مجله مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1395، دوره 16، شماره 5، ص‌ص 19-28

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی تاثیر جابجایی‌های جانبی بر روی ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌ها با استفاده از تئوری غیرمحلی ریلی

رضا ناظم‌نژاد[1*]، کامران کمالی[2]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه دامغان، دامغان

2- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

* دامغان، کدپستی 36716-41167، rnazemnezhad@du.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 07 اسفند 1394

پذیرش: 10 فروردین 1395

ارائه در سایت: 13 اردیبهشت 1395

کلید واژگان:

جابجایی‌های جانبی

ارتعاشات طولی

تئوری غیرمحلی ریلی

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌ها با تمرکز بر بررسی تاثیر جابجایی‌های جانبی بررسی می‌شود. بدین منظور، از تئوری ریلی که جابجایی‌های جانبی نانومیله را در نظر می‌گیرد به همراه تئوری الاستیسیته غیرمحلی که اثر مقیاس کوچک را در نظر می‌گیرد استفاده شده است. سپس با استفاده از اصل همیلتون، معادله حرکت و شرایط مرزی غیرمحلی استخراج شده‌اند. بدلیل افزایش مرتبه معادله حرکت از مرتبه دو (معادله حرکت محلی) به مرتبه چهار (معادله حرکت غیرمحلی)، و از طرفی ثابت ماندن تعداد شرایط مرزی (یک شرط مرزی در هر طرف نانومیله)، با استفاده از روش ریلی-ریتز معادله حرکت حل شده است. در روش ریلی- ریتز بایستی تابع شکل مناسبی برای مسئله مورد نظر در نظر گرفته شود، بطوری¬که تابع فوق حداقل شرایط مرزی هندسی مسئله را ارضا نماید که در این پژوهش چندجمله‌های در نظر گرفته شده برای تابع شکل مسئله با استفاده از روش متعامدسازی گرام-اشمیت، متعامدسازی و نرمالایز شده‌اند. سپس پنج فرکانس اول محوری نانومیله به ازای شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد استخراج شده است. در گام بعد، تاثیر عوامل مختلف مانند طول نانومیله، قطر نانومیله و پارامتر غیرمحلی بر روی فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیله بررسی شده است. نتایج این پژوهش می‌تواند در طراحی دقیق‌تر سیستم‌های نانوالکترومکانیکی‌ای که در آن¬ها از نانوتیوب‌ها استفاده می‌شود موثر باشد.

Investigation of the inertia of the lateral motions effect on free axial vibration of nanorods using nonlocal Rayleigh theory

Reza Nazemnezhad[1*], Kamran Kamali[2]

1- Department of Engineering, Damghan University, Damghan, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
*P.O.B , 36716-41167, Damghan, Iran, rnazemnezhad@du.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 26 February 2016
Accepted 29 March 2016
Available Online 02 May 2016

Keywords:
Inertia of the lateral motions
Axial vibration
Nonlocal Rayleigh theory

ABSTRACT

In this paper, free axial vibration of nanorods is investigated by focusing on the inertia of the lateral motions effects. To this end, Rayleigh and nonlocal theories considering the inertia of the lateral motions and the small scale effects, respectively, are used. Then, by implementing the Hamilton's principle nonlocal governing equation of motion and boundary conditions are derived. Since using nonlocal elasticity causes the 2-order local governing equation to be changed to the 4th-order nonlocal governing equation while number of boundary conditions remains constant (one boundary condition at each end of nanorod), the governing equation is solved using Rayleigh-Ritz method. In Rayleigh-Ritz method a suitable shape function for the problem should be selected. The shape function must at least satisfy the geometrical boundary conditions. In the present study, orthogonal polynomials are selected as shape functions then they are normalized by using the Gram-Schmidt process for more rapid convergence.

After that, the first five axial natural frequencies of nanorod with clamped-clamped and clamped-free end conditions are obtained. In the next step, effects of various parameters like length of nanorod, diameter of nanorod and nonlocal parameter value on natural frequencies are investigated. Results of the present study can be useful in more accurate design of nano-electro-mechanical systems in which nanotubes are used.

1- مقدمه

نانوتیوب‌ها به دلیل داشتن خواص منحصر به فرد مکانیکی [1]، الکتریکی [2] و فیزیکی [3]، در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته‌اند. این خواص منحصر به فرد سبب شده است تا نانوتیوب‌ها در سیستم‌های مختلف نانوالکترومکانیکی مورد استفاده قرار گیرند. مسلما این یک امر بدیهی است که استفاده از یک قطعه یا شیء در یک سیستم، نیازمند

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

R. Nazemnezhad, K. Kamali, Investigation of the inertia of the lateral motions effect on free axial vibration of nanorods using nonlocal Rayleigh theory, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 16, No. 5, pp. 19-28, 2016 (in Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.5.34.5]

شناخت صحیح رفتارها و ویژگی‌های مختلف مکانیکی، الکتریکی و فیزیکی آن می‌باشد. استفاده از نانوتیوب‌ها بیشتر به عنوان سنسورها، عملگرها و شتاب‌سنج‌ها بوده است که به همین دلیل از جنبه مکانیکی، رفتارهای کمانشی، پس‌کمانشی، انتشار موج، ضربه و ارتعاشات آزاد آن مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. برای نیل به این هدف، در اکثر پژوهش‌ها نانوتیوب‌ها بصورت میله مدل شده‌اند. در حوزه بررسی رفتار ارتعاشات آزاد نانوتیوب‌ها که می‌توان آن را در سه دسته مهم ارتعاشات عرضی، پیچشی و طولی جای داد پژوهش‌های قابل توجهی صورت گرفته است.

در حوزه بررسی ارتعاشات آزاد طولی نانومیله‌ها یا نانوتیوب‌ها می‌توان به بررسی اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات آزاد طولی نانومیله [4]، بررسی اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات آزاد طولی دو نانومیله متصل به یکدیگر [5]، بررسی اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات آزاد طولی نانوسیم‌های مخروطی [6]، بررسی اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات آزاد طولی نانوتیر ترکدار [7]، بررسی اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات آزاد طولی نانوتیوب‌های محصور در محیط الاستیک [8]، بررسی اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌های غیریکنواخت [9]، بررسی اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات آزاد محوری دو نانومیله ویسکوالاستیک متصل به یکدیگر [10]، بررسی اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات آزاد محوری نانوتیوب دولایه با در نظر گرفتن اثر نیروهای واندروالسی [11]، بررسی اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات آزاد محوری نانومیله هدفمند مخروطی [12] اشاره نمود. در تمامی مراجع اشاره، از تئوری الاستیسیته غیرمحلی به همراه ساده‌ترین تئوری بررسی ارتعاشات آزاد طولی میله‌ها (که اثر جابجایی‌های جانبی و تغییر شکل برشی را در نظر نمی‌گیرد) استفاده شده است. علاوه بر پژوهش‌های فوق، می‌توان به بررسی انتشار موج عرضی و طولی در نانوتیوب‌های محصور در محیط الاستیک با در نظر گرفتن اثرات سطحی [13]، بررسی انتشار موج طولی در نانومیله‌ها با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی [14]، تحلیل ارتعاشات آزاد طولی نانومیله‌های هدفمند با استفاده از تئوری گرادیان کرنش [15]، بررسی انتشار موج طولی در دو نانومیله متصل به یکدیگر با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی [16] اشاره نمود.

