک در حالت دمشی استفاده می‌شود. لذا برای استفاده از این پدیده، آگاهی از فیزیک و پیش‌بینی رفتار آن بسیار ضروری است. با توجه به اهمیت موضوع در سال‌های اخیر به واسطه توسعه روش‌های دینامیک محاسباتی، مطالعات عددی بر روی شبیه‌سازی فیزیکی پدیده به صورت قابل توجه‌ای امکان‌پذیر گشته است.

بطور کلی در شبیه‌سازی مدل‌های مختلف از دو دیدگاه زیر استفاده می‌شود [1]:

(1) مدل لاگرانژی (روش حباب‌های مجزا)

(2) مدل اویلری (روش پیوسته)

در دیدگاه لاگرا نژای رفتار حباب‌ها بطور مجزا مدنظر قرار می‌گیرند و از معادلات دینامیک حباب‌ها استفاده می‌شود. در دیدگاه اویلری جریان به صورت یک مخلوط تقریب زده می‌شود. برای هر فاز یک معادله پیوستگی بطور مجزا منظور می‌گردد. در این مدل معادلات بقای جرم هر فاز توسط پارامتر کسر حجمی بیان می‌گردند. در حقیقت پارامترهای تأثیرگذار بر تشکیل کاواک بر اساس فرایندهای فیزیکی پیچیده‌ای می‌باشند. اشنبرگ [2] خلاصه‌ای از دینامیک تشکیل کاواک را ارائه نمود. در عمل شروع کاواک با رشد حباب‌ها آغاز می‌گردد. این حباب‌ها دارای مخلوطی از بخار آب و گازهای غیر محلول می‌باشند. وقتی که فشار محلی تا حد فشار بخار کاهش می‌یابد حباب‌ها تا حد انفجار رشد می‌کنند و زمانیکه حباب‌ها به ناحیه پر فشار منتقل می‌گردند دچار فرو ریختگی می‌شوند. دینامیک فروریختگی، پیچیده بوده و وابسته به پارامترهای متعددی از قبیل کشش سطحی، تأثیر لزجت و میزان گازهای غیر محلول دارد. در حال حاضر مدل انتقال جرمی در کاواک وجود ندارد که کلیه پارامترهای فوق را در بر بگیرد. مدل‌های موجود نشأت گرفته از معادله دینامیک حباب، رایلی-پلیست¹ [3] می‌باشند. این معادله معرف رشد و فرو ریختگی حباب متقارنی است که در میدان فشار واقع می‌باشد. تعدادی از مدل‌های انتقال جرم در کاواک عبارتند از: مدل سینگهال²، مدل اشنر و ساور³، مدل زوارت-گربر-بلامری⁴.

جزئیات مربوط به مدل‌های انتقال جرم، مختلف می‌باشند؛ اما در همه مدل‌ها از معادله پیوستگی همراه با ترم چشمه استفاده گردیده است [4]. در ترم چشمه از معادله دینامیک حباب رایلی-پلیست استفاده می‌شود.

ساوچنکو و همکاران [5] نتایج تجربی بر روی پرتابه‌های زیرآبی در تونل آب استخراج نمودند و بر اساس نتایج، روابط تجربی جهت محاسبه طول و قطر حباب کاواک در حالت تقارن محوری ارائه نمودند. پینگ و همکاران [6] شکل حباب کاواک دمشی و نیروی پسا حاصل از آن را به صورت عددی شبیه‌سازی نمودند و رابطه بین شکل حباب کاواک دمشی و نرخ دمش گاز را به صورت تجربی ارائه کردند. وانگ و همکاران [7] مجموعه‌ای از پرتابه‌های زیرآبی را در تونل آب مدار بسته به صورت تجربی مورد مطالعه قرار دادند و مشخصات مربوط به شکل حباب کاواک را به صورت طبیعی و دمشی استخراج نمودند. وانگ و همکاران [8] نرخ گاز دمشی در حباب کاواک را مورد بررسی قرار داده و نرخ تغییر حجم حباب کاواک را بر اساس روابط تجربی و نتایج آزمایشگاهی مقایسه نمودند. بین و همکاران [9] حباب کاواک را به شکل طبیعی و دمشی با استفاده از یک مدل سه‌بعدی و بر اساس معادله انتقال جرم شبیه‌سازی نموده و تطابق بین نتایج تجربی و نتایج شبیه‌سازی را نشان

¹ Rayleigh-Plesset

² Singhal

³ Schnerr-Sauer

⁴ Zwart-Gerber-Blamri

⁵ Super cavitation

⁶ Order of magnitude

⁷ mixture

با توجه به رابطه‌ی (10)، رابطه‌ی (19) بدست می‌آید.