با توجه به پژوهش‌های انجام گرفته در مورد بررسی و تحلیل رفتار ارتعاشات طولی یا محوری نانوتیوب‌ها، نانومیله‌ها و نانوسیم‌ها، متوجه می‌شویم که تمامی پژوهش‌ها توجه خود را معطوف به ساده‌ترین تئوری (تئوری کلاسیک ارتعاشات آزاد طولی میله‌ها) موجود در این حوزه نموده‌اند. این تئوری که اثر جابجایی‌های جانبی نانومیله و تغییر شکل برشی را در نظر نمی‌گیرد بیشتر مناسب نانومیله‌های نازک می‌باشد. این در حالیست که نانوتیوب‌ها می‌توانند بصورت تک لایه یا چندلایه وجود داشته باشند یا نانومیله‌ها ضخیم باشند. در صورتی که یک نانوتیوب چندلایه مدنظر باشد (یک نانوتیوب چندلایه را می‌توان یک نانومیله ضخیم در نظر گرفت) آنگاه می‌توان انتظار داشت که اثر جابجایی‌های جانبی نانوتیوب (نانومیله) بر روی ارتعاشات طولی آن موثر باشد. تئوری‌ای که اثر جابجایی‌های جانبی را بر روی ارتعاشات طولی نانومیله‌ها در نظر می‌گیرد تئوری ریلی می‌باشد. اما توجه به این نکته ضروری است که استفاده از تئوری‌های محلی به دلیل در نظر نگرفتن اثر مقیاس کوچک، تئوری مناسبی نخواهند بود. به همین دلیل، در این پژوهش مشابه با بسیاری از پژوهش‌های انجام گرفته در حوزه نانو، از تئوری الاستیسیته غیرمحلی استفاده شده است. بدین منظور، در ابتدا معادلات حرکت و شرایط مرزی محلی یک نانومیله ضخیم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. سپس معادلات فوق از فضای محلی به فضای غیرمحلی تبدیل شده‌اند. در این تبدیل، معادله حرکت از یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم در فضای محلی تبدیل به یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم در فضای غیرمحلی می‌شود. این در حالیست که تنها دو شرط مرزی غیرمحلی برای تئوری غیرمحلی ریلی وجود دارد. در این شرایط، برای حل معادله حرکت از روش ریلی-ریتز استفاده شده و فرکانس‌های طبیعی نانومیله به ازای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد استخراج شده‌اند. سپس تاثیر طول نانومیله، قطر نانومیله، شماره فرکانس و مقدار پارامتر غیرمحلی بر روی فرکانس‌های غیرمحلی نانومیله ضخیم بررسی شده و با تاثیر پارامترهای فوق بر روی فرکانس‌های طبیعی نانومیله‌ای که براساس تئوری کلاسیک مدل شده‌اند مقایسه شده است. این مقایسه، تاثیر جابجایی‌های جانبی را در ارتعاشات طولی نانومیله‌ها مشخص می‌نماید.

2- استخراج معادله حرکت و شرایط مرزی

به منظور استخراج معادله حرکت و شرایط مرزی، نانومیله‌ای به طول L و با سطح مقطع دایره توخالی (که می‌تواند مدلی برای یک نانوتیوب چندلایه باشد) را در نظر بگیرید (شکل 1).

اگر مبداء دستگاه مختصات در مرکز سطح مقطع و در قسمت چپ نانومیله در نظر گرفته شود مولفه‌های جابجایی نانومیله در راستای سه محور مختصات را می‌توان بصورت روابط (1) تا (3) بیان نمود [17]:

$$u = u(x,t) \tag{1}$$

$$v = -\nu y \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{2}$$

$$w = -\nu z \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{3}$$

که u، v و w مولفه‌های جابجایی نانوتیوب به ترتیب در راستای محورهای x، y و z، ν نسبت پواسون و t زمان می‌باشد. براساس مولفه‌های جابجایی، مولفه‌های کرنش غیر صفر در هر نقطه از سطح مقطع نانومیله براساس تئوری ریلی بصورت روابط (4) و (5) بدست می‌آید:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{4}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \tag{5}$$

و مولفه‌های تنش متناظر با هر یک از مولفه‌های کرنش نیز بصورت

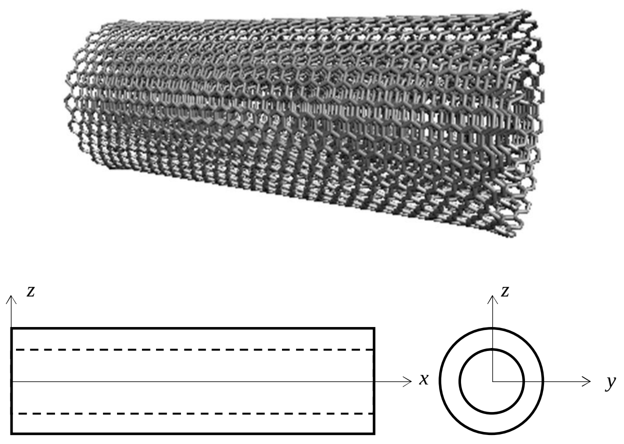

Fig. 1 Schematic of the nanorod geometry

شکل 1 شماتیک هندسه نانومیله

روابط (6) و (7) بیان می‌شود:

$$\sigma_{\mathrm{xx}} = E\varepsilon_{\mathrm{xx}} = E\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{6}$$

$$\sigma_{\mathrm{yy}} = \sigma_{\mathrm{zz}} = \sigma_{\mathrm{xy}} = \sigma_{\mathrm{xz}} = \sigma_{\mathrm{yz}} = 0 \tag{7}$$

در رابطه (6) E مدول الاستیسته می‌باشد، اکنون که مولفه‌های جابجایی، کرنش و تنش بدست آمده‌اند با استفاده از اصل همیلتون (رابطه 8) می‌توان معادله حرکت و شرایط مرزی را استخراج نمود.

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(P-T)dt = 0 \tag{8}$$

در رابطه (8) P انرژی پتانسیل و T انرژی جنبشی می‌باشد و به ترتیب بصورت روابط (9) و (10) بدست می‌آیند:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^V \sigma_{\mathrm{xx}}\varepsilon_{\mathrm{xx}}dV \tag{9}$$

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\int_0^V \rho\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right)dV = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l \rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^l \rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)^2 dx\end{aligned} \tag{10}$$

در رابطه (10) ρ دانسیته نانومیله، A سطح مقطع و $I_{\mathrm{P}} = \int_0^A (y^2+z^2)dA$ ممان اینرسی قطبی سطح مقطع می‌باشد. با قرار دادن روابط (9) و (10) در رابطه (8) و انجام انتگرال‌گیری جزء به جزء، معادله حرکت محلی و شرایط مرزی محلی به ترتیب بصورت روابط (11) و (12) بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial N_{\mathrm{xx}}}{\partial x} - \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2} = 0 \tag{11}$$

$$\left(N_{\mathrm{xx}} + \rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\right)\delta u\Big|_0^L = 0 \tag{12}$$

در روابط (11) و (12) N_{xx} منتجه تنش محوری محلی بوده و بصورت رابطه (13) تعریف می‌شود:

$$N_{\mathrm{xx}} = \int \sigma_{\mathrm{xx}}dA = EA\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{13}$$

به منظور تبدیل معادله حرکت و شرایط مرزی از فضای محلی به فضای غیرمحلی، روابط (11) و (12) در عبارت $(1-\mu\nabla^2)$ (که μ پارامتر غیرمحلی و ∇^2 اپراتور لاپلاسین یک بعدی می‌باشد) ضرب می‌شوند که حاصل آن عبارت است از:

$$\begin{aligned}(1-\mu\nabla^2)\frac{\partial N_{\mathrm{xx}}^{\mathrm{nl}}}{\partial x} + (1-\mu\nabla^2)\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2} \\ - (1-\mu\nabla^2)\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\end{aligned} \tag{14}$$

$$\left((1-\mu\nabla^2)N_{\mathrm{xx}}^{\mathrm{nl}} + (1-\mu\nabla^2)\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\right)\delta u\Big|_0^L = 0 \tag{15}$$

در روابط (14) و (15)، $N_{\mathrm{xx}}^{\mathrm{nl}}$ منتجه تنش غیرمحلی می‌باشد و رابطه آن با منتجه تنش محلی بصورت رابطه (16) بیان می‌شود:

$$(1-\mu\nabla^2)N_{\mathrm{xx}}^{\mathrm{nl}} = N_{\mathrm{xx}} = EA\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{16}$$

با قرار دادن رابطه (16) در روابط (14) و (15)، معادله حرکت و شرایط مرزی غیرمحلی فقط برحسب مولفه جابجایی بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}-EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\mu\rho A + \rho\nu^2 I_{\mathrm{P}})\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2} \\ + \mu\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial t^2} = 0\end{aligned} \tag{17}$$

$$\left(\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2} - \mu\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\frac{\partial^5 u}{\partial x^3\partial t^2} + EA\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta u\Big|_0^L = 0 \tag{18}$$

به منظور بررسی ارتعاشات آزاد نانومیله، جابجایی هارمونیک بصورت $u(x,t) = U(x)e^{i\omega t}$ در نظر گرفته می‌شود که ω فرکانس طبیعی محوری نانومیله می‌باشد. با جای‌گذاری جابجایی هارمونیک در روابط (17) و (18)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\mu\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\omega^2\frac{d^4 U}{dx^4} + (EA - (\mu\rho A + \rho\nu^2 I_{\mathrm{P}})\omega^2)\frac{d^2 U}{dx^2} \\ + \rho A\omega^2 U = 0\end{aligned} \tag{19}$$

$$\left((EA - \rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\omega^2)\frac{dU}{dx} + \mu\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\omega^2\frac{d^3 U}{dx^3}\right)\delta U\Big|_0^L = 0 \tag{20}$$

اگر در رابطه (19) پارامتر غیرمحلی برابر صفر قرار داده شود معادله مشخصه محلی [17] بدست می‌آید که در این صورت مقایسه معادله مشخصه محلی و غیرمحلی نشان می‌دهد که معادله مشخصه محلی، معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم برحسب جابجایی است اما معادله مشخصه غیرمحلی، معادله دیفرانسیلی مرتبه چهارم برحسب جابجایی است، این افزایش مرتبه معادله دیفرانسیل معادله مشخصه در حالیست که تعداد شرایط مرزی در هر دو حالت محلی و غیرمحلی یکسان است. بنابراین حل رابطه (19) با استفاده از روابط شرایط مرزی (رابطه (20)) بصورت دقیق امکان‌پذیر نمی‌باشد چرا که معادله دیفرانسیل مرتبه چهار نیازمند چهار شرط مرزی است اما رابطه (20) بیانگر دو شرط مرزی بیشتر نمی‌باشد. به همین دلیل، برای استخراج فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیله، از روش ریلی-ریتز استفاده شده است.