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\rho R}{\rho_v \rho_l} \quad (19)$$

با توجه به روابط (12)، (14) و (18)، رابطه‌ی (20) بدست می‌آید.

$$R = (n4\pi)^{\frac{1}{3}} (3\alpha)^{\frac{2}{3}} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2P_B - P}{3\rho_l}} \quad (20)$$

رابطه (20) را می‌توان بر اساس شعاع حباب یعنی R_B بفرم رابطه (22) نوشت.

$$n = \frac{3\alpha}{4\pi R_B^3} \quad (21)$$

$$R = \frac{3\alpha}{R_B} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2P_B - P}{3\rho_l}} \quad (22)$$

چنانچه فرض کنیم، انتقال جرم بفرم تبخیر باشد، در رابطه (23) فشار داخل حباب، فشار تبخیر خواهد بود و $P_B = P_v$ می‌باشد.

$$R_{\text{evap}} = \frac{3\alpha}{R_B} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \quad (23)$$

زمانی که حباب به حداکثر قطر خود برسد، بین نیروی پسا و نیروی کشش سطحی تعادل برقرار می‌شود که توسط عدد وبر در رابطه (24) ارائه می‌گردد.

$$W_e = \frac{\rho_l R_B v_{\text{rel}}^2}{S} \quad (24)$$

که در آن S نیروی کشش سطحی و v_{rel} سرعت نسبی بین فاز بخار و مایع می‌باشد. با جایگذاری رابطه‌ی (24) در رابطه‌ی (23)، رابطه‌ی (25) حاصل می‌گردد.

$$R_{\text{evap}} = \frac{3\alpha \rho_l v_{\text{rel}}^2}{W_e S} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \quad (25)$$

که در آن v_{rel}^2 بعنوان یک سرعت مشخصه و $\frac{3}{W_e}$ بعنوان یک ضریب تجربی لحاظ شده و در رابطه (26) داریم.

$$R_{\text{evap}} = C \frac{\alpha \rho_l V_{\text{ch}}}{S} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \quad (26)$$

توسط رابطه (27) و (28)، می‌توان کسر حجمی را به کسر جرمی بخار f ربط داد.

$$\alpha = f \frac{\rho}{\rho_v} \quad (27)$$

$$(1 - \alpha) = (1 - f) \frac{\rho}{\rho_l} \quad (28)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (28) در رابطه‌ی (26)، روابط (29) و (30) بدست می‌آید.

$$R_{\text{evap}} = C_e \frac{V_{\text{ch}}}{S} \rho_v \rho_l \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} (1 - f) \quad (29)$$

اگر $P \geq P_v$

$$R_{\text{cond}} = C_c \frac{V_{\text{ch}}}{S} \rho_l \rho_l \sqrt{\frac{2P - P_v}{3\rho_l}} f \quad (30)$$

سرعت نسبی بین دو فاز معمولاً 1 الی 10 درصد سرعت اصلی جریان در نظر گرفته می‌شود، در جریان‌های مغشوش نیز نوسانات سرعت محلی نیز از همین مرتبه می‌باشد، بنابراین می‌توان V_{ch} را با \sqrt{k} جایگزین نمود که \sqrt{k} مربوط به انرژی جنبشی جریان مغشوش می‌باشد [13].

در روابط (30) و (29)، $C_c = 0/01$ و $C_e = 0/02$ می‌باشد که برش تجربی استخراج گردیده است.

مایع می‌باشد. از بسط رابطه (2) و (3) رابطه (4) و (5) بدست می‌آید

$$\rho_v \frac{D\alpha}{Dt} + \alpha \left[\rho_v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \alpha \frac{D\rho_v}{Dt} = R \quad (4)$$

$$-\rho_l \frac{D\alpha}{Dt} + (1 - \alpha) \left[\rho_l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + (1 - \alpha) \frac{D\rho_l}{Dt} = -R \quad (5)$$

در مرز مشترک آب و بخار رابطه (6) حاکم است.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

که ρ معرف چگالی مخلوط در مرز مشترک می‌باشند. در مرز مشترک ρ بعنوان یک مقدار ثابت فرض میشود.

بنابراین ترم‌های سوم روابط (4) و (5) حذف می‌گردند و روابط (7) و (8) حاصل می‌گردد.

$$\rho_v \frac{D\alpha}{Dt} + \alpha \left[\rho_v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = R \quad (7)$$

$$-\rho_l \frac{D\alpha}{Dt} + (1 - \alpha) \left[\rho_l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = -R \quad (8)$$

از جمع روابط (7) و (8) رابطه (9) بدست می‌آید.

$$(\rho_v - \rho_l) \frac{D\alpha}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (9)$$

چگالی مخلوط توسط رابطه (10) بیان می‌گردد.

$$\rho = \alpha \rho_v + (1 - \alpha) \rho_l \quad (10)$$

از بسط رابطه‌ی (1)، رابطه‌ی (11) بدست می‌آید.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (11)$$

از ترکیب رابطه (9) و (11) رابطه (12) بدست می‌آید.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -(\rho_l - \rho_v) \frac{D\alpha}{Dt} \quad (12)$$

کسر حجمی بخار را می‌توان بر حسب چگالی حجمی حباب با شعاع R_B توسط رابطه (13) نوشت.

$$\alpha = n \left(\frac{4}{3} \pi R_B^3 \right) \quad (13)$$

که n تعداد حباب در واحد حجم و R_B شعاع حباب می‌باشد.