3- حل معادله مشخصه با استفاده از روش ریلی-ریتز

در ابتدا به منظور دستیابی به تحلیلی بهینه با استفاده از پارامترهای بی‌بعد $U^* = U/L$ و $X = x/L$ و ضرب طرفین معادله (19) در عبارت L/EA، رابطه (19) به صورت رابطه (21) بازنویسی می‌گردد

$$\begin{aligned}\frac{\mu\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\omega^2}{EAL^2}\frac{d^4 U^*}{dX^4} + \frac{d^2 U^*}{dX^2} - \frac{\mu\rho\omega^2}{E}\frac{d^2 U^*}{dX^2} \\ - \frac{\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\omega^2}{EA}\frac{d^2 U^*}{dX^2} + \frac{\rho L^2\omega^2}{E}U^* \\ = 0\end{aligned} \tag{21}$$

سپس با استفاده از روش باقی‌مانده وزنی، شکل ضعیف رابطه (21) بدست خواهد آمد. با ضرب کردن رابطه (21) در تابع وزنی $P(X)$ و انتگرال‌گیری در بازه 0 تا 1، رابطه (22) بدست می‌آید

$$\begin{aligned}\int_0^1\Bigg(\frac{\mu\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\omega^2}{EAL^2}\frac{d^4 U^*}{dX^4} + \frac{d^2 U^*}{dX^2} - \frac{\mu\rho\omega^2}{E}\frac{d^2 U^*}{dX^2} \\ - \frac{\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\omega^2}{EA}\frac{d^2 U^*}{dX^2} \\ + \frac{\rho L^2\omega^2}{E}U^*\Bigg)P(X)\,dX = 0\end{aligned} \tag{22}$$

با مساوی قرار دادن تابع وزنی در نظر گرفته شده با جابجایی طولی نانومیله، $P(X) = U^*(X)$، و انتگرال‌گیری جزء به جزء از رابطه (22)، رابطه (23) بدست می‌آید

$$\begin{aligned}\int_0^1\Bigg(\left(\frac{\partial U^*}{\partial X}\right)^2 - \frac{\rho L^2\omega^2}{E}U^{*2} - \frac{\mu\rho\omega^2}{E}\left(\frac{dU^*}{dX}\right)^2 \\ - \frac{\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\omega^2}{EA}\left(\frac{dU^*}{dX}\right)^2 \\ - \frac{\mu\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}\omega^2}{EAL^2}\left(\frac{d^2 U^*}{dX^2}\right)^2\Bigg)dX = 0\end{aligned} \tag{23}$$

با توجه به رابطه (23)، کسر ریلی به صورت رابطه (24) نوشته می‌شود

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.5.34.5]

$$\omega^2 = \frac{\int_0^1 \left[\frac{dU^*}{dX}\right]^2 dX}{\int_0^1 \left(\frac{\rho L^2}{E}[U^*]^2 + \left(\frac{\mu\rho}{E} + \frac{\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}}{EA}\right)\left[\frac{dU^*}{dX}\right]^2 + \frac{\mu\rho\nu^2 I_{\mathrm{P}}}{EAL^2}\left[\frac{d^2U^*}{dX^2}\right]^2\right) dX} \tag{24}$$

در روش ریلی-ریتز، ابتدا بایستی تابع شکل مناسبی برای مسئله مورد نظر در نظر گرفته شود به طوری‌که تابع شکل در نظر گرفته شده، از بین شرایط هندسی و طبیعی سازه، حداقل، شرایط مرزی هندسی را ارضا نماید که در این صورت به این توابع، توابع مجاز می‌گویند و در صورتی که تابع شکل مورد نظر تمامی شرایط مرزی مسئله را ارضا نماید به توابع شکل در نظر گرفته شده توابع مقایسه‌ای می‌گویند. به منظور استفاده از روش ریلی-ریتز تابع مجهول U به صورت یک سری از توابع چندجمله‌ای ساده به صورت $(X^{i-1}, i = 1,2, \dots, n)$ ضربدر توابع مربوط به شرایط مرزی که این توابع، شرایط مرزی هندسی ضروری نانومیله را ارضا می‌کنند، تعریف می‌شود. جابجایی محوری نانومیله می‌تواند به صورت رابطه (25) تعریف گردد [9].

$$U(X) = \sum_{k=1}^{N} c_k \hat{\phi}_k \tag{25}$$

که N تعداد ترم‌های مورد نیاز سری به منظور رسیدن به جواب دقیق، c_k ضرایب نامعلوم و $\hat{\phi}_k$ چندجمله‌ای‌های متعامد و نرمالایز می‌باشند که با استفاده از روش متعامدسازی گرام اشمیت محاسبه شده‌اند. توابع چندجمله‌ای متعامد و نرمالایز شده، در بازه $0 \le X \le 1$ تعریف شده و با کمک مجموعه‌ای از توابع مستقل خطی به‌صورت روابط (26)-(28) محاسبه می‌شوند [9].

$$\delta_k = l \times l_k \;\; ; \;\; k = 1,2,3, \dots, N \tag{26}$$

$$l = X^{\mathrm{m}}(1-X)^{\mathrm{n}} \tag{27}$$

$$l_k = X^{k-1} \;\; ; \;\; k = 1,2,3, \dots, N \tag{28}$$

در رابطه (27)، توان‌های m و n به ترتیب برای شرایط مرزی در $X = 0$ و $X = 1$ در نظر گرفته شده‌اند و به ازای شرایط مرزی آزاد و گیردار می‌توانند به ترتیب مقادیر 0 و 1 داشته باشند. چندجمله‌ای‌های متعامد و نرمالایز نیز به صورت رابطه (29) تعریف می‌شوند [9].

$$\phi_1 = \delta_1 \;\; ; \;\; \phi_k = \delta_k - \sum_{j=1}^{k-1} \psi_{kj}\phi_j \tag{29}$$

که تابع ψ_{kj} به صورت رابطه (30) تعریف می‌گردد [9]

$$\psi_{kj} = \frac{\langle \delta_k, \phi_j \rangle}{\langle \phi_j, \phi_j \rangle} \;\; ; \;\; k = 2,3, \dots, N; \; j = 1,2, \dots, k-1 \tag{30}$$

که در این‌جا $\langle \phi_i, \phi_j \rangle$ به ضرب داخلی دو تابع ϕ_i و ϕ_j اشاره دارد که به صورت رابطه (31) تعریف می‌گردد.

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_0^1 \phi_i(X)\phi_j(X)\, dX \tag{31}$$

نرمالایز تابع ϕ_i نیز به صورت رابطه (32) تعریف می‌شود

$$\hat{\phi}_i = \frac{\phi_i}{\|\phi_i\|} \tag{32}$$

که $\|\phi_i\|$ نرم تابع ϕ_i بوده و به صورت رابطه (33) تعریف می‌گردد

$$\|\phi_i\| = \int_0^1 {\phi_i}^2(X)\, dX \tag{33}$$

با قرار دادن رابطه (25) در رابطه (24) مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته به صورت رابطه (34) بدست می‌آید که حل آن فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات نانومیله را نتیجه می‌دهد

$$[K]\{U\} = \omega^2[M]\{U\} \tag{34}$$

در رابطه (34)، $[K]$ و $[M]$ به ترتیب ماتریس‌های سختی و جرم سیستم بوده و $\{U\}$ نیز بردار ضرایب نامعین نام دارد. بایستی اشاره نمود که استفاده از سری چندجمله‌ای‌های متعامد مشخصه مرزی به عنوان توابع مجاز در روش ریلی-ریتز سرعت همگرایی و پایداری پاسخ‌های بدست آمده را در روش‌های عددی به همراه دارد، که در ادامه نتایج همگرایی ارائه شده، شاهدی بر این ادعا خواهند بود.

4- اعتبارسنجی و دست‌آوردها

در پژوهش حاضر، فرکانس‌های طبیعی نانومیله از حل عددی به روش ریلی-ریتز توسط کدنویسی در نرم‌افزار متلب بدست آمده‌اند. شکل 2 همگرایی شش فرکانس ابتدایی یک نانومیله با شرایط مرزی گیردار-آزاد به طول 10 نانومتر را نشان می‌دهد. در این نمودار فرض شده است که قطر داخلی، قطر خارجی، پارامتر غیرمحلی، مدول الاستیسیته و نسبت پواسون به ترتیب برابر 1 نانومتر، 3 نانومتر، 2 نانومتر مربع، 0.97 گیگاپاسکال و 0.27 باشند. با توجه به شکل2 می‌توان نتیجه گرفت که روش حل ریلی-ریتز به همراه استفاده از روش متعامدسازی گرام-اشمیت، موجب همگرایی سریع فرکانس‌های نانومیله با افزایش درجه تقریب N می‌شود.

به منظور بررسی صحت و دقت معادلات حرکت و روش حل به کار رفته، نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج گزارش شده در سایر پژوهش‌ها مقایسه شده است. در این پژوهش اعتبارسنجی نتایج با استفاده از مراجع [6] و [17] انجام گرفته است. در مرجع [6] بررسی ارتعاشات محوری نانولوله با استفاده از تئوری غیرمحلی ساده صورت گرفته است و در مرجع [17] بررسی ارتعاشات محوری نانولوله با استفاده از تئوری محلی ریلی صورت گرفته است بنابراین می‌توان گفت که خلاء تحقیقاتی موجود بررسی اثرات همزمان تئوری ریلی و تئوری غیرمحلی می‌باشد که در ادامه به آن پرداخته شده است. جدول 1 مقایسه بین نتایج بدست آمده در مطالعه حاضر با نتایج کیانی [6] را نشان می‌دهد. فرکانس‌های گزارش شده در جدول 1، فرکانس‌های بی‌بعد به دست آمده براساس تئوری ساده ارتعاشات طولی و بدون در نظر گرفتن اثر جابجایی‌های جانبی بوده و به ازای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد و در دو فضای محلی و غیرمحلی مقایسه شده‌اند. جدول 2 نیز مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی محلی نانومیله با شرط مرزی گیردار-گیردار که با استفاده از تئوری محلی ریلی بدست آمده‌اند را نشان می‌دهد. نتایج گزارش شده در جدول‌های 1 و 2 نشان می‌دهند که نتایج روش حاضر با نتایج سایر پژوهش‌های انجام شده تطابق بسیار خوبی داشته که این امر نشان‌دهنده صحت معادلات حاکم بر حرکت و روش حل مورد استفاده در پژوهش حاضر می‌باشد. به‌منظور ارائه نتایج جدید و بررسی تاثیر جابجایی‌های جانبی بر روی فرکانس‌های غیرمحلی نانومیله‌ها، در ابتدا چهار نسبت فرکانسی به گونه‌ای تعریف شده‌اند که اثرات فضای غیرمحلی تئوری ساده، فضای محلی تئوری ریلی و فضای غیرمحلی تئوری ریلی را نسبت به فضای محلی تئوری ساده و ریلی نشان دهد. این چهار نسبت فرکانسی به صورت روابط (35) تعریف شده‌اند. در نتایج ارائه شده چگالی نانومیله 2260 کیلوگرم بر مترمکعب، مدول الاستیسیته 0.97 تراپاسکال و نسبت پواسون 0.27 فرض شده‌اند[18] (این مقادیر، خواص نانوتیوب است).

در جدول 3، اثر جابجایی‌های جانبی نانومیله بر روی فرکانس‌های محلی و غیرمحلی محوری آن به ازای مقادیر مختلف طول نانومیله و شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار- آزاد بررسی شده است. بدین منظور قطر خارجی و داخلی نانومیله به ترتیب برابر 3 و 1 نانومتر در نظر گرفته شده و برای پارامتر

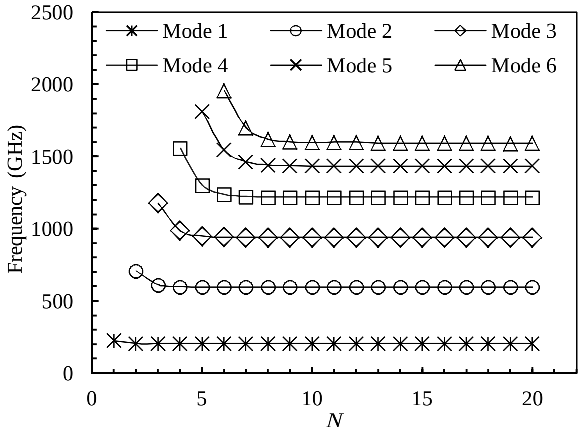

Fig. 2 Convergence of first six natural frequencies for a clamped-free nanorod

شکل 2 همگرایی شش فرکانس طبیعی اول نانومیله گیردار- آزاد

جدول 1 مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد محلی و غیرمحلی نانومیله گیردار-گیردار و گیردار-آزاد با استفاده از تئوری ساده

Table 1 Comparison of local and nonlocal dimensionless natural frequencies of clamped-clamped and clamped-free nanorods using simple theory

پارامتر غیرمحلی (nm^2)	شماره فرکانس	شرط مرزی گیردار-گیردار: کیانی [6]	شرط مرزی گیردار-گیردار: پژوهش حاضر	شرط مرزی گیردار-آزاد: کیانی [6]	شرط مرزی گیردار-آزاد: پژوهش حاضر
0	1	3.142	3.142	1.571	1.571
	2	6.283	6.283	4.712	4.712
	3	9.425	9.425	7.854	7.854
	4	12.566	12.566	10.996	10.996
	5	15.708	15.708	14.137	14.137
6.25	1	2.997	2.997	1.552	1.552
	2	5.320	5.320	4.263	4.263
	3	6.859	6.859	6.177	6.177
	4	7.825	7.825	7.398	7.398
	5	8.436	8.436	8.164	8.164

جدول 2 مقایسه فرکانس‌های طبیعی محلی نانومیله با شرط مرزی گیردار-گیردار با استفاده از تئوری ریلی

Table 2 Comparison of local natural frequencies of clamped-clamped nanorod using Rayleigh theory

شماره فرکانس	رائو [17]	پژوهش حاضر
1	414.047	414.047
2	826.314	826.314
3	1235.062	1235.062
4	1638.622	1638.622
5	2035.434	2035.434

غیرمحلی مقدار ثابتی برابر با 2 نانومتر مربع در نظر گرفته شده است. طول نانومیله نیز از 15 نانومتر تا 70 نانومتر تغییر داده شده است. داده‌های جدول 3 شامل فرکانس اول محلی نانومیله براساس تئوری‌های ساده و ریلی به همراه چهار نسبت فرکانسی تعریف شده در رابطه (35) می‌باشد. با توجه به نتایج ارائه شده در جدول 3 مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر مختلف برای طول نانومیله، تمامی نسبت‌های فرکانسی مقداری کم‌تر از یک را دارا هستند.

$$FR_1 = \frac{\text{فرکانس غیرمحلی براساس تئوری ساده (NLS)}}{\text{فرکانس محلی براساس تئوری ساده (LS)}}$$

$$FR_2 = \frac{\text{فرکانس محلی براساس تئوری ریلی(LR)}}{\text{فرکانس محلی براساس تئوری ساده (LS)}}$$

$$FR_3 = \frac{\text{فرکانس غیرمحلی براساس تئوری ریلی (NLR)}}{\text{فرکانس محلی براساس تئوری ساده (LS)}}$$

$$FR_4 = \frac{\text{فرکانس غیرمحلی براساس تئوری ریلی (NLR)}}{\text{فرکانس محلی بر اساس تئوری ریلی (LR)}} \quad (35)$$