با جایگذاری رابطه‌ی (13) در رابطه‌ی (12)، رابطه‌ی (14) بدست می‌آید.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -(\rho_l - \rho_v) \frac{4}{3} \pi n (3R_B^2) \frac{DR_B}{Dt} \quad (14)$$

رابطه (14) را می‌توان بفرم رابطه (15) نوشت.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -(\rho_l - \rho_v) (n4\pi)^{\frac{1}{3}} (3\alpha)^{\frac{2}{3}} \frac{DR_B}{Dt} \quad (15)$$

معادله دینامیک حباب (رایلی - پلیسیت) بفرم رابطه (16) می‌باشد.

$$R_B \frac{D^2 R_B}{Dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{DR_B}{Dt} \right)^2 = \frac{P_B - P}{\rho_l} - \frac{4\theta_l}{R_B} \dot{R}_B - \frac{2S}{\rho_l R_B} \quad (16)$$

معادله دینامیک حباب یک معادله دیفرانسیلی غیرخطی می‌باشد، لذا با توجه به مفروضاتی که لحاظ می‌شود، از ترم مشتق دوم یا شتاب مربوط به شعاع حباب در سمت چپ، و ترم دمپینگ لزج با فرض غیر لزج بودن سیال و ترم مربوط به کشش سطحی، ترم‌های دوم و سوم سمت راست صرفنظر می‌گردد. رابطه (17) بدست می‌آید.

$$\frac{DR_B}{Dt} = \sqrt{\frac{2P_B - P}{3\rho_l}} \quad (17)$$

2-1 مدل سینگهال

با جایگذاری رابطه‌ی (9) در رابطه‌ی (7)، رابطه‌ی (18) حاصل می‌گردد.

$$\frac{D\alpha}{Dt} \left(1 - \frac{\alpha(\rho_v - \rho_l)}{\rho} \right) = \frac{R}{\rho_v} \quad (18)$$

$$R_{\text{evap}} = F_{\text{vap}} \frac{3\alpha_{\text{nuc}}(1-\alpha)\rho_v}{R_B} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \quad (41)$$

اگر $P \geq P_v$

$$R_{\text{cond}} = F_{\text{cond}} \frac{3\alpha\rho_v}{R_B} \sqrt{\frac{2P - P_v}{3\rho_l}} \quad (42)$$

که در روابط (41) و (42)، $R_B = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$ و $\alpha_{\text{nuc}} = 5 \times 10^{-4}$ و $F_{\text{vap}} = 50$ و $F_{\text{cond}} = 0.01$ [14] می باشد.

3-2- مدل اشتر-ساور

در این مدل طبق رابطه (43) کسر حجمی بخار به تعداد حبابها در واحد حجم مایع ارتباط داده شده است

$$\alpha = \frac{\frac{V_v}{V_l}}{1 + \frac{V_v}{V_l}} = \frac{n \frac{4}{3} \pi R_B^3}{1 + n \frac{4}{3} \pi R_B^3} \quad (43)$$

که در آن شعاع حباب طبق رابطه (44) است.

$$R_B = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{3}{4\pi n} \quad (44)$$

در این مدل نرخ انتقال جرم وابسته به $\alpha(1-\alpha)$ می باشد، اگر $\alpha = 0$ و یا $\alpha = 1$ باشد، انتقال جرم به سمت صفر میل می کند. تعداد حبابها بر واحد حجم مایع مهم می باشد. انتقال جرم در مدل اشتر-ساور [15] از روابط (45)

و (46) بدست می آید.

اگر $P \leq P_v$

$$R_{\text{evap}} = \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \alpha(1-\alpha) \frac{3}{R_B} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \quad (45)$$

اگر $P \geq P_v$

$$R_{\text{cond}} = \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \alpha(1-\alpha) \frac{3}{R_B} \sqrt{\frac{2P - P_v}{3\rho_l}} \quad (46)$$