این امر بیانگر این است که هر دو عامل پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی دارای تاثیر کاهشی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله‌ها می‌باشند. نکته دیگری که جدول 3 نشان می‌دهد این است که با افزایش طول نانومیله، مقدار تمامی نسبت‌های فرکانسی افزایش می‌یابد و به سمت عدد یک میل می‌کنند. افزایش نسبت‌های فرکانسی نشان‌دهنده کاهش تاثیر پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله می‌باشد. کاهش تاثیر پارامتر غیرمحلی را می‌توان ناشی از کاهش وابستگی فرکانس‌های نانومیله به ابعاد آن دانست و کاهش تاثیر جابجایی‌های جانبی نیز ناشی از نازک شدن نانومیله بدلیل افزایش طول و ثابت ماندن قطر آن می‌باشد. مقایسه نسبت‌های فرکانسی اول، دوم و سوم در جدول 3 نشان می‌دهد وقتی تاثیر همزمان پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی در نظر گرفته شود (نسبت فرکانسی سوم) تاثیر کاهشی آنها با مجموع تاثیر کاهشی عوامل فوق وقتی بصورت جداگانه در نظر گرفته شده باشند (نسبت‌های فرکانسی اول و دوم) اندکی متفاوت است. این امر نشان دهنده این است که دو عامل پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی بر روی یکدیگر تاثیر گذارند (در رابطه (19)، این دو عامل بصورت حاصلضرب در یکدیگر ظاهر شده‌اند). از جدول 3 نکته جالب دیگری نیز برداشت می‌شود و آن این‌که، مقادیر نسبت‌های فرکانسی اول و چهارم با یکدیگر برابرند. این برابری نسبت‌های فرکانسی اول و چهارم بیان کننده این مطلب است که پارامتر غیرمحلی، فرکانس‌های محوری نانومیله را وقتی براساس تئوری ریلی بدست آمده باشد (تاثیر جابجایی‌های جانبی در نظر گرفته شده باشد) با درصدی کاهشی می‌دهد که فرکانس‌های فوق براساس تئوری ساده بدست آمده باشند. اهمیت این موضوع در این است که اگر فرکانس‌های محلی و غیرمحلی نانومیله بر-اساس تئوری ساده به همراه فرکانس‌های محلی نانومیله براساس تئوری ریلی در دسترس باشد به راحتی می‌توان فرکانس‌های محوری غیرمحلی نانومیله را براساس تئوری ریلی تعیین نمود. نکته پایانی قابل ذکر از جدول 3 این است که در حالی‌که فرکانس‌های محلی نانومیله به ازای شرط مرزی گیردار-گیردار از شرط مرزی گیردار-آزاد بیشتر است اما نسبت‌های فرکانسی شرط مرزی گیردار-گیردار از شرط مرزی گیردار-آزاد کم‌تر است. کم‌تر بودن مقادیر نسبت‌های فرکانسی نانومیله با شرط مرزی گیردار-گیردار نسبت به شرط مرزی گیردار-آزاد نشان‌دهنده این مطلب است که تاثیر کاهشی جابجایی‌های جانبی و پارامتر غیرمحلی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله با شرط مرزی گیردار-گیردار بیشتر از شرط مرزی گیردار-آزاد می‌باشد.

به منظور بررسی اثر ضخامت نانومیله بر روی ارتعاشات طولی با در نظر گرفتن اثرات غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی، جدول 4 و شکل 3 تهیه شده است. در جدول 4 و شکل 3 طول نانومیله 20 نانومتر، قطر داخلی آن 1 نانومتر و قطر خارجی آن از 3 نانومتر با گام 0.335 نانومتر (معادل با ضخامت یک نانوتیوب تک جداره) تا 7.02 نانومتر در نظر گرفته شده است. در جدول 4، فرکانس اول محلی نانومیله براساس تئوری‌های ساده و ریلی به همراه چهار نسبت فرکانسی تعریف شده در رابطه (35) به ازای مقادیر مختلف برای قطر خارجی نانومیله لیست شده است. در ابتدا، نتایج جدول 4 مجددا دو نتیجه‌ای که پیشتر در جدول 3 به آن اشاره شده بود را تایید

جدول 3 فرکانس اول محلی محوری نانومیله براساس تئوری‌های ساده و ریلی و نسبت‌های فرکانسی به ازای مقادیر مختلف برای طول نانومیله و شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار- آزاد

Table 3 Fundamental local axial frequencies of nanorod based on simple and Rayleigh theories and frequency ratios for various nanorod lengths, and clamped-clamped and clamped-free boundary conditions

شرط مرزی گیردار-آزاد						شرط مرزی گیردار-گیردار						
FR_4	FR_3	FR_2	FR_1	فرکانس محلی ریلی (GHz)	فرکانس محلی ساده (GHz)	FR_4	FR_3	FR_2	FR_1	فرکانس محلی ریلی (GHz)	فرکانس محلی ساده (GHz)	طول (nm)
0.9892	0.9887	0.9995	0.9892	345.11	345.29	0.9588	0.9569	0.9980	0.9588	689.20	690.57	15.0
0.9920	0.9917	0.9996	0.9920	295.85	295.96	0.9693	0.9678	0.9985	0.9693	591.05	591.92	17.5
0.9939	0.9936	0.9997	0.9939	258.89	258.97	0.9762	0.9751	0.9989	0.9762	517.35	517.93	20.0
0.9952	0.9949	0.9998	0.9952	230.14	230.19	0.9811	0.9802	0.9991	0.9811	459.97	460.38	22.5
0.9961	0.9959	0.9998	0.9961	207.14	207.17	0.9846	0.9839	0.9993	0.9846	414.05	414.34	25.0
0.9968	0.9966	0.9999	0.9968	188.31	188.34	0.9872	0.9866	0.9994	0.9872	376.45	376.68	27.5
0.9973	0.9971	0.9999	0.9973	172.62	172.64	0.9892	0.9887	0.9995	0.9892	345.11	345.29	30.0
0.9980	0.9979	0.9999	0.9980	147.97	147.98	0.9920	0.9917	0.9996	0.9920	295.85	295.96	35.0
0.9985	0.9984	0.9999	0.9985	129.47	129.48	0.9939	0.9936	0.9997	0.9939	258.89	258.97	40.0
0.9988	0.9987	0.9999	0.9988	115.09	115.10	0.9952	0.9949	0.9998	0.9952	230.14	230.19	45.0
0.9990	0.9990	1.0000	0.9990	103.58	103.59	0.9961	0.9959	0.9998	0.9961	207.14	207.17	50.0
0.9993	0.9993	1.0000	0.9993	86.32	86.32	0.9973	0.9971	0.9999	0.9973	172.62	172.64	60.0
0.9995	0.9995	1.0000	0.9995	73.99	73.99	0.9980	0.9979	0.9999	0.9980	147.97	147.98	70.0

می‌کند. اول این‌که، درصد تاثیرگذاری پارامتر غیرمحلی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله‌ای که براساس تئوری ریلی مدل شده است برابر است با درصد تاثیرگذاری آن بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله‌ای که براساس تئوری ساده مدل شده باشد. و دوم این‌که، تاثیرگذاری دو عامل پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله با شرط مرزی گیردار-گیردار بیشتر از شرط مرزی گیردار-آزاد می‌باشد. علاوه بر این، جدول 4 نشان می‌دهد که وابستگی فرکانس‌های محوری نانومیله با شرط مرزی گیردار-گیردار به جابجایی‌های جانبی، بیشتر از وابستگی فرکانس‌های محوری نانومیله با شرط مرزی گیردار-آزاد می‌باشد. به نحوی که، با افزایش ضخامت نانومیله، فرکانس‌های نانومیله با شرط مرزی گیردار-گیردار با شدت

جدول 4 فرکانس‌های اول محلی محوری نانومیله براساس تئوری‌های ساده و ریلی و نسبت‌های فرکانسی به ازای مقادیر مختلف برای قطر خارجی نانومیله و شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد

Table 4 Fundamental local axial frequencies of nanorod based on simple and Rayleigh theories and frequency ratios for various nanorod external diameter values, and clamped-clamped and clamped-free boundary conditions

شرط مرزی گیردار-آزاد						شرط مرزی گیردار-گیردار						
FR_4	FR_3	FR_2	FR_1	فرکانس محلی ریلی (GHz)	فرکانس محلی ساده (GHz)	FR_4	FR_3	FR_2	FR_1	فرکانس محلی ریلی (GHz)	فرکانس محلی ساده (GHz)	قطر خارجی (nm)
0.9939	0.9936	0.9997	0.9939	258.89	258.97	0.9762	0.9751	0.9989	0.9762	517.35	517.93	3.000
0.9939	0.9935	0.9997	0.9939	258.88	258.97	0.9762	0.9749	0.9986	0.9762	517.23	517.93	3.335
0.9939	0.9935	0.9996	0.9939	258.86	258.97	0.9762	0.9746	0.9984	0.9762	517.09	517.93	3.670
0.9939	0.9934	0.9995	0.9939	258.84	258.97	0.9762	0.9743	0.9981	0.9762	516.94	517.93	4.005
0.9939	0.9933	0.9994	0.9939	258.82	258.97	0.9762	0.9740	0.9978	0.9762	516.78	517.93	4.340
0.9939	0.9933	0.9994	0.9939	258.80	258.97	0.9762	0.9737	0.9974	0.9762	516.61	517.93	4.675
0.9939	0.9932	0.9993	0.9939	258.78	258.97	0.9762	0.9734	0.9971	0.9762	516.42	517.93	5.010
0.9939	0.9931	0.9992	0.9939	258.75	258.97	0.9762	0.9730	0.9967	0.9762	516.22	517.93	5.345
0.9939	0.9930	0.9991	0.9939	258.72	258.97	0.9762	0.9726	0.9963	0.9762	516.00	517.93	5.680
0.9939	0.9929	0.9990	0.9939	258.70	258.97	0.9762	0.9721	0.9958	0.9762	515.78	517.93	6.015
0.9939	0.9927	0.9988	0.9939	258.67	258.97	0.9762	0.9717	0.9954	0.9762	515.54	517.93	6.350
0.9939	0.9926	0.9987	0.9939	258.63	258.97	0.9762	0.9712	0.9949	0.9762	515.29	517.93	6.685
0.9939	0.9925	0.9986	0.9939	258.60	258.97	0.9762	0.9707	0.9944	0.9762	515.03	517.93	7.020

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.5.34.5]

بیشتری نسبت به فرکانس‌های نانومیله با شرط مرزی گیردار-آزاد کاهش می‌یابند. مقادیر نسبت‌های فرکانسی اول و چهارم در جدول 4 نشان می‌دهند که تاثیر پارامتر غیرمحلی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله مدل شده براساس هر دو تئوری ساده و ریلی، به ازای یک مقدار مشخص برای طول نانومیله مستقل از ضخامت آن می‌باشد. این در حالیست که تاثیر پارامتر غیرمحلی وابسته به طول نانومیله بوده است. نکته پایانی از جدول 4 نیز عبارت است از این‌که نتایج نسبت فرکانسی دوم و سوم نشان می‌دهد که همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش ضخامت نانومیله، تاثیر جابجایی‌های جانبی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله افزایش می‌یابد. در ادامه بررسی تاثیر جابجایی‌های جانبی نانومیله بر روی فرکانس‌های غیرمحلی آن به ازای ضخامت‌های مختلف، شکل 3 تهیه شده است. در شکل3، تغییرات نسبت‌های فرکانسی سوم و چهارم به ازای مقادیر مختلف برای قطر خارجی نانومیله و شماره مودهای اول، سوم و پنجم رسم شده است. شکل 3 نشان می‌دهد که تاثیر کاهشی هر دو عامل پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی در شماره فرکانس‌های بالاتر بیشتر می‌شود و میزان این افزایش برای نانومیله با شرط مرزی گیردار-گیردار بیشتر است. علاوه بر این، مقایسه منحنی‌های نسبت‌های فرکانسی سوم و چهارم (به طور ویژه به ازای مقادیر کوچک قطر خارجی) نشان می‌دهد که تاثیرپذیری پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی از یکدیگر، در شماره فرکانس‌های بالاتر بیشتر می‌شود. این نتیجه‌گیری می‌تواند یکی از دلایل اهمیت در نظر گرفتن جابجایی‌های جانبی در بررسی ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌ها باشد. نکته پایانی قابل مشاهده از شکل 3 این است که به ازای تمامی شماره‌های فرکانسی، در ضخامت‌های کوچک، اثر کاهشی پارامتر غیر محلی یک اثر غالب می‌باشد و با افزایش ضخامت نانومیله، اثر کاهشی جابجایی‌های جانبی نیز افزایش می‌یابد بطوری- که برای نانومیله با ضخامت‌های زیاد، اثر هر دو عامل پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی غالب می‌شود هر چند نرخ افزایش تاثیر پارامتر غیرمحلی بیشتر از عامل جابجایی‌های جانبی است. قابل ذکر است که نتایج شکل 3 به ازای پارامتر غیرمحلی برابر با 2 نانومتر مربع ارائه شده است که به منظور بررسی دقیق‌تر غالب بودن یا نبودن هر یک از عوامل پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی، در ادامه تاثیر مقدار پارامتر غیرمحلی علاوه بر تاثیر جابجایی‌های جانبی بر روی رفتار ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

در بخش انتهایی این پژوهش، اثر جابجایی‌های جانبی نانومیله بر روی رفتار ارتعاشات آزاد محوری آن به ازای مقادیر مختلف برای پارامتر غیرمحلی و به ازای شماره فرکانس‌های متفاوت بررسی شده است. بدین منظور، در شکل 4 تغییرات نسبت فرکانسی دوم، سوم و چهارم به ازای مقادیر مختلف برای پارامتر غیرمحلی و به ازای سه شماره فرکانس اول، سوم و پنجم رسم شده است. مقادیر هندسی نانومیله که به ازای آن شکل 4 رسم شده است عبارت است از: طول 10 نانومتر، قطر داخلی 1 نانومتر، و قطر خارجی 2.657 نانومتر. اولین نتیجه‌ای که شکل 4 نشان می‌دهد این است که با افزایش مقدار پارامتر غیر محلی، اثر کاهشی آن افزایش می‌یابد و این افزایش، در شماره فرکانس‌های بالاتر و به ازای شرایط مرزی سفت‌تر بیشتر است. مقایسه ستون‌های مربوط به نسبت‌های فرکانسی دوم، سوم و چهارم نشان می‌دهد که هر چه مقدار پارامتر غیرمحلی بیشتر باشد از اثر کاهشی جابجایی‌های جانبی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله کاسته می‌شود. به بیان دیگر، پارامتر غیرمحلی، اثر جابجایی‌های جانبی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله را کاهش می‌دهد. نکته دیگری که در شکل 4 مشاهده می‌شود این است که به ازای تمامی مقادیر در نظر گرفته شده برای پارامتر غیرمحلی (1، 2، 3 و 4 نانومتر مربع) اثر کاهشی پارامتر غیر محلی نسبت به اثر کاهشی جابجایی‌های جانبی، یک اثر غالب است. با توجه به این‌که به ازای مقدار پارامتر غیرمحلی برابر صفر، اثر جابجایی‌های جانبی غالب می‌شود می‌توان انتظار داشت که به ازای مقادیر مشخصی از پارامتر غیرمحلی، عوامل پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی دارای تاثیر تقریبا یکسانی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله باشند. قابل ذکر است با توجه به این‌که در جداول 3 و 4 و شکل 4 نشان داده شد که تاثیر جابجایی‌های جانبی وابسته به طول، ضخامت و شماره فرکانس می‌باشد تعیین محدوده‌ای برای پارامتر غیرمحلی که به ازای آن، دو عامل پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی دارای تاثیر نزدیک به یکدیگر باشند تقریبا مشکل و زمان‌بر است. با این وجود، در جدول 5 مقادیر پارامتر غیرمحلی که به ازای آن‌ها تاثیر پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی نزدیک به یکدیگر است به ازای مقادیر

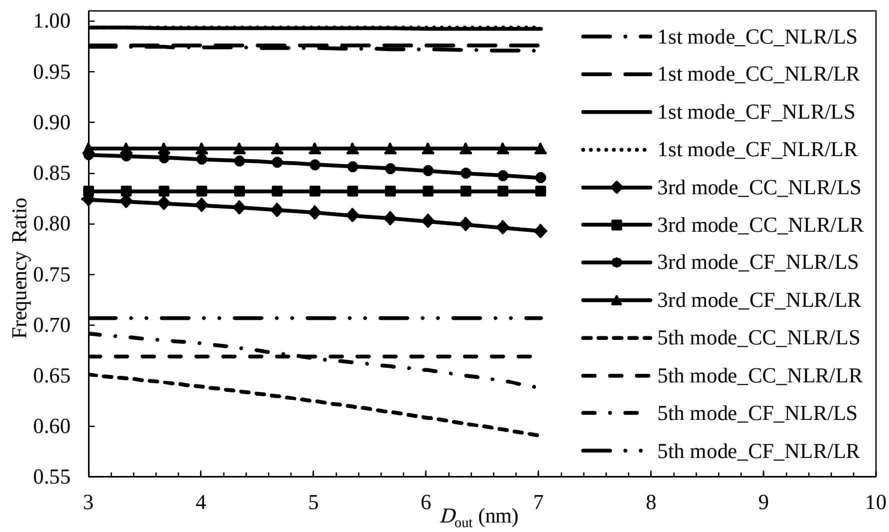

Fig. 3 Variations of third and fourth frequency ratios versus different values of outer diameter of nanorod for first, third and fifth natural frequencies

شکل 3 تغییرات نسبت‌های فرکانسی سوم و چهارم به ازای مقادیر مختلف برای قطر خارجی و شماره مودهای اول، سوم و پنجم نانولوله