4-2- مدل انتقال جرم با احتساب ترم کشش سطحی

شروع کاواک الزاما در فشار بخار اتفاق نمی افتد و در یک فشار بحرانی که کمتر از فشار بخار می باشد، شکل می گیرد. این تأخیر در شروع کاواک بواسطه کشش سطحی می باشد. عبارت دیگر کشش سطحی باعث می گردد که تأخیری در آغاز و شروع کاواک بوجود آورد. در بخشی از فرایند که شعاع حبابها کوچک می باشد، تأثیرات چشمگیر است و با رشد حبابها و افزایش شعاع حباب این ترم کاهش می یابد. بنابر این برای زمانی که حبابها ریز می باشند، اثر کشش سطحی قابل ملاحظه می باشد. مراحل رشد و متلاشی شدن حبابها در شعاعهای مختلف و با احتساب کشش سطحی نشان می دهد که با افزایش کشش سطحی زمان متلاشی شدن و فرو ریختن حبابها کاهش می یابد. تأثیر این موضوع برای حبابهای با شعاع کوچکتر قابل ملاحظه می باشد [16]. مشاهده شد که در رابطه (16) از ترم کشش سطحی صرفنظر گردید. با توجه به اینکه شعاع حبابها در زمان تشکیل حباب کاواک در محدوده 10^{-4} - 10^{-2} میلی متر است و شعاع حباب در مخرج کسر بوده بنابراین در مراحل تشکیل و شکل گیری کاواک تأثیرگذار می باشد. نرخ انتقال جرم با توجه به رابطه (47) تابعیت پارامترهای زیر است.

$$R = f(\rho, \rho_v, \rho_l, \alpha, R_B, P, P_v, n) \quad (47)$$

اگر در رابطه (16) از ترم کشش سطحی صرفنظر نشود و در رابطه (48) این ترم منظور گردد، داریم:

فشار بخار با توجه به نوسانات فشار جریان مغشوش از رابطه (31) و (32) بدست می آید.

$$P_v = (P_{\text{sat}} + \frac{P'_{\text{turb}}}{2}) \quad (31)$$

$$P'_{\text{turb}} = 0.39\rho k \quad (32)$$

با توجه به اینکه جریان اصلی مخلوطی از مایع، بخار مایع و گازهای غیر محلول می باشد، لذا چگالی جریان مخلوط را می توان بشکل رابطه (33) برحسب کسر حجمی نوشت و بر اساس آن رابطه (34) را بصورت کسر جرمی نوشت.

$$\alpha_v + \alpha_g + (1 - \alpha_v - \alpha_g) = 1 \quad (33)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{f_v}{\rho_v} + \frac{f_g}{\rho_g} + \frac{1 - f_v - f_g}{\rho_l} \quad (34)$$

$$\rho_g = \frac{WP}{RT} \quad (35)$$

W وزن مولکولی گاز، R ثابت گازها، T و P دما و فشار گاز می باشد.

گازهای غیرمحلول در مخلوط جریان ناشی از دمش گاز درون محلول نیز می باشد. مقدار اندک این گاز می تواند، تأثیرگذار باشد، بطوریکه در فشار کم انبساط گاز حاصل شده و کسر حجمی گاز را افزایش می دهد و روی چگالی تأثیر می گذارد، همچنین باعث تغییر آستانه فشار در تغییر فاز می گردد.

با توجه به رابطه (29) و (30) روابط (36) و (37) که روابط انتقال جرم بصورت کسر جرمی در مدل سینگهال می باشند [13]، بدست می آید.

$$R_{\text{evap}} = C_e \frac{\sqrt{k}}{S} \rho_v \rho_l \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} (1 - f_v - f_g) \quad (36)$$

$$R_{\text{cond}} = C_c \frac{\sqrt{k}}{S} \rho_l \rho_l \sqrt{\frac{2P - P_v}{3\rho_l}} f_v \quad (37)$$

2-2- مدل زوارت-گربر-بلامری

با توجه به رابطه (7)، ترم دوم را بواسطه پیوستگی، معادل صفر در نظر گرفته و رابطه (38) حاصل می گردد.

$$\rho_v \frac{D\alpha}{Dt} = R \quad (38)$$

از روابط (13) و (17)، رابطه (39) بدست می آید.

$$R_{\text{evap}} = \frac{3\alpha\rho_v}{R_B} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \quad (39)$$

با توجه به اینکه فشار محیط کوچکتر و یا بزرگتر از فشار بخار باشد، رابطه (40) ارائه می شود [14].

$$R_{\text{evap}} = F \frac{3\alpha\rho_v}{R_B} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \text{sign}(P_B - P) \quad (40)$$

F یک ضریب تجربی است، رابطه (40) برای حالت تقطیر مناسب است ولی برای حالت تبخیر بطور فیزیکی ناصحیح و بطور عددی ناپایدار است، دلیل آن اینست که در مراحل اولیه، تشکیل کاواک از مراکز هسته رشد میکند و همچنانکه کسر حجمی بخار افزایش می یابد، چگالی مراکز هسته ای بایستی کاهش یابد. برای تصحیح مدل بجای α از $\alpha_{\text{nuc}}(1-\alpha)$ استفاده می گردد. مدل انتقال جرم زوارت-گربر-بلامری [14] در روابط (41) و (42) ارائه می گردد.

اگر $P \leq P_v$

جهت محاسبه نسبت طول کاواک از آن‌ها استفاده می‌شود، رابطه گارابدیان¹ (61)، ریچارد² (62)، واید³ (63)، [17] است. روابط (61) تا (63) نشان می‌دهد که نسبت طول کاواک به قطر جسم، فقط تابع عدد کاواک می‌باشد.

$$\frac{L_c}{d} = \frac{\sqrt{0.827(1+\sigma)}}{\sigma} \sqrt{\ln \frac{1}{\sigma}} \quad (61)$$

$$\frac{L_c}{d} = \frac{\sigma + 0.008}{\sigma(0.066 + 1.7\sigma)} \quad (62)$$

$$\frac{L_c}{d} = \frac{1.08}{\sigma^{1.118}} \quad (63)$$

L_c طول کاواک، d قطر جسم، σ عدد کاواک می‌باشد.

با توجه به رابطه تناسب (60) و نتایج تجربی [17] که در شکل 1، نشان داده شده است رابطه تحلیلی (64) بدست می‌آید.

$$\frac{L_c}{d} = \frac{3.33}{\sqrt{\sigma} - 0.125} - 3.5 \quad (64)$$

نسبت طول کاواک به قطر آن فقط تابعی از عدد کاواک می‌باشد، در شکل 1 نتایج حاصل از رابطه (64) با نتایج حاصل از [7] صحت‌سنجی گردید.

3-2- رابطه بین عدد رینولدز و طول کاواک طبیعی

از هم مرتبه بودن ترم‌های لزجت و اینرسی در رابطه‌ی (56)، روابط (65) و (66) بدست می‌آید.

$$\frac{u_\infty^2}{L_c} \sim \vartheta \frac{u_\infty}{d^2} \rightarrow \frac{L_c^2}{d^2} \sim \frac{u_\infty L_c}{\vartheta} \sim Re \quad (65)$$

$$\frac{L_c}{d} \sim \sqrt{Re} \quad (66)$$

با توجه به رابطه‌ی تناسب (66) و نتایج تجربی [17] که در شکل 2، نشان داده شده است، رابطه تحلیلی (67) بدست می‌آید.

$$\frac{L_c}{d} = 3.58\sqrt{Re \times 10^{-6}} - 3 \quad (67)$$

از عدد رینولدز 7×10^7 به بعد انحرافی بین نتایج تجربی و رابطه پیشنهادی، مشاهده می‌شود. این میزان انحراف تا عدد رینولدز 7.74×10^7 که متناسب با عدد کاواک 0.05 است، معادل 5% می‌باشد. در شکل 2 نتایج حاصل از رابطه (67) با نتایج حاصل از [7] صحت‌سنجی گردید.

در هیچ یک از مقالات پیشین رابطه‌ای بین نسبت طول کاواک به قطر

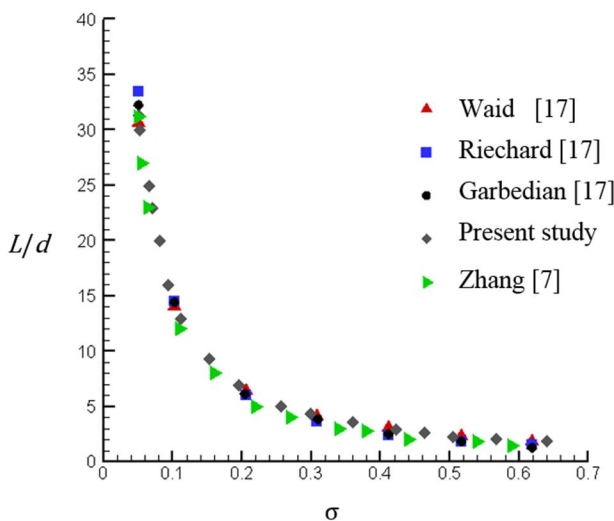


Fig. 1 Variation cavity lengths with cavitation number

شکل 1 تغییر طول کاواک نسبت به عدد کاواک

¹Garabedian

²Richard

³Waid

$$\frac{DR_B}{Dt} = \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l} - \frac{4S}{3\rho_l R_B}} \quad (48)$$

مقدار $S = 0.072 \text{ N/m}$ کشش سطحی آب می‌باشد. با جایگذاری در رابطه (45)، روابط (49) و (50) حاصل می‌گردد.

اگر $P \leq P_v$

$$R_{\text{evap}} = \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \alpha (1 - \alpha) \frac{3}{R_B} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l} - \frac{4S}{3\rho_l R_B}} \quad (49)$$

اگر $P \geq P_v$

$$R_{\text{cond}} = \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \alpha (1 - \alpha) \frac{3}{R_B} \sqrt{\frac{2P - P_v}{3\rho_l} - \frac{4S}{3\rho_l R_B}} \quad (50)$$

روابط (49) و (50)، بر اساس معادلات انتقال جرم می‌باشد که در آن‌ها نقش کشش سطحی آب در معادله دینامیک حباب نیز لحاظ گردیده است.