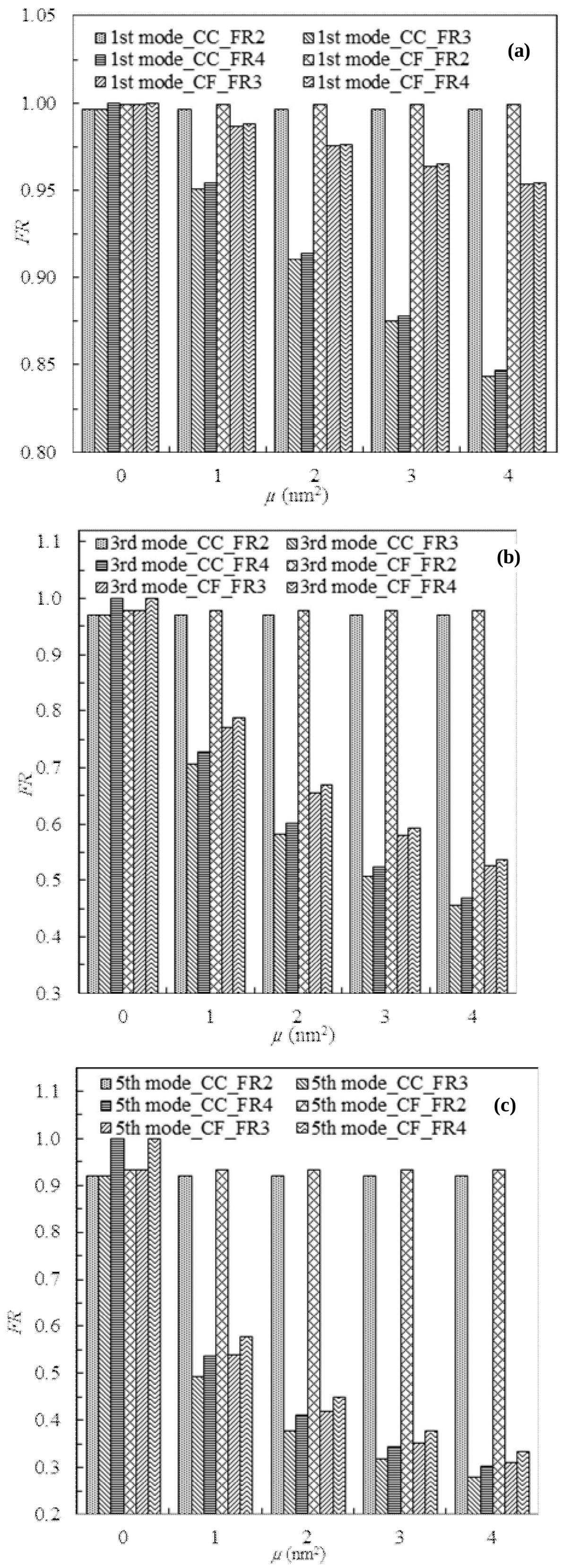

Fig. 4 Variations of second, third and fourth frequency ratios versus different values of nonlocal parameters for (a) first, (b) second and third mode numbers

شکل 4 تغییرات نسبت‌های فرکانسی دوم و سوم و چهارم به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی برای شماره مودهای (a) اول، (b) سوم و (c) پنجم

مختلف شماره فرکانس، طول و ضخامت نانومیله لیست شده است.

از جدول 5 نتایج زیر قابل اشاره می‌باشد:

- به ازای یک مقدار ثابت برای قطر نانومیله و به ازای یک شماره فرکانس مشخص، برای آنکه به ازای هر مقدار برای طول نانومیله، تاثیر کاهشی جابجایی‌های جانبی با تاثیر کاهشی پارامتر غیرمحلی تقریبا برابر باشد، فقط نیاز به یک مقدار ثابت برای پارامتر غیرمحلی می‌باشد. این امر به این دلیل است که با افزایش طول نانومیله، تاثیر هر دو عامل جابجایی‌های جانبی (بدلیل نازک شدن نانومیله) و پارامتر غیرمحلی (بدلیل کاهش وابستگی به ابعاد نانومیله) کاهش می‌یابد.
- به ازای یک مقدار ثابت برای طول نانومیله و به ازای یک شماره فرکانس مشخص، برای آنکه به ازای هر مقدار برای قطر نانومیله، تاثیر کاهشی جابجایی‌های جانبی با تاثیر کاهشی پارامتر غیرمحلی تقریبا برابر باشد، با افزایش قطر نانومیله نیاز به یک مقدار بزرگتر برای پارامتر غیرمحلی می‌باشد. دلیل این پدیده نیز این است که همان طور که در جدول 4 نشان داده شد تاثیر پارامتر غیرمحلی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله مستقل از قطر آن می‌باشد اما تاثیر جابجایی‌های جانبی با افزایش قطر نانومیله افزایش می‌یابد. بنابراین، برای آنکه با افزایش قطر نانومیله تاثیر کاهشی پارامتر غیرمحلی با تاثیر کاهشی جابجایی‌های جانبی یکسان شود نیاز به پارامتر غیرمحلی با مقدار بزرگ‌تر می‌باشد.
- نکته پایانی اینکه، به ازای یک مقدار ثابت برای طول و قطر نانومیله، برای آنکه به ازای هر شماره فرکانسی، تاثیر کاهشی برای آنکه به ازای هر شماره فرکانسی، تاثیر کاهشی جابجایی‌های جانبی با تاثیر کاهشی پارامتر غیرمحلی تقریبا برابر باشد، فقط نیاز به یک مقدار ثابت برای پارامتر غیرمحلی می‌باشد که دلیل آن مشابه با دلیل توضیح داده شده برای حالت اول می‌باشد. اهمیت داده‌های ارائه شده در جدول 5 این است که مروری بر منابع نشان می‌دهد، تاکنون مقدار مشخص و ثابتی برای پارامتر غیرمحلی گزارش نشده است بلکه همواره محدوده‌ای برای

جدول 5 مقدارهای پارامتر غیرمحلی که به ازای آن‌ها تاثیر کاهشی پارامتر غیرمحلی با تاثیر کاهشی جابجایی‌های جانبی بر روی فرکانس‌های طبیعی محوری نانومیله‌ها یکسان می‌شود

Table 5 Nonlocal parameter values that they show the same decreasing effect as the inertia of the lateral motions on natural axial frequencies of nanorods has

پارامتر غیرمحلی (nm^2)	FR_4	FR_2	شماره فرکانس	قطر خارجی (nm)	طول (nm)
0.24	0.9884	0.9885	1	5	10
0.24	0.9948	0.9948	1	5	15
0.24	0.9971	0.9971	1	5	20
0.24	0.9981	0.9981	1	5	25
0.24	0.9987	0.9987	1	5	30
0.24	0.9993	0.9993	1	5	40
0.24	0.9997	0.9997	1	5	60
0.24	0.9971	0.9971	1	5	20
0.46	0.9944	0.9944	1	7	20
0.75	0.9909	0.9909	1	9	20
1.11	0.9866	0.9866	1	11	20
0.24	0.9884	0.9885	2	5	20
0.24	0.9557	0.9563	4	5	20
0.24	0.9079	0.9089	6	5	20
0.24	0.8516	0.8531	8	5	20
0.24	0.7925	0.7944	10	5	20

این پارامتر در نظر گرفته شده است. بنابراین در آینده‌ای نزدیک با پیشرفت علم و انجام آزمایشات بیشتر و دقیق‌تر بر روی سازه‌های نانومقیاس، با مقایسه این نتایج با نتایج تجربی می‌توان به اهمیت در نظر گرفتن عواملی مانند جابجایی‌های جانبی و پارامتر غیرمحلی و هم‌چنین میزان غالب بودن هر یک از آن¬ها در مقایسه با یکدیگر پی برد. این دستاورد کمک شایانی به طراحی دقیق‌تر سیستم‌های نانوالکترومکانیکی از جنبه مدل¬سازی تئوری خواهد نمود.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تاثیر جابجایی‌های جانبی بر روی ارتعاشات آزاد محوری نانومیله‌ها در فضای الاستیسیته غیرمحلی بررسی شده است. بدین منظور، از تئوری غیرمحلی ریلی استفاده شده و معادله حرکت و شرایط مرزی با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌اند. با توجه به اینکه، تبدیل معادله حرکت از فضای محلی به فضای غیرمحلی سبب شده است که مرتبه معادله حرکت نسبت به جابجایی از مرتبه دو به مرتبه چهار افزایش مرتبه دهد در حالیکه تعداد شرایط مرزی به همان تعداد شرایط مرزی محلی باقی می‌ماند از روش ریلی-ریتز برای استخراج فرکانس‌های طبیعی سیستم استفاده شده است. نتایج بدست آمده را به طور کلی می‌توان به صورت زیر تقسیم‌بندی نمود:

- برای نانومیله با شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد تاثیر پارامتر غیرمحلی بر روی فرکانس‌های طبیعی مستقل از تاثیر جابجایی‌های جانبی بوده اما تاثیر جابجایی‌های جانبی وابسته به مقدار پارامتر غیرمحلی می‌باشد. این وابستگی به نحوی است که هر چه مقدار پارامتر غیرمحلی بیشتر باشد تاثیر جابجایی‌های جانبی کم‌تر می‌شود، و این تاثیر، در شماره فرکانس‌های بالاتر، بیشتر است.
- هر یک از عوامل پارامتر غیرمحلی و جابجایی‌های جانبی در شرایط خاصی می‌توانند تاثیر غالبی نسبت به عامل دیگر بر روی فرکانس‌های طبیعی نانومیله داشته باشند، که این شرایط بستگی به مقدار پارامتر غیرمحلی و شماره فرکانس دارد.
- تاثیر جابجایی‌های جانبی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله با شرط مرزی گیردار-گیردار بیشتر از فرکانس‌های محوری نانومیله با شرط مرزی گیردار-آزاد می‌باشد. به گونه‌ای که، افزایش ضخامت نانومیله، فرکانس‌های نانومیله با شرط مرزی گیردار-گیردار را با شدت بیشتری نسبت به فرکانس‌های نانومیله با شرط مرزی گیردار-آزاد کاهش می‌دهد. در واقع، فرکانس‌های محلی نانومیله به ازای شرط مرزی گیردار-گیردار از شرط مرزی گیردار-آزاد بیشتر است اما نسبت‌های فرکانسی شرط مرزی گیردار-گیردار از شرط مرزی گیردار-آزاد کم‌تر است.
- درصد تاثیرگذاری پارامتر غیرمحلی بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله‌ای که براساس تئوری ریلی مدل شده است برابر است با درصد تاثیرگذاری آن بر روی فرکانس‌های محوری نانومیله‌ای که براساس تئوری ساده مدل شده باشد.
- به علت عدم وابستگی اثر پارامتر غیر محلی به قطر نانولوله، به ازای یک هندسه ثابت برای نانولوله (به جز قطر نانولوله) و به ازای یک شماره فرکانس مشخص، برای آنکه به ازای هر مقدار برای قطر نانومیله، تاثیر کاهشی جابجایی‌های جانبی با تاثیر کاهشی پارامتر غیرمحلی تقریبا برابر باشد، نیاز به یک مقدار بزرگتر برای پارامتر غیرمحلی می‌باشد.

نتایج این پژوهش می‌تواند در طراحی دقیق‌تر سیستم‌های نانوالکترومکانیکی ای که در آن‌ها از نانوتیوب‌ها استفاده می‌شود موثر باشد.

6- فهرست علایم

A	مساحت سطح مقطع (m^2)
D	قطر نانومیله
E	مدول الاستیسیته نانولوله ($N.m^{-2}$)
i	متغییر موهومی
I_P	ممان اینرسی قطبی سطح مقطع (m^4)
K	ماتریس سختی سیستم
L	طول نانولوله (m)
M	ماتریس جرم سیستم
N	تعداد ترم‌های مورد نیاز سری
P	انرژی پتانسیل ($N\cdot m$)
T	انرژی جنبشی ($N\cdot m$)
t	زمان (s)
U^*	متغییر بی‌بعد جابجایی در راستای x
u	مولفه جابجایی نانولوله در راستای طولی (m)
V	حجم نانولوله (m^3)
v	مولفه جابجایی نانولوله در راستای طولی (m)
w	مولفه جابجایی نانولوله در راستای طولی (m)
X	متغییر بی‌بعد در راستای x
x	راستای محور نانولوله (m)
y	راستای درون صفحه نانولوله (m)
z	راستای درون صفحه نانولوله (m)

علایم یونانی

Ε	کرنش طولی نانومیله
ρ	دانسیته نانولوله ($kg\cdot m^{-3}$)
μ	پارامتر غیر محلی (m2)
ν	نسبت پواسون
∇^2	اپراتور لاپلاسین یک بعدی
ϕ	ترم‌های چندجمله‌های متعامد
$\hat{\phi}$	ترم‌های چندجمله‌های متعامد نرمالایز
ω	فرکانس طبیعی طولی نانولوله (s-1)

زیرنویس‌ها

i	شماره ترم‌های سری چندجمله‌ای متعامد
j	شماره ترم‌های سری چندجمله‌ای متعامد
k	شماره ترم‌های سری مربوط به جابجایی طولی نانومیله
x	راستای طولی نانومیله

بالانویس‌ها

m	شرط مرزی ابتدای نانومیله
n	شرط مرزی انتهای نانومیله
nl	غیرمحلی

7- مراجع

[1] J.-P. Salvetat, J.-M. Bonard, N. Thomson, A. Kulik, L. Forro, W. Benoit, L. Zuppiroli, Mechanical properties of carbon nanotubes, *Applied Physics A*, Vol. 69, No. 3, pp. 255-260, 1999 .

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.5.34.5]

[2] T. Ebbesen, H. Lezec, H. Hiura, J. Bennett, H. Ghaemi, T. Thio, Electrical conductivity of individual carbon nanotubes, *Nature*, Vol. 382, No. 6586, pp. 54-56, 1996.

[3] Y. Ando, X. Zhao, H. Shimoyama, G. Sakai, K. Kaneto, Physical properties of multiwalled carbon nanotubes, *International journal of inorganic materials*, Vol. 1, No. 1, pp. 77-82, 1999 .

[4] M. Aydogdu, Axial vibration of the nanorods with the nonlocal continuum rod model, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 41, No. 5, pp. 861-864, 2009 .

[5] T. Murmu, S. Adhikari, Nonlocal effects in the longitudinal vibration of double-nanorod systems, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 43, No. 1, pp. 415-422, 2010 .

[6] K. Kiani, Free longitudinal vibration of tapered nanowires in the context of nonlocal continuum theory via a perturbation technique, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 43, No. 1, pp. 387-397, 2010 .

[7] J.-C. Hsu, H.-L. Lee, W.-J. Chang, Longitudinal vibration of cracked nanobeams using nonlocal elasticity theory, *Current Applied Physics*, Vol. 11, No. 6, pp. 1384-1388, 2011.

[8] M. Aydogdu, Axial vibration analysis of nanorods (carbon nanotubes) embedded in an elastic medium using nonlocal elasticity, *Mechanics Research Communications*, Vol. 43, pp. 34-40, 2012 .

[9] S. M. H. Goushegir, S. Faroughi, Analysis of axial vibration of non-uniform nanorods using boundary characteristic orthogonal polynomials, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 1, pp. 203-212, 2016. (in Persian)

[10] D. Karličić, M. Cajić, T. Murmu, S. Adhikari, Nonlocal longitudinal vibration of viscoelastic coupled double-nanorod systems, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 49, pp. 183-196, 2015.

[11] M. Aydogdu, A nonlocal rod model for axial vibration of double-walled carbon nanotubes including axial van der Waals force effects, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 21, No. 16, pp. 3132-3154, 2014.

[12] M. Şimşek, Nonlocal effects in the free longitudinal vibration of axially functionally graded tapered nanorods, *Computational Materials Science*, Vol. 61, pp. 257-265, 2012.

[13] A. Assadi, B. Farshi, Size-dependent longitudinal and transverse wave propagation in embedded nanotubes with consideration of surface effects, *Acta mechanica*, Vol. 222, No. 1-2, pp. 27-39, 2011.

[14] M. Aydogdu, Longitudinal wave propagation in nanorods using a general nonlocal unimodal rod theory and calibration of nonlocal parameter with lattice dynamics, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 56, pp. 17-28, 2012 .

[15] B. Akgöz, Ö. Civalek, Longitudinal vibration analysis of strain gradient bars made of functionally graded materials (FGM), *Composites Part B: Engineering*, Vol. 55, pp. 263-268, 2013 .

[16] S. Narendar, S. Gopalakrishnan, Axial wave propagation in coupled nanorod system with nonlocal small scale effects, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 42, No. 7, pp. 2013-2023, 2011.

[17] S. S. Rao, *Vibration of continuous systems*: John Wiley & Sons, pp. 258-260, 2007.

[18] J. P. Lu, Elastic properties of single and multilayered nanotubes, *Journal of physics and chemistry of solids*, Vol. 58, No. 11, pp. 1649-1652, 1997.