3- رابطه بین عدد کاواک-عدد رینولدز

3-1- رابطه بین عدد کاواک و طول کاواک طبیعی

با توجه به معادلات پیوستگی، مومنوم و با استفاده از روش مرتبه متغیرها می‌توان ترم‌های موجود در معادلات را که در حال حاضر نمی‌توان آن‌ها را بصورت تحلیلی حل کرد، ارزیابی نمود. لذا با این روش ترم‌های کم اهمیت تر را می‌توان حذف و معادلات باقیمانده را حل نمود.

با توجه به رابطه‌ی (51) معادله پیوستگی داریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (51)$$

با توجه به تراکم ناپذیری و دائم بودن جریان رابطه‌ی (52) داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (52)$$

مرتبه متغیر u را معادل u_∞ و x را معادل L_c (طول کاواک) و y را معادل d (قطر جسم) در نظر می‌گیریم. رابطه‌ی (53) داریم.

$$\frac{u_\infty}{L_c} - \frac{v}{d} \rightarrow v \sim \frac{u_\infty d}{L_c} \quad (53)$$

رابطه (54) و (55) معادلات مومنوم در جهت x, y را نشان می‌دهد.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \quad (54)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \quad (55)$$

با توجه به مرتبه متغیرها روابط (56) و (57) حاصل می‌گردد.

$$\frac{u_\infty^2}{L_c} - \frac{u_\infty v}{d} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{L_c} + \vartheta \frac{u_\infty}{L_c^2} - \vartheta \frac{u_\infty}{d^2} + g \quad (56)$$

$$\frac{u_\infty v}{L_c} - \frac{v^2}{d} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{d} + \vartheta \frac{v}{L_c^2} - \vartheta \frac{v}{d^2} + g \quad (57)$$

$$\frac{u_\infty}{L_c^2} \ll \frac{u_\infty}{d^2} \quad \text{و} \quad \frac{v}{L_c^2} \ll \frac{v}{d^2} \quad (58)$$

بنابراین از ترم‌های دوم سمت راست روابط (56) و (57) در مقابل ترم‌های سوم صرف‌نظر می‌گردد. با توجه به رابطه (57) و هم مرتبه بودن ترم فشار و ترم اینرسی روابط (59) و (60) بدست می‌آید.

$$\frac{u_\infty v}{L_c} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{d} \quad \text{و} \quad \frac{u_\infty^2 d}{L_c^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{d} \rightarrow \left(\frac{d}{L_c} \right)^2 - \frac{\Delta p}{\rho u_\infty^2} \sim \sigma \quad (59)$$

$$\frac{L_c}{d} \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \quad (60)$$

رابطه (60) نشان می‌دهد که بطور تحلیلی نسبت طول کاواک به قطر جسم، متناسب باعکس ریشه عدد کاواک می‌باشد و افزایش نسبت طول کاواک به قطر جسم، رابطه مستقیم با کاهش عدد کاواک دارد. روابط تجربی متفاوتی که

رابطه (69) نشان میدهد که عدد کاواک و عدد رینولدز معکوس یکدیگر هستند.

4- نتیجه گیری

در محیط ابرکاواک، محاسبه طول کاواک طبیعی حائز اهمیت می باشد بر اساس تحقیقاتی که تاکنون صورت گرفته، طول کاواک طبیعی تابع عدد کاواک بوده و با استفاده از روابط ناشی از نتایج تجربی محاسبه شده، که مبنای تحلیلی ندارند. این روابط توابع مختلفی می باشند. در این تحقیق جهت بدست آوردن روابط تحلیلی مربوط به محاسبه طول کاواک طبیعی، براساس روش مرتبه بزرگی متغیرها و با استفاده از مدل انتقال جرم، معادلات پیوستگی و مومنتوم، سه رابطه تحلیلی بدست آمده است. رابطه تحلیلی اول مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد کاواک می باشد. رابطه فوق نشان می دهد، که نسبت طول کاواک به قطر جسم فقط تابعی از عدد کاواک می باشد و با عکس ریشه آن ارتباط دارد، لذا نسبت طول کاواک به قطر جسم با کاهش عدد کاواک افزایش می یابد. رابطه تحلیلی دوم مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد رینولدز می باشد، این رابطه نشان می دهد که نسبت طول کاواک به قطر جسم با ریشه عدد رینولدز رابطه مستقیم دارد و با افزایش عدد رینولدز نسبت طول کاواک به قطر جسم نیز افزایش می یابد. خطای این رابطه تحلیلی نسبت به نتایج تجربی، تا عدد کاواک 0.05 کمتر از 5 درصد است. این خطا قابل اغماض بوده و می توان بر اساس این رابطه تحلیلی، در محیط ابرکاواک نسبت طول کاواک به قطر جسم را متناسب با افزایش عدد رینولدز محاسبه نمود. رابطه ی تحلیلی سوم مربوط به محاسبه عدد کاواک نسبت به عدد رینولدز می باشد، این رابطه نشان می دهد که مطابق با نتایج تجربی، عدد کاواک و عدد رینولدز معکوس یکدیگر می باشند و با افزایش عدد رینولدز، عدد کاواک کاهش می یابد. خطای این رابطه نسبت به نتایج تجربی کمتر از 2 درصد می باشد. نتایج حاصل از روابط بدست آمده، منطبق با نتایج تجربی و فیزیک پدیده ابرکاواک می باشند. روابط تحلیلی بدست آمده جایگزین مناسبی برای عددی طول کاواک را بر حسب عدد کاواک و عدد رینولدز پیش بینی نمود.

5- فهرست علائم

C_c	ضریب تقطیر
C_e	ضریب تبخیر
C_p	ضریب فشار
d	قطر جسم (m)
g	شتاب جاذبه (m/s^2)
K	انرژی جنبشی توربولانس (m^2/s^2)
L_c	طول کاواک (m)
l	طول مشخصه (m)
n	تعداد حباب در واحد حجم
P	فشار جریان مخلوط (Pa)
P_∞	فشار محیط (Pa)
P_B	فشار داخل حباب (Pa)
P_v	فشار بخار (Pa)
P'_{turb}	نوسان فشار مغشوش (Pa)
R_B	شعاع حباب (m)
R	نرخ انتقال جرم (kg/s)
R_{evap}	نرخ انتقال جرم بفرم تبخیر (kg/s)

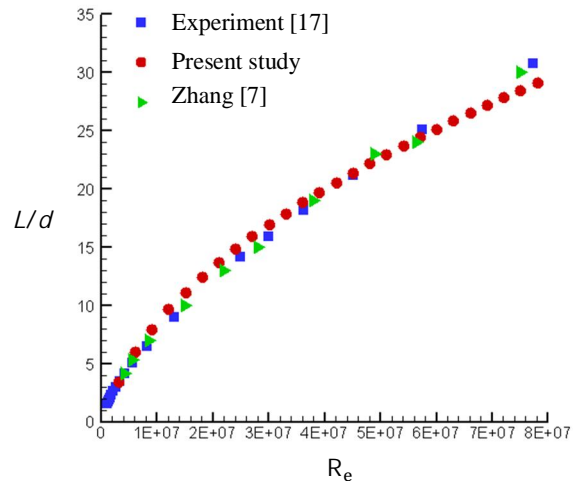


Fig. 2 Variation cavitation length with Reynolds number

شکل 2 تغییر طول کاواک نسبت به عدد رینولدز

جسم و عدد رینولدز ارائه نشده و مبنای همه روابط عدد کاواک می باشد، با توجه به رابطه تحلیلی (68) در حالتی که کاواک تشکیل می گردد، می توان نسبت طول کاواک به قطر جسم را بر اساس عدد رینولدز محاسبه نمود

3-3 رابطه بین عدد کاواک و عدد رینولدز

با توجه به رابطه ی عدد کاواک- طول کاواک طبیعی و عدد رینولدز- طول کاواک طبیعی، می توان ارتباط بین عدد کاواک و عدد رینولدز را بفرم رابطه (68) نشان داد.

$$\frac{L_c}{d} \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sim \sqrt{Re} \rightarrow \sigma \sim \frac{1}{Re} \quad (68)$$

با توجه به رابطه تناسب (68) و نتایج تجربی [17] که در شکل 3، نشان داده شده است، رابطه تحلیلی (69) بدست می آید.

$$\sigma = \frac{1.3}{Re \times 10^{-6} + 0.94} + 0.05 \quad (69)$$

خطای بین رابطه پیشنهادی و مقادیر تجربی در اعداد کاواک کمتر از 0.1 معادل 1.6% می باشد.

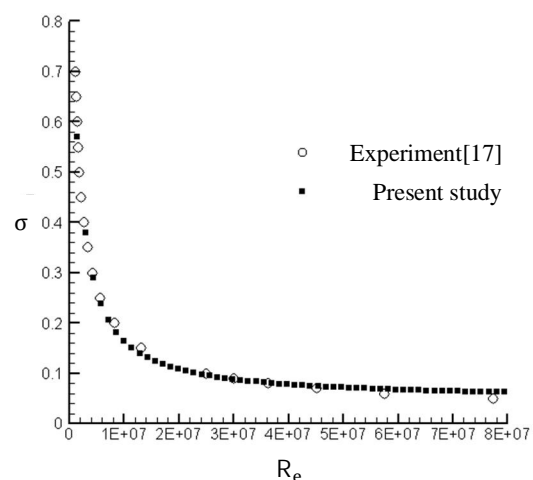


Fig. 3 Variation cavitation number with Reynolds number

شکل 3 تغییر عدد کاواک نسبت به عدد رینولدز

- [2] P. Eisenberg, *Cavitation*. Handbook of Fluid Mechanics, McGraw Hill, 1961.
- [3] C. E. Brennen, *Cavitation and Bubble Dynamics*, pp. 48-67, London: Oxford University Press, 1995.
- [4] I. Senocak, W. Shyy, Evaluation of cavitation models for Navier-Stokes computations, *ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting*, 2002.
- [5] Y.N. Savchenko, Y.D. Vlanesko, V.N. Semenenko, Experimental study of high-speed cavitated flows, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 26, No. 3, pp. 365-374, 1999.
- [6] J. Li-ping, W. Cong, W. Ying-jie et al, Numerical simulation of artificial ventilated cavity, *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 18, No. 3, pp. 273-279, 2006.
- [7] W.W. Zhang, Y.J. Wei, J.Z. Zhang, C. Wang, K.P. Yu, Experimental research on the shape characters of natural and ventilated supercavitation, *Journal of Hydrodynamics*, Vol. B 19, No. 5, pp. 564-571, 2007.
- [8] Z. Wang, K.P. Yu, X.H. Wan, Research on the gas-leakage rate of unsteady ventilated supercavity, *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 22, No. 5, pp. 778-783, 2010.
- [9] J. Bin, L. Xian, P.Xiao, Z. Yao, Numerical investigation of the ventilated cavitating flow around an under-water vehicle based on a three-component cavitation model, *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 22, No. 6, pp. 753-759, 2010.
- [10] H. Chanson, *Air bubble entrainment in free-surface turbulent shear flows*, pp. 127-135, London, UK: Academic Press, 1997.
- [11] H.B. Wang, J.Z. Zhang, Y.J. Wei, Study on relations between cavity form and typical cavitator parameters, *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 20, No. 2, pp. 251-257, 2005.
- [12] M. Maerefat, S. Tahmasebi, M. R. Ansari, Numerical simulation of super-cavitating flow and calculation of cavity length around a submersible vehicle, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 187-196, 2015. (in Persian)
- [13] A. K. Singhal, H. Li, M. Athavale, Mathematical Basis and Validation of the Full Cavitation Model, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 124, No. 3, pp. 617-624, 2002.
- [14] P. J. Zwart, A. G. Gerber, T. Belamri, A Two-Phase Flow Model for Predicting Cavitation Dynamics, *Proceedings of The 5th International Conference on Multiphase Flow*, Yokohama, Japan, 2004.
- [15] G. H. Schnerr, J. Sauer, Physical and numerical modelling of unsteady cavitation dynamics, *Proceedings of The 4th International Conference on Multiphase Flow*, 2001.
- [16] Ehsan Samiei, M. Shams, A novel numerical scheme for the investigation of surface tension effects on growth and collapse stages of cavitation bubbles, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 30, No. 1, pp. 41-50, 2011.
- [17] T. J. Schauer, An Experimental study of a ventilated supercavitating vehicle, *MS thesis in aerospace engineering*, university of minnesota, 2003.

R_{cond}	نرخ انتقال جرم بغرم تقطیر (kg/s)
R_e	عدد رینولدز
R	ترم چشمه (kg/m^3)
R_B	شعاع حباب (m)
S	کشش سطحی (N/m^2)
t	زمان (s)
u	مولفه سرعت (m/s)
u_∞	سرعت جریان آزاد (m/s)
\vec{v}	بردار سرعت (m/s)
V_{ch}	سرعت مشخصه (m/s)
V_v	حجم بخار (m^3)
V_l	حجم مایع (m^3)
v	مولفه سرعت (m/s)
W_e	عدد وبر

علائم یونانی

α_v	کسر حجمی بخار
α_g	کسر حجمی گاز
σ	عدد کاواک
μ	لزجت جریان آرام (kg/ms)
μ_t	لزجت جریان مغشوش (kg/ms)
ρ	جرم حجمی (kg/m^3)
ρ_v	جرم حجمی بخار (kg/m^3)
ρ_g	جرم حجمی گاز (kg/m^3)
ρ_l	جرم حجمی سیال (kg/m^3)
α_{nuc}	کسر حجمی گاز محلول در آب
ε	نرخ اتلاف انرژی مغشوش (m^2/s^3)
f	کسر جرمی
f_v	کسر جرمی بخار
f_l	کسر جرمی مایع

6-مراجع

- [1] J. Franc, J. Michel, *Fundamentals of cavitation*, pp. 98-124, Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2005